RT-MAE 9416

PREVISÃO DO VETOR DE ELEMENTOS NÃO OBSERVADOS NUMA POPULAÇÃO FINITA

by

Silvia Nagib Elian

Palavras Chaves: População Finita; Modelos de Superpopulação; Previsores Ótimos; Robustez.

Classificação AMS: 62D05
(AMS Classification)

- julho de 1994 -

PREVISÃO DO VETOR DE ELEMENTOS NÃO OBSERVADOS NUMA POPULAÇÃO FINITA

Silvia Nagib Elian

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo

C.P. 20570

01452-990 - São Paulo - SP - Brasil

Resumo

Neste trabalho, determinamos o previsor ótimo do vetor que contem os valores da variável de interesse Y para os N-n elementos populacionais não observados na amostra, sob a abordagem de modelos de superpopulação. Será obtido o previsor ótimo no modelo $\underset{\sim}{Y} \sim N_N(X\underset{\sim}{\beta}, V)$ e o previsor linear ótimo no modelo $\underset{\sim}{Y}=X\underset{\sim}{\beta}+\underset{\sim}{\varepsilon}$, com $E(\underset{\sim}{\varepsilon})=\underset{\sim}{0}$ e $Var(\underset{\sim}{\varepsilon})=V$, V conhecida, não diagonal. Apresentamos uma condição necessária e suficiente para que o previsor sofra uma razoável simplificação e alguns aspectos sobre robustez são abordados.

1. INTRODUÇÃO

Seja $\mathcal{P}=\{1,2...N\}$ uma população finita de N elementos, onde ao i-ésimo elemento estão associados $y_i, x_{i1}, x_{i2}...x_{ip}$, sendo que y_i é o valor da variável de interesse Y e x_{i1}, $x_{i2}...x_{ip}$ são os valores de p variáveis auxiliares, não aleatórias e completamente conhecidos para i = 1,2...N.

Utilizando a abordagem de modelos de superpopulação, admitiremos que $\underset{\sim}{y} = (y_1, y_2...y_N)'$ é um vetor aleatório tal que

$$\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon} , \quad (1)$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & & x_{2p} \\ \vdots & & & \\ 1 & x_{N1} & \dots & x_{Np} \end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{\beta}=(\beta_0, \beta_1 ... \beta_p)'$ é um vetor de parâmetros desconhecidos,

e

$E(\underset{\sim}{\varepsilon})=\underset{\sim}{0}$, $Var(\underset{\sim}{\varepsilon}) = Var(\underset{\sim}{y}) = V$,

V matriz conhecida, não diagonal.

Tomada uma amostra de n elementos, reordenaremos os elementos de $\underset{\sim}{y}$, X e V, de modo que

$$\underset{\sim}{y}= \begin{pmatrix} \underset{\sim}{y}_s \\ \underset{\sim}{y}_r \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} X_s \\ X_r \end{pmatrix} \text{ e } V = \begin{pmatrix} V_s & V_{sr} \\ V_{rs} & V_r \end{pmatrix},$$

com $\underset{\sim}{y}_s$ contendo os valores da variável Y associados aos n elementos amostrados, $\underset{\sim}{y}_r$ sendo o vetor de dimensão N-n de elementos não observados, $V_s=Var(\underset{\sim}{y}_s)$, $V_r=Var(\underset{\sim}{y}_r)$ e $V_{sr}=Cov(\underset{\sim}{y}_s,\underset{\sim}{y}_r)$.

O problema da previsão de quantidades desconhecidas numa população finita sob a abordagem de modelos de superpopulação tem sido abordado em vários artigos.

Royall(1976) obtem o previsor linear ótimo do total populacional $T = \sum_{i=1}^{N} y_i$, sob o modelo (1). Com a suposição adicional de normalidade para $\underset{\sim}{y}$, Tam(1987) mostra que o mesmo previsor é ótimo para o total.

Também nesta linha, Bolfarine et al. (1994) derivam o previsor ótimo e linear ótimo de

$$\underset{\sim}{B}_N = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}\underset{\sim}{y},$$

o coeficiente de regressão populacional.

Ambas as quantidades, T e $\underset{\sim}{B}_N$ podem ser escritas respectivamente como

$$T = \underset{\sim}{1}'_n y_s + \underset{\sim}{1}'_{N-n}\underset{\sim}{y}_r$$

e

$$\underset{\sim}{B}_N = H^{-1}BC^{-1}\underset{\sim}{y}_s + H^{-1}DE^{-1}\underset{\sim}{y}_r \ ,$$

onde $\underset{\sim}{1}'_n$ e $\underset{\sim}{1}'_{N-n}$ são os vetores linha respectivamente de dimensão n e N-n contendo 1 em todas as posições,

$$B = X'_s - X'_r V_r^{-1} V_{rs}, \qquad C = V_s - V_{sr} V_r^{-1} V_{rs},$$

$$D = X_r' - X_s'V_s^{-1}V_{sr}, \qquad E = V_r - V_{rs}V_s^{-1}V_{sr} \text{ e}$$

$$H = BC^{-1}X_s + DE^{-1}X_r = X'V^{-1}X$$

são matrizes não aleatórias, conhecidas.

Os previsores ótimos (ou lineares ótimos) de T e $\underset{\sim}{B}_N$ são dados por

$$\hat{T} = \underset{\sim}{1}_n' \, \underset{\sim}{y}_s + \underset{\sim}{1}_{N-n}' \, [V_{rs}V_s^{-1}\underset{\sim}{y}_s + (X_r - V_{rs}V_s^{-1}X_s)\hat{\underset{\sim}{\beta}}]$$

e

$$\hat{\underset{\sim}{\theta}} = H^{-1}BC^{-1}\underset{\sim}{y}_s + H^{-1}DE^{-1} \, [V_{rs}V_s^{-1}\underset{\sim}{y}_s + (X_r - V_{rs}V_s^{-1}X_s)\hat{\underset{\sim}{\beta}}].$$

No caso da previsão de $\underset{\sim}{B}_N$, Bolfarine et al (1994) verificam adicionalmente que $\hat{\underset{\sim}{\theta}} = \hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X_s'V_s^{-1}X_s)^{-1} X_s'V_s^{-1}\underset{\sim}{y}_s$, o previsor de mínimos quadrados generalizados. Na previsão de T, Bolfarine e Rodrigues (1988) mostram que uma simplificação na expressão matemática de $\hat{T}$ só ocorre sob condições especiais. Em ambos os casos, no entanto, notamos que o vetor de dados não observados $\underset{\sim}{y}_r$ é previsto por

$$\hat{\underset{\sim}{y}}_r^{\,*} = V_{rs}V_s^{-1}\underset{\sim}{y}_s + (X_r - V_{rs}V_s^{-1}X_s)\hat{\underset{\sim}{\beta}} \,. \qquad (2)$$

Utilizando funções de verossimilhança preditivas, Rodrigues e Elian (1993) mostram que $\hat{\underset{\sim}{y}}_r^{*}$ é o previsor de máxima verossimilhança de $\underset{\sim}{y}_r$ quando o modelo de superpopulação é $\underset{\sim}{y} \sim N_N(X\underset{\sim}{\beta}, V)$.

Neste artigo, estudamos outras propriedades de $\hat{y}_r^*$ como previsor do vetor de dados não observados y_r.

Na seção 2, provamos a otimalidade do previsor e de qualquer combinação linear de seus componentes e obtemos sua matriz de covariância quando o modelo de superpopulação é $y \sim N_N(X\beta, V)$, V não diagonal, conhecida. Abandonando a suposição de normalidade, provamos na seção 3 que o mesmo previsor é linear ótimo para y_r no modelo $y = X\beta + \varepsilon$, com as suposições $E(\varepsilon) = 0$ e $Var(\varepsilon) = V$.

Na seção 4, estabelecemos uma condição necessária e suficiente para que $\hat{y}_r^*$ sofra uma considerável simplificação. Finalmente, na seção 5, alguns aspectos sobre a robustez do previsor simplificado são apresentadas.

2. PREVISÃO ÓTIMA DE y_r SOB NORMALIDADE

Na previsão de y_r, quantidade (N-n)-dimensional, utilizaremos o erro quadrático médio generalizado, definido a seguir, como medida de precisão.

Definição 2.1 Se $\hat{y}_r$ é um previsor qualquer de y_r, o erro quadrático médio generalizado de $\hat{y}_r$ é definido como

$$EQMG(\hat{y}_r) = \lambda' E[(\hat{y}_r - y_r)(\hat{y}_r - y_r)']\lambda ,$$

para cada vetor (N-n)-dimensional λ, $\lambda \neq 0$.

<u>Definição 2.2</u> O vetor (N-n)-dimensional $\hat{y}_r^*$ é o melhor previsor não viciado de y_r , ou é o previsor ótimo de y_r, se for não viciado, isto é, $E(\hat{y}_r^* - y_r) = \underset{\sim}{0}$ e se para todo $\underset{\sim}{\lambda} \in R^{N-n}$,

$$EQMG(\hat{y}_r^*) \leq EQMG(\hat{y}_r),$$

qualquer que seja o previsor $\hat{y}_r$ não viciado para y_r .

Definindo o critério de otimalidade, provaremos que $\hat{y}_r^*$ dado na expressão (2) é o previsor ótimo de y_r no modelo em que

$$y \sim N_N(X\underset{\sim}{\beta}, V), \text{ com } V = Var(y) = \begin{bmatrix} V_s & V_{sr} \\ V_{rs} & V_r \end{bmatrix}, \text{ conhecida.}$$

<u>Lema 2.1</u> Se $\hat{y}_r$ é um previsor de y_r , então, para todo $\underset{\sim}{\lambda} \in R^{N-n}$,

$$E(\underset{\sim}{\lambda}'\hat{y}_r - \underset{\sim}{\lambda}'y_r)^2 = E[\underset{\sim}{\lambda}'\hat{y}_r - E(\underset{\sim}{\lambda}'y_r | y_s)]^2 + E[\underset{\sim}{\lambda}'y_r - E(\underset{\sim}{\lambda}'y_r | y_s)]^2.$$

<u>Teorema 2.1</u> No modelo $y \sim N_N(X\underset{\sim}{\beta}, V)$, o melhor previsor não viciado de y_r é

$$\hat{y}_r^* = V_{rs}V_s^{-1}y_s + (X_r - V_{rs}V_s^{-1}X_s)\hat{\underset{\sim}{\beta}},$$

onde $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X_s'V_s^{-1}X_s)^{-1} X_s'V_s^{-1}y_s.$

Prova:

Se $\hat{y}_r$ é um previsor qualquer não viciado para y_r, então

$$E(\hat{y}_r) = X_r\underset{\sim}{\beta}.$$

O previsor $\hat{y}_r^*$ é não viciado para y_r pois

$E(\hat{y}^*) = V_{rs}V_s^{-1}X_s\beta + (X_r - V_{rs}V_s^{-1}X_s)\beta$.

Como $y \sim N_N(X\beta, V)$, $E(y_r|y_s) = V_{rs}V_s^{-1}y_s + (X_r - V_{rs}V_s^{-1}X_s)\beta$ e, devido ao lema 2.1,

$$EQMG\ (\hat{y}_r) = E[(\lambda'\hat{y}_r - \lambda' y_r)^2] =$$

$$= E([\lambda'\hat{y}_r - \lambda' V_{rs}V_s^{-1}y_s - \lambda'(X_r - V_{rs}V_s^{-1}X_s)\beta]^2) + E([\lambda' y_r - E(\lambda' y_r | y_s)]^2).$$

Analogamente,

$$EQMG\ (\hat{y}_r^*) = E\ [(\lambda'\hat{y}_r^* - \lambda' y_r)^2] =$$

$$= E([\lambda'(X_r - V_{rs}V_s^{-1}X_s)\hat{\beta} - \lambda'(X_r - V_{rs}V_s^{-1}X_s)\beta]^2) + E([\lambda' y_r - E(\lambda' y_r|y_s)]^2).$$

A suposição de que $y \sim N_N(X\beta, V)$ implica que $y_s \sim N_n(X_s\beta, V_s)$. Assim, $\lambda'(X_r - V_{rs}V_s^{-1}X_s)\hat{\beta}$ é o estimador não viciado de variância mínima de $\lambda'(X_r - V_{rs}V_s^{-1}X_s)\beta$ e, sendo $\lambda'(\hat{y}_r - V_{rs}V_s^{-1}y_s)$ um estimador não viciado para $\lambda'(X_r - V_{rs}V_s^{-1}X_s)\ \beta$, segue que

$$E([\lambda'(X_r - V_{rs}V_s^{-1}X_s)\ \hat{\beta} - \lambda'(X_r - V_{rs}V_s^{-1}X_s)\beta\ ]^2) \le$$

$$E([\lambda'\hat{y}_r - \lambda' V_{rs}V_s^{-1}y_s - \lambda'(X_r - V_{rs}V_s^{-1}X_s)\beta]^2), \forall\ \lambda$$

e portanto

$$EQMG(\hat{y}_r^*) \le EQMG(\hat{y}_r). \quad \square$$

Após cálculos, verificamos que

$$\text{EQMG}\ (\hat{\underset{\sim}{y}}_r^*)=\underset{\sim}{\lambda}'[V_r + D'(X_s'V_s^{-1}X_s)^{-1}D - V_{rs}V_s^{-1}V_{sr}]\underset{\sim}{\lambda}\ ,$$

onde $D = X_r' - X_s'V_s^{-1}V_{sr}$.

É importante observarmos a dimensão (N-n) do vetor a ser previsto. Na maioria dos casos, o tamanho da amostra, n, é um número pequeno comparado com N, tamanho da população. Desta forma, a dimensão do vetor $\underset{\sim}{y}_r$ é, no geral, bastante grande.

Tomando $\underset{\sim}{\lambda}' = \underset{\sim}{\ell}'$ no teorema 2.1, notamos que se $\underset{\sim}{\ell}'\underset{\sim}{y}_r$ é uma combinação linear qualquer dos elementos de $\underset{\sim}{y}_r$, então $\underset{\sim}{\ell}'\hat{\underset{\sim}{y}}_r^*$ é o previsor ótimo de $\underset{\sim}{\ell}'y_r$. Em particular, a j-ésima componente de $\hat{\underset{\sim}{y}}_r^*$ será o previsor ótimo da j-ésima componente de $\underset{\sim}{y}_r$.

Por outro lado, se A_1 e A_2 são matrizes respectivamente k×n e k×(N-n), k ≤ N-n e $\underset{\sim}{\theta} = A_1\underset{\sim}{y}_s + A_2\underset{\sim}{y}_r$, segue do teorema 2.1 que $\hat{\underset{\sim}{\theta}}^* = A_1\underset{\sim}{y}_s + A_2\hat{\underset{\sim}{y}}_r^*$ é o previsor ótimo de $\underset{\sim}{\theta}$. Isto pode ser verificado pois

$$E\ (\hat{\underset{\sim}{\theta}}^* - \underset{\sim}{\theta}) = E[A_2(\hat{\underset{\sim}{y}}_r^* - \underset{\sim}{y}_r)] = \underset{\sim}{0}$$

e

$$\text{EQMG}\ (\hat{\underset{\sim}{\theta}}^*) = E(\underset{\sim}{\lambda}^{*\prime}A_2\hat{\underset{\sim}{y}}_r^* - \underset{\sim}{\lambda}^{*\prime}A_2\underset{\sim}{y}_r)^2 = E(\underset{\sim}{\lambda}'\hat{\underset{\sim}{y}}_r^* - \underset{\sim}{\lambda}'\underset{\sim}{y}_r)^2,$$

$\underset{\sim}{\lambda}^* \in \mathbb{R}^k$.

Em particular, os previsores ótimos de $\underset{\sim}{B}_N$ e T poderiam ser alternativamente obtidos através do resultado deste teorema.

3. PREVISÃO LINEAR ÓTIMA DE y_r

Se, no modelo de superpopulação utilizado, a suposição de normalidade for abandonada, de modo a trabalharmos com o modelo mais geral dado em (1), o próximo teorema prova que $\hat{y}_r^*$ será o previsor linear ótimo de y_r . Agora, devido à maior generalidade do modelo, a otimalidade de $\hat{y}_r^*$ ficará restrita à classe dos previsores lineares não viciados de y_r .

<u>Lema 3.1</u> No modelo (1),

$$E(h'y_s - \ell'y)^2 = E[(h' - \ell'K'V_s^{-1})(y_s - X_s\beta)]^2 + \ell'V\ell - \ell'K'V_s^{-1}K\ell$$

$$+ [(h'X_s - \ell'X)\beta]^2 \quad ,$$

onde h'e ℓ' são vetores respectivamente n e N-dimensionais e $K=[V_s \ \ V_{sr}]$.

<u>Teorema 3.1</u> No modelo (1), o previsor linear ótimo de y_r é

$$\hat{y}_r^* = V_{rs}V_s^{-1}y_s + (X_r - V_{rs}V_s^{-1}X_s)\hat{\beta} \ ,$$

onde $\hat{\beta} = (X_s' \ V_s^{-1} \ X_s)^{-1} \ X_s' \ V_s^{-1}y_s$.

Prova:

Sejam $T \ y_s$ um previsor linear não viciado de y_r, T matriz $(N-n)\times n$ e $A = [0_{(N-n)\times n} \ \ I_{N-n}]$,onde $0_{(N-n)\times n}$ representa a matriz nula de dimensão $(N-n)\times n$ e I_{N-n} a matriz identidade de ordem N-n.

Nestas condições, $\underset{\sim}{\lambda}'y_r = \underset{\sim}{\lambda}'Ay$, $E(T\, y_s - y_r) = \underset{\sim}{0}$,

$E(\underset{\sim}{\lambda}'T\, y_s - \underset{\sim}{\lambda}'y_r) = \underset{\sim}{0} = E(\underset{\sim}{\lambda}'T\, y_s - \underset{\sim}{\lambda}'A\, y) = \underset{\sim}{\lambda}'TX_s\, \beta - \underset{\sim}{\lambda}'AX\, \beta$ e

$EQMG\,(T\, y_s) = E\,(\underset{\sim}{\lambda}'Ty_s - \underset{\sim}{\lambda}'A\, y)^2$.

No lema 3.1, tomando $\underset{\sim}{h}' = \underset{\sim}{\lambda}'T$ e $\underset{\sim}{\ell}' = \underset{\sim}{\lambda}'A$, obtemos

$$EQMG(Ty_s)=E[(\underset{\sim}{\lambda}'T-\underset{\sim}{\lambda}'AK'V_s^{-1})(y_s - X_s\beta)]^2 + \underset{\sim}{\lambda}'AVA'\underset{\sim}{\lambda} - \underset{\sim}{\lambda}'AK'V_s^{-1}KA'\underset{\sim}{\lambda} .$$

Como $E(y_s) = X_s\beta$, o previsor linear ótimo de y_r , T^*y_s , deve minimizar

$$E\{(\underset{\sim}{\lambda}'T-\underset{\sim}{\lambda}'AK'V_s^{-1})y_s - E[(\underset{\sim}{\lambda}'T-\underset{\sim}{\lambda}'AK'V_s^{-1})y_s]\}^2$$

e, para isto, $\underset{\sim}{\lambda}'T^*y_s - \underset{\sim}{\lambda}'AK'V_s^{-1}y_s$ deve ser o estimador linear ótimo de

$$E[(\underset{\sim}{\lambda}'T-\underset{\sim}{\lambda}'AK'V_s^{-1})y_s] = (\underset{\sim}{\lambda}'T-\underset{\sim}{\lambda}'AK'V_s^{-1})X_s\beta = (\underset{\sim}{\lambda}'AX-\underset{\sim}{\lambda}'AK'V_s^{-1}X_s)\beta.$$

Pelo teorema de Gauss-Markov, o estimador linear ótimo de $(\underset{\sim}{\lambda}'AX-\underset{\sim}{\lambda}'AK'V_s^{-1}X_s)\beta$ é $(\underset{\sim}{\lambda}'AX-\underset{\sim}{\lambda}'AK'V_s^{-1}X_s)\hat{\beta}$ e portanto,

$$\underset{\sim}{\lambda}'T^*y_s - \underset{\sim}{\lambda}'AK'V_s^{-1}y_s = \underset{\sim}{\lambda}'AX\hat{\beta} - \underset{\sim}{\lambda}'AK'V_s^{-1}X_s\hat{\beta}.$$

Temos que $AK' = V_{rs}$ e $AX = X_r$ e assim,

$$\underset{\sim}{\lambda}' T^* \underset{\sim}{y}_s = \underset{\sim}{\lambda}' V_{rs} V_s^{-1} \underset{\sim}{y}_s + \underset{\sim}{\lambda}' (X_r - V_{rs} V_s^{-1} X_s) \hat{\underset{\sim}{\beta}} \ , \ \forall \ \underset{\sim}{\lambda} \in R^{N-n} \ ,$$

o que prova o resultado. □

4. FORMA SIMPLIFICADA DE $\hat{\underset{\sim}{y}}_r^*$

A busca de previsores que, além de boas propriedades, possuam também uma forma simples, tem sido frequente.

Särndal and Wright (1984) ressaltam a importância de trabalharmos com previsores simples e intuitivos. Seguindo este objetivo, Bolfarine e Rodrigues (1988) verificam que o previsor ótimo do total, $\hat{T}$, se reduz a uma forma mais simples, dada por $\underset{\sim}{1}_N' X \hat{\underset{\sim}{\beta}}$, se e somente se $K \underset{\sim}{1}_N \in \mu(X_s)$, onde $\mu(X_s)$ representa o espaço linear gerado pelas colunas de X_s.

No caso da previsão de $\underset{\sim}{y}_r$, o previsor mais simples é $X_r \hat{\underset{\sim}{\beta}}$, sendo também mais intuitivo, pois $E(\underset{\sim}{y}_r) = X_r \underset{\sim}{\beta}$. O próximo teorema estabelece uma condição necessária e suficiente para que $\hat{\underset{\sim}{y}}_r^* = X_r \hat{\underset{\sim}{\beta}}$.

<u>Teorema 4.1</u> O previsor ótimo de $\underset{\sim}{y}_r$, $\hat{\underset{\sim}{y}}_r^*$, coincide com $X_r \hat{\underset{\sim}{\beta}}$ se e somente se

$$V_{sr} \ \underset{\sim}{\ell} \in \mu(X_s) , \tag{3}$$

para todo vetor (N-n)-dimensional $\underset{\sim}{\ell}$.

Prova:

$\hat{\underset{\sim}{y}}_r^{\,*} = X_r\hat{\underset{\sim}{\beta}} \iff \underset{\sim}{\ell}'\hat{\underset{\sim}{y}}_r^{\,*} = \underset{\sim}{\ell}'X_r\hat{\underset{\sim}{\beta}} \quad \forall\ \underset{\sim}{\ell} \in \mathbb{R}^{N-n} \iff$

$\underset{\sim}{\ell}'V_{rs}V_s^{-1}\underset{\sim}{y}_s + \underset{\sim}{\ell}'(X_r - V_{rs}V_s^{-1}X_s)\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \underset{\sim}{\ell}'X_r\hat{\underset{\sim}{\beta}},\ \forall\ \ell \in \mathbb{R}^{N-n} \iff$

$\underset{\sim}{\ell}'V_{rs}V_s^{-1}(\underset{\sim}{y}_s - X_s\hat{\underset{\sim}{\beta}}) = 0,\ \forall\ \underset{\sim}{\ell} \in \mathbb{R}^{N-n}$.

Como $(\underset{\sim}{y}_s - X_s\hat{\underset{\sim}{\beta}}) \in \mu^{\perp}(X_s)$, onde $\mu^{\perp}(X_s)$ representa o espaço vetorial ortogonal a $\mu(X_s)$, a última igualdade vale se e somente se $V_{sr}\underset{\sim}{\ell} \in \mu(X_s),\ \forall\ \underset{\sim}{\ell} \in \mathbb{R}^{N-n}$, o que encerra a demonstração. □

A condição (3) parace mais restrita que $K\ \underset{\sim}{1}_{N-n} \in \mu(X_s)$, no entanto, a primeira não implica na segunda, conforme mostra o corolário 4.1. Devemos nos lembrar da maior dimensão da quantidade a ser prevista, $\underset{\sim}{y}_r$. Mesmo assim, o exemplo 4.1 apresenta uma situação usual em que a condição está satisfeita.

<u>Exemplo 4.1</u>

Consideremos o modelo de superpopulação

$\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$, $E(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \underset{\sim}{0}$, $Var(\underset{\sim}{\varepsilon}) = V$

com

$X = \underset{\sim}{1}_N$, $V = (1-\rho)I_N + \rho\underset{\sim}{1}_N\,\underset{\sim}{1}'_N = (1-\rho)I_N + \rho J_N$,

onde J_N é a matriz NxN contendo 1 em todas as posições.

Neste caso,

$V_s = (1-\rho)I_N + \rho J_n$,

o que implica que

$$V_s^{-1} = \frac{1}{1-\rho} \left[I_n - \frac{\rho}{1+(n-1)\rho} J_n \right] ,$$

$$\hat{\beta} = \bar{y}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} ,$$

$$V_{rs} = \rho \, J_{N-n,n} \qquad \text{e}$$

$$X_r - V_{rs} V_s^{-1} X_s = \frac{1-\rho}{1+(n-1)\rho} \; \underset{\sim}{1}'_{N-n} .$$

Além disso,

$$V_{rs} V_s^{-1} \underset{\sim}{y}_s = \frac{\rho}{1+(n-1)\rho} \; \underset{\sim}{1}_{N-n} \, n\bar{y}_s ,$$

e assim,

$$\hat{\underset{\sim}{y}}_r^* = \underset{\sim}{1}_{N-n} \, \bar{y}_s .$$

Como $X_r = \underset{\sim}{1}_{N-n}$, segue que $\hat{\underset{\sim}{y}}_r^* = X_r \hat{\beta}$ e, pelo teorema 4.1,

$V_{sr} \, \underset{\sim}{\ell} \in \mu(X_s)$, $\forall \, \underset{\sim}{\ell} \in \mathbb{R}^{N-n}$.

De fato, se $\underset{\sim}{\ell}' = (\ell_1, \ell_2 \ldots \ell_{N-n})$,

$$V_{sr} \, \underset{\sim}{\ell} = \rho \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\ell} = \underset{\sim}{1}_n \; \rho \sum_{i=1}^{N-n} \ell_i = X_s \delta, \text{ para } \delta = \rho \sum_{i=1}^{N-n} \ell_i ,$$

o que mostra que $V_{sr} \, \underset{\sim}{\ell} \in \mu(X_s)$, $\forall \, \underset{\sim}{\ell} \in \mathbb{R}^{N-n}$.

<u>Corolário 4.1</u> Se $\hat{\underset{\sim}{y}}_r^* = X_r \hat{\beta}$ e $V_s \, \underset{\sim}{1}_n \in \mu(X_s)$, então $\hat{T} = \underset{\sim}{1}'_N X \hat{\beta}$.

Prova:

Se $\hat{\underset{\sim}{y}}_r^{\,*} = X_r\hat{\underset{\sim}{\beta}}$, pelo teorema 4.1, $V_{sr}\underset{\sim}{\ell} \in \mu(X_s)$, $\forall\ \underset{\sim}{\ell} \in \mathbb{R}^{N-n}$ e assim, $V_{sr}\underset{\sim}{1}_{N-n} \in \mu(X_s)$. Temos também, por hipótese, que $V_s\ \underset{\sim}{1}_n \in \mu(X_s)$, e com isto,

$$V_{sr}\underset{\sim}{1}_{N-n} = X_s\underset{\sim}{\delta}_1\ ,\ \underset{\sim}{\delta}_1 \in \mathbb{R}^{P+1}$$

e

$$V_s\underset{\sim}{1}_n = X_s\underset{\sim}{\delta}_2\ ,\ \underset{\sim}{\delta}_2 \in \mathbb{R}^{P+1},$$

que implica em

$$[V_s\ \ V_{sr}]\begin{bmatrix} \underset{\sim}{1}_n \\ \underset{\sim}{1}_{N-n} \end{bmatrix} = X_s(\underset{\sim}{\delta}_1 + \underset{\sim}{\delta}_2).$$

Desta forma, $K\ \underset{\sim}{1}_N \in \mu(X_s)$, o que garante que $\hat{T} = \underset{\sim}{1}_N' X\hat{\underset{\sim}{\beta}}$. □

5. ROBUSTEZ DOS PREVISORES ÓTIMOS COM RELAÇÃO A ALTERAÇÕES NA MATRIZ DE COVARIÂNCIA DO MODELO

Uma análise comum quando trabalhamos com previsores ótimos em um determinado modelo é a pesquisa de condições sob as quais estes previsores mantém sua otimalidade em modelos alternativos.

Neste sentido, o resultado do teorema 4.1 permite um estudo sobre a robustez do previsor quanto a alguns tipo de falhas na especificação da matriz de covariância.

Vamos considerar os modelos

$$\xi_1 : \underset{\sim}{y} = X\beta + \underset{\sim}{\varepsilon}_1 \ , \ E(\underset{\sim}{\varepsilon}_1) = \underset{\sim}{0} \ , \ Var(\underset{\sim}{\varepsilon}_1) = Var(\underset{\sim}{y}) = \begin{bmatrix} V_s & 0 \\ 0 & V_{r1} \end{bmatrix}$$

e

$$\xi_2 : \underset{\sim}{y} = X\beta + \underset{\sim}{\varepsilon}_2 \ , \ E(\underset{\sim}{\varepsilon}_2) = \underset{\sim}{0} \ , Var(\underset{\sim}{\varepsilon}_2) = Var(\underset{\sim}{y}) = \begin{bmatrix} V_s & V_{sr} \\ V_{rs} & V_{r2} \end{bmatrix}, \ V_{sr} \neq 0,$$

e os previsores lineares ótimos de T e $\underset{\sim}{y}_r$, respectivamente sob os modelos ξ_1 e ξ_2: $\hat{T}_1$, $\hat{\underset{\sim}{y}}^*_{r1}$, $\hat{T}_2$, $\hat{\underset{\sim}{y}}^*_{r2}$.

Os próximos corolários estabelecem alguns aspectos relativos à robustez dos previsores.

<u>Corolário 5.1</u> $\hat{\underset{\sim}{y}}^*_{r1} = \hat{\underset{\sim}{y}}^*_{r2}$ se e somente se a condição (3) está satisfeita.

Prova:

$\hat{\underset{\sim}{y}}^*_{r1} = X_r\hat{\beta}$ e $\hat{\underset{\sim}{y}}^*_{r2} = V_{rs}V_s^{-1}\underset{\sim}{y}_s + (X_r - V_{rs}V_s^{-1}X_s)\hat{\beta}$, onde $\hat{\beta} = (X_s'V_s^{-1}X_s)^{-1}X_s'V_s^{-1}\underset{\sim}{y}_s$.

Segue diretamente do teorema 4.1 que $\hat{\underset{\sim}{y}}^*_{r1} = \hat{\underset{\sim}{y}}^*_{r2}$ se e somente se (3) está satisfeita. □

<u>Corolário 5.2</u> Se a condição (3) está satisfeita então $\hat{T}_1 = \hat{T}_2$.

Prova:

$$\hat{T}_1 = \underset{\sim}{1}'_n \underset{\sim}{y}_s + \underset{\sim}{1}'_{N-n} \underset{\sim}{X}_r\hat{\beta} = \underset{\sim}{1}'_n\underset{\sim}{y}_s + \underset{\sim}{1}'_{N-n} \hat{\underset{\sim}{y}}^*_{r1} \quad \text{e}$$

$$\hat{T}_2 = \underset{\sim}{1}'_n \underset{\sim}{y}_s + \underset{\sim}{1}'_{N-n} [V_{rs}V_s^{-1}\underset{\sim}{y}_s + (X_r - V_{rs}V_s^{-1}X_s)\hat{\beta}] = \underset{\sim}{1}'_n\underset{\sim}{y}_s + \underset{\sim}{1}'_{N-n}\hat{\underset{\sim}{y}}^*_{r2} \ .$$

A condição (3) implica que $\hat{\underset{\sim}{y}}^*_{r2} = \hat{\underset{\sim}{y}}^*_{r1}$, e portanto, $\hat{T}_1 = \hat{T}_2$. □

Com relação ao corolário 5.2, verifica-se alternativamente que se $V_{sr}\underset{\sim}{\ell} \in \mu(X_s)$, $\forall\ \underset{\sim}{\ell} \in \mathbb{R}^{N-n}$, vale a condição (6.1.11), necessária e suficiente para que $\hat{T}_1 = \hat{T}_2$, dada em Bolfarine and Zacks (1993).

Observamos ainda que, neste caso, o cálculo dos previsores, além de não depender do conhecimento de V_r, será também independente de V_{sr}.

Se, juntamente com (3), for também válida a condição

$$V_s X_s = X_s F, \qquad (4)$$

para alguma matriz F, (p+1)x(p+1), não singular, é possível a previsão ótima de $\underset{\sim}{y}_r$ e T sem a especificação de V.

Isto acontece porque (4) é uma condição necessária e suficiente para que $(X_s'V_s^{-1}X_s)^{-1}X_s'V_s^{-1}\underset{\sim}{y}_s = (X_s'X_s)^{-1}X_s'\underset{\sim}{y}_s$, (Graybill (1976), pág. 209), ou seja, para que o estimador de mínimos quadrados generalizados coincida com o estimador de mínimos quadrados usual.

Finalizando, observamos que a validade da condição (3) não altera a forma matemática do previsor ótimo de $\underset{\sim}{B}_N$, pois este é $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X_s'V_s^{-1}X_s)^{-1}X_s'V_s^{-1}\underset{\sim}{y}_s$, qualquer que seja a matriz V_{sr}.

REFERÊNCIAS

Bolfarine, H., Zacks, S., Elian, S.N. and Rodrigues, J.(1994). Optimal Prediction of the Finite Population Regression Coefficient in Finite Populations. Sankhya, Series B, (aceito para publicação).

Bolfarine, H. and Rodrigues, J. (1988). On the simple projection predictor in finite populations. Australian Journal of Statistics, 30(3): 338-341.

Bolfarine, H. and Zacks, S.(1993). Prediction Theory for Finite Populations. Springer-Verlag, New York. 207 p.

Graybill, F.A. (1976). Theory and Application of the Linear Model. Duxbury Press. 704 p.

Rodrigues, J. and Elian, S.N. (1993). Maximum Likelihood Prediction in Finite Populations. Technical Report, University of São Paulo, Department of Statistics.

Royall, R.M. (1976). The Linear Least-Squares Prediction Approach to Two-stage sampling. Journal of the American Statistical Association, 71(355): 657-664.

Sarndal, C.E. and Wright, R.L. (1984). Cosmetic Form of estimators in survey sampling. Scandinavian Journal of Statistics, 11(3): 146-156.

Tam, S.M. (1987). Optimality of Royall's predictor under a Gaussian Superpopulation Model. Biometrika, 74(3):659-660.

ULTIMOS RELATORIOS TECNICOS PUBLICADOS

9401 - PAULA, G. A., SEN P.K., Tests of ordered Hypotheses in Linkage in Heredity, 12p.

9402 - PAULA, G. A., SEN P. K. One-Sided Tests in Generalized Linear Models with Parallel Regression Lines, 18p.

9403 - PAULA, G. A., .Influence Diagnostics in Proper Dispersion Models,22 p.

9404 - SALINAS-TORRES, V.H. & PEREIRA, C.A.B. and TIWARI, R.C. - Convergence of Dirichlet Measures Arising in Context of Bayesian Analysis of Competing Risk Models, 17p.

9405 - CRIBARI-NETO, F. & FERRARI, S.L.P. - Second Order Asymptotics for Score Tests in Generalized Linear Models, 25p.

9406 - ZUAZOLA, P.L.I., PEREIRA, C.A.B. & WECHSLER, S. - Predictivistic Statistical Inference in Finite Populations, 10p.

9407 - BOLFARINE, H. & ROJAS, M.G. - Maximum Likelihood Estimation of Simultaneous Pairwise Linear Structural Relationships, 19p.

9408 - FERRARI, P.A. & KIPNIS, C. - Second Class Particles in the Rarefaction Fan, 9p.

9409 - ANDRÉ, C.D.S., NARULA, S.C. & PERES, C.A. - Asymptotic Properties of MSAE Estimates in Multistage Model. Preliminary Results, 19p.

9410 - ARELLANO-VALLE, R.B. & BOLFARINE, H. - On Some Characterizations of the t-Distribution, 12p.

9411 - NEVES, E.J., A Discrete Variational Problem Related to Ising Droplets at Low Temperatures, 16p.

9412 - FERRARI, S.L.P. & CORDEIRO, G.M. - Corrected Score Tests for Exponential Family Nonlinear Models, 14p.

9413 - ANDRADE, D.F. & SINGER, J.M. - Profile Analysis for Randomized Complete Block Experiments, 8p.

9414 - BOLFARINE, H. & ROJAS, M.G. - On Structural Comparative Calibration, 13p.

9415 - AUBIN, E.C.Q. & CORDEIRO, G.M. Bias in Linear Regression Models with Unknown Covariance Matrix, 16p.

The complete list of Relatórios do Departamento de Estatística, IME-USP, will be sent upon request.

**- Departamento de Estatística
IME-USP
Caixa Postal 20.570
01452-990 - São Paulo, Brasil**