BT/PEF-8713

SOBRE O CONCEITO DE CORPO MATERIAL LINEARMENTE ELÁSTICO

Paulo Boulos
Professor Livre-Docente
(recebido em 24/08/87)

RESUMO

Nesta nota, mostra-se que um corpo material elástico, cuja função-resposta de Piola-kirchhoff é linear num ponto p é trivial, no sentido de que a tensão em p é nula, independentemente da deformação.

SOBRE O CONCEITO DE CORPO MATERIAL LINEARMENTE ELÁSTICO

1.<u>Notação</u>. A seguinte notação será utilizada:

Lin : espaço vetorial dos tensores (aplicações lineares) sobre o espaço vetorial $\mathcal{V}$ dos vetores livres.

Sym : subespaço vetorial de Lin dos tensores simétricos.

Skw : subespaço vetorial de Lin dos tensores anti-simétricos.

Orth : subespaço vetorial de Lin dos tensores ortogonais.

O índice superior + afetando os símbolos acima indica subconjunto de tensores de determinante positivo.

Σ : Lin $\longrightarrow$ Sym é a aplicação (linear) de simetrização,

$$\Sigma\,[F] = \frac{1}{2}(F+F^T)$$

Se g: $U \times V \longrightarrow Z$ é uma aplicação e $(u,v) \in U \times V$, então g_u e g_v designarão aplicações definidas em V e U respectivamente tais que $g_u(v) = g_v(u) = g(u,v)$.

$(Df)_A$: derivada de Fréchet da aplicação f no ponto A.

2.<u>Introdução</u>. A referência básica para a presente nota é [1]. Um corpo material elástico é um corpo material $\mathcal{B}$ cuja classe constitutiva é formada por todos os processos dinâmicos $(\mathcal{X},T)$ que verificam uma equação constitutiva do tipo

$$T(x,t) = \hat{T}(F(p,t),p)$$

sendo $\hat{T}$: $\mathrm{Lin}^+ \times \mathcal{B} \longrightarrow$ Sym, dita função-resposta do corpo material,

$x = \chi(p,t)$, $F = \mathrm{Grad}\,\chi$. Associada a $\hat{T}$ tem-se a função-resposta de Piola-Kirchhoff $\hat{S} : \mathrm{Lin}^+ \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathrm{Lin}$ dada por

$$\hat{S}(F,p) = \det F \; T(F,p) \; F^{-T}$$

a qual verifica, pela independência de observador,

$$S_p(QF) = Q\, S_p(F) \qquad \forall\, F \in \mathrm{Lin}^+,\ \forall\, Q \in \mathrm{Orth}^+,\ \forall\, p \in \mathcal{B} \qquad (1)$$

Admitindo-se tensão residual nula em p ($\hat{T}_p(I)=0$, I o tensor identidade) então o tensor de elasticidade em p,

$$C_p = (D\hat{T}_p)_I = (D\hat{S}_p)_I : \mathrm{Lin} \longrightarrow \mathrm{Lin}$$

toma valores em Sym e leva Skw em $\{0\}$.

Quando se estuda a elasticidade linear são feitas hipóteses de aproximação que conduzem à seguinte:

$$\hat{S}_p(F) \simeq C_p \cdot \Sigma\, [F-I] \qquad (2)$$

Uma pergunta natural que surge é se não é possível considerar-se um corpo material elástico (segundo a definição dada acima) tal que

$$\hat{S}_p(F) = L_p\, [F-I] \qquad \forall\, F \in \mathrm{Lin}^+ \qquad (3)$$

onde L_p: Lin ⟶ Lin é linear.

O objetivo da presente nota é mostrar que neste caso $\hat{T}_p = 0$. Portanto esta situação não oferece interesse na prática, o que nos leva a considerar que conceitualmente a teoria linear da elasticidade deve ser olhada como uma aproximação.

3.Lema. Se $S\in Sym$ é tal que $SA+AS = 0$ para todo $A\in Skw$ então $S = 0$.

Prova. Seja λ um autovalor de S, e v um autovetor correspondente. Então

$$\begin{aligned} 0 = (SA+AS)[v] &= S[A[v]] + A[S[v]] \\ &= S[A[v]] + A[\lambda v] \\ &= S[A[v]] + \lambda A[v] \end{aligned}$$

logo

$$S[A[v]] = -\lambda A[v], \qquad \forall\, A\in Skw$$

Como $v \neq 0$, quando A percorre Skw então $A[v]$ percorre $v^{\perp}$ (o subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ ortogonal a v no produto escalar usual em $\mathcal{V}$), de modo que

$$S[w] = -\lambda w, \qquad \forall\, w\in v^{\perp}$$

Seja $w\neq 0$ de $v^{\perp}$ e A o tensor anti-simétrico de vetor axial v. Então

$$\begin{aligned} 0 = (SA+AS)[w] &= S[A[w]] + A[S[w]] \\ &= S[v\wedge w] + v\wedge[-\lambda w] \\ &= -\lambda v\wedge w - \lambda v\wedge w = -2\lambda v\wedge w \end{aligned}$$

Daí resulta $\lambda = 0$ e portanto $S = 0$.

4.Teorema. Seja $\hat{T}$ a função-resposta de um corpo material elástico cuja função-resposta de Piola-Kirchhoff é dada por (3). Então $\hat{T}(F,p) = 0$, $\forall\, F\in Lin^{+}$, $\forall\, p\in\mathcal{B}$.

Prova. Para cada p mostraremos que $\hat{T}_p = 0$. Calculemos o tensor de elasticidade em p. Temos, para $H\in Lin$:

$$C_p[H] = (D\hat{S}_p)_I[H] = \lim_{t\to 0} \frac{\hat{S}p(I+tH) + \hat{S}p(I)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{Lp[I+tH-I] + Lp[I-I]}{t}$$

$$= Lp[H]$$

de modo que o tensor de elasticidade em p é L_p . Assim podemos concluir que

$$L_p(\mathrm{Lin}) \subset \mathrm{Sym} \qquad (4)$$

$$L_p(\mathrm{Skw}) = 0 \qquad (5)$$

Por (1) e (3) podemos escrever

$$L_p[QF-I] = Q\, L_p[F-I] \qquad \forall\, F\in\mathrm{Lin}^+, \quad \forall\, Q\in\mathrm{Orth}^+$$

Fazendo $Q = e^{tA}$, onde $A\in\mathrm{Skw}$ e t é um número real vem

$$L_p[e^{tA}F-I] = e^{tA} L_p[F-I]$$

Derivando em t=0 ambos os membros resulta

$$L_p[AF] = A\, L_p[F-I]$$

ou seja, sendo $\Delta = F-I$,

$$L_p[A\Delta + A] = A\, L_p[\Delta]$$

e como L_p é linear e $L_p[A] = 0$ por (5), resulta que

$$L_p[A\Delta] = A\, L_p[\Delta] \qquad (6)$$

para todo $A\in\mathrm{Skw}$ e todo Δ tal que $\Delta + I\in\mathrm{Lin}^+$.

Tomando a transposta em ambos os membros de (6) temos

$$(L_p[A\Delta])^T = (L_p[\Delta])^T A^T$$

ou seja, graças a (4) e por ser A anti-simétrica,

$$L_p[A\Delta] = -L_p[\Delta]\, A$$

Comparando com (6) vem

$$L_p[\Delta]\, A + A\, L_p[\Delta] = 0 \qquad \forall\, A \in Skw$$

o que acarreta pelo lema que

$$L_p[\Delta] = 0 \qquad \forall\, \Delta \in Lin \text{ com } \Delta + I \in Lin^+ \qquad (7)$$

Mostraremos agora que L_p é a transformação nula. De fato, seja $H \in Lin$ e (e_1, e_2, e_3) uma base ortonormal de $\mathcal{V}$. Então

$$H = \sum_{i,j} h_{ij}\, e_i \otimes e_j = \sum_{i<j} h_{ij}\, e_i \otimes e_j + \sum_{i>j} h_{ij}\, e_i \otimes e_j + \sum_{i} h_{ii}\, e_i \otimes e_i$$
$$= H_1 + H_2 + H_3 \qquad (8)$$

onde H_1, H_2, H_3 têm significados óbvios.

Claramente $\det(H_1+I) = \det(H_2+I) = 1$, logo, por (7)

$$L_p[H_1] = L_p[H_2] = 0 \qquad (9)$$

Por outro lado,

$$L_p[H_3] = \sum_i h_{ii}\, L_p[e_i \otimes e_i] = 0 \qquad (10)$$

ainda por (7), uma vez que $\det(e_i \otimes e_i + I) = 2$.

Assim, por (8), (9), (10) e pela linearidade de L_p temos

$$L_p[H] = L_p[H_1] + L_p[H_2] + L_p[H_3] = 0$$

para todo $H \in Lin$.

Finalmente, para todo $F \in Lin^+$ temos

$$\hat{T}_p(F) = \frac{1}{\det F} \hat{S}_p(F) F^T = \frac{1}{\det F} L_p[F-I] F^T = 0$$

5. Bibliografia.

[1] GURTIN, M.E. An Introduction to Continuum Mechanics. New York: Academic Press(1981)

— o —

NOTA. Depois de terminada a redação deste trabalho tomamos conhecimento, através do prof. Mazzilli, de um preprint de P. Podio-Guidugli, no qual se mostra que se $\hat{S}_p(F) = S_R + S_p[F-I]$ sendo S_p linear, então (admitindo independência de observador) tem-se $\hat{S}_p(F) = F S_R$. Isto é portanto uma generalização do nosso resultado. Muito embora isto assim seja, ainda achamos conveniente a publicação deste último, uma vez que a nossa demonstração difere em essência daquela constante no aludido preprint.