Problemas de Moedas Falsas

Alexandre Cardoso Garcia Leite
Orientador: José Augusto Soares

16 de outubro de 1995

1 Introdução

Suponha que você tenha 9 moedas aparentemente idênticas e saiba que uma delas é falsa, sendo que essa moeda falsa é mais leve que as outras. Usando uma balança de braços, quantas pesagens você precisa fazer para localizar a moeda falsa?

O problema acima, cuja resposta é duas pesagens, tem sido generalizado em várias direções. Por exemplo, qual a resposta ao problema se

1. tivermos n moedas ao invés de 9?
2. tivermos mais de uma moeda falsa?
3. usarmos balança de molas ao invés da balança de braços?
4. quisermos determinar o número médio de pesagens ao invés do pior caso?

É claro que combinando as variações dos problemas acima, um sem número de problemas podem ser formulados.

2 Motivações

Os problemas se enquadram dentro de uma área da ciência da computação chamada Problemas Combinatórios de Busca.

Suponha que um médico está tentando diagnosticar uma única doença de um paciente dentre várias possíveis doenças. Como minimizar o número de passos (exames) necessários para tal finalidade?

Como exemplificado acima, o tema estudado pode ter aplicações práticas por si só. Entretanto, o estudo desses problemas servem como motivação para se introduzir outras áreas em Ciência da Computação.

Para se determinar quantas pesagens precisam ser feitas no pior caso, são usados os mesmos métodos encontrados para se justificar limitantes inferiores no estudo de complexidade de algoritmos. Por exemplo, para certas variantes do problema das moedas falsas, o mesmo método de se provar que a complexidade de se ordenar n números no modelo de comparações é $\Omega(n \log n)$ é usado.

Outra área que pode ser motivada através dos problemas das moedas é o de busca em grafos [Aig88]. Vários problemas em grafos podem ser vistos como problemas de busca: procura-se uma certa estrutura num grafo: um emparelhamento, um circuito hamiltoniano, uma certa partição dos vértices, etc.

As versões do problema nas quais se quer determinar o número médio de pesagens introduz uma área que tem sido bastante estudada recentemente, a área de métodos probabilísticos em combinatória e em teoria da computação.

3 Trabalho atual

Atualmente, estamos estudando uma classe de algoritmos chamados de *competitivos*. Suponha que $M(n, d)$ denota o número mínimo de pesagens que garantem a identificação de d moedas falsas num conjunto de n moedas, sendo d conhecido e $M(n : d)$ denota o mesmo exceto que d é desconhecido. Seja $M_G(n : d)$ o número de pesagens feitas por um algoritmo para a identificação das moedas. Então, se

$$M_G(n : d) \leq cM(n : d) + b,$$

com b e c constantes, chamamos o algoritmo de *competitivo*, e c de sua *constante de competitividade*. Para obtenção de limitantes inferiores, usamos como ferramenta *árvores de decisão*. Por exemplo, para o problema onde d é conhecido, sabemos que o número de folhas em uma *árvore de pesagem* (uma árvore ternária de decisão) deve ser pelo menos $\binom{n}{d}$ e portanto a altura mínima da árvore é $\log_3 \binom{n}{d}$. Os limitantes superiores são obtidos através da análise de algoritmos para a resolução dos problemas.

Implementamos um algoritmo, proposto por Hu, Chen e Hwang [HCH94], com taxa de competitividade $2 \log_2 3$. Estamos estudando variações desse algoritmo, com o objetivo de melhorar sua taxa de competitividade.

Referências

[Aig88] Martin Aigner, *Combinatorial Search*, John Wiley and B. G. Teubner, New York, NY, USA and Stuttgart, Germany, 1988, Prepared with LaTeX.

[HCH94] X.D. Hu, P.D. Chen, and F.K. Hwang, *A new competitive algorithm for the counterfeit coin problem*, Information Processing Letters **51** (1994), 213–218.