Derivações em álgebra de Bernstein de ordem n

H. Guzzo Jr, P. Vicente*

1 Preliminares

Todas as álgebras consideradas neste trabalho são comutativas, não necessariamente associativas e de dimensão finita sobre um corpo K de característica distinta de dois.

Seja A uma álgebra sobre o corpo K. Para álgebras não necessariamente associativas, há muitas maneiras de definir potências de um elemento. Neste trabalho, usaremos 2 tipos de potências, definidas a seguir, por recorrência:

a) $u^1 = u, \quad u^{k+1} = u^k u$ (potências principais);
b) $u^{[1]} = u, \quad u^{[k+1]} = u^{[k]}u^{[k]}$ (potênciasplenas).

Se $\omega \colon A \longrightarrow K$ é um homomorfismo não nulo de álgebras, então o par ordenado (A, ω) é chamado de álgebra bárica sobre K e ω é a sua função peso. Para $x \in A$, $\omega(x)$ é chamado o peso de x. O conjunto $N = \{x \in A \mid \omega(x) = 0\}$ é um ideal de A de codimensão 1. Se $e \in A$ tem peso 1 e $e^2 = e$, então e é chamado de idempotente de A e $\Im(A)$ o conjunto de todos os idempotentes de A.

Uma *álgebra de Bernstein de ordem n* é uma álgebra bárica (A, ω) satisfazendo:

$$x^{[n+2]} = (\omega(x))^{2^n} x^{[n+1]},$$

para todo $x \in A$ e n é o menor número natural que verifica esta propriedade. As álgebras de Bernstein de ordem 1 são conhecidas como álgebras de Bernstein.

Mais resultados sobre álgebras de Bernteisn de ordem n podem ser encontrados em [4], [6], [8] e [11].

Proposição 1. *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein de ordem n. Então:*

1. *A função peso é única;*
2. $\Im(A) = \{x^{[n+1]} \mid x \in A \ \text{ e } \omega(x) = 1\}$.
3. *Se $e \in A$ é um idempotente, então A tem uma decomposição de Peirce, $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$, onde $U_e = \{x \in A \mid ex = \frac{1}{2}x\}$, $Z_e = \{x \in A \mid L_e^n(x) = 0\}$ e $L_e(x) = ex$. Além disso $L_e^n(x) \in U_e$ para todo $x \in N$ e $L_e(z) \in Z_e$ para todo $z \in Z_e$.*
4. *$U_e^2 \subseteq Z_e$, $\dim U_e$ (conseqüentemente $\dim Z_e$) não depende da escolha do idempotente, com isso podemos definir o tipo da álgebra A como sendo o par ordenado $(1 + r, d)$, onde $r = \dim U_e$ e $d = \dim Z_e$.*

*Parcialmente financiado por DGES PB97-1291-C03-01.

2 Derivações

Neste parágrafo, vamos dar uma caracterização para as derivações em álgebras de Bernstein de ordem n semelhante ao que foi feito por M. A. Garcia Muñiz em [1] para as álgebras de Bernstein.

Definição 2. *Uma derivação D de uma álgebra A é uma aplicação linear $D: A \longrightarrow A$ que verifica $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ para todo $x, y \in A$.*

Definição 3. *Seja A uma álgebra comutativa e $e \in A$ um idempotente. Definimos*

$$G_e: A \times A \longrightarrow A \text{ por } G_e(a,b) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i-1} L_e^{n-1-i}\left(L_e^i(a) L_e^i(b)\right).$$

Por [4] temos que, $G_e(a,b) = G_{n,2,e}(a,b)$ para todo $a, b \in N$. Claramente G_e é uma aplicação bilinear simétrica.

Definição 4. *Seja V uma espaço vetorial e T e um operador linear de V. Definimos $C_j = \ker T^j$, $j \geq 0$, onde T^0 é o operador linear identidade de A. Quando A uma álgebra e $e \in A$ é um idempotente, definimos $C_{je} = \ker L_e^j$, $j \geq 0$.*

Proposição 5. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$ uma álgebra de Bernstein de ordem n.*

1. *Se $D: A \longrightarrow A$ é uma derivação, então*

   (a) $D(e) \in U_e$

   (b) $D(A) \subseteq Ker\omega$.

2. *Se $x \in A$ e L_x é uma derivação, então $x \in U_e \oplus C_{1e}$.*

Teorema 6. *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein de ordem n, $e \in A$ um idempotente e $D: A \longrightarrow A$ uma derivação. Então D é univocamente determinada por uma tripla $(\tilde{u}, f, g)$ onde $\tilde{u} = D(e), f: U_e \longrightarrow U_e$, $g: Z_e \longrightarrow Z_e$ são aplicações lineares verificando as seguintes condições para todo $u, u' \in U_e$ e $z, z' \in Z_e$:*

$$D(u) = f(u) + 2^{n+1} G_e(D(e), u); \tag{1}$$

$$D(z) = g(z) - 2^{n+1} G_e(D(e), z); \tag{2}$$

1. $g(uu') = f(u)u' + uf(u') + 2^{n+1}\left[G_e(D(e), u)u' + uG_e(D(e), u') + G_e(D(e), uu')\right];$

2. $2^n f\left(L_e^n(uz)\right) + g\left(uz - 2^n L_e^n(uz)\right) = f(u)z + ug(z) +$
   $2^{n+1}\left[G_e(D(e), u)z - uG_e(D(e), z) + G_e(D(e), uz) - 2^{n+1} G_e(D(e), L_e^n(uz))\right];$

3. $2^n f\left(L_e^n(zz')\right) + g\left(zz' - 2^n L_e^n(zz')\right) = g(z)z' + zg(z') -$
   $2^{n+1}\left[G_e(D(e), z)z' + zG_e(D(e), z') - G_e(D(e), zz') + 2^{n+1} G_e(D(e), L_e^n(zz'))\right];$

4. $g(ez) = eg(z) + D(e)z - 2^n L_e^n\left(D(e)z\right).$

Além disso, a aplicação $\varphi: Der(A) \longrightarrow U_e \times End_K(U_e) \times End_K(Z_e)$ definida por $\varphi(D) = (\tilde{u}, f, g)$ é um monomorfismo de espaços vetoriais, onde $Der(A)$ é o conjunto das derivações de A.

3 Dimensão do espaço vetorial das derivações

Neste parágrafo vamos dar algumas majorações para a dimensão do espaço vetorial das derivações de uma álgebra de Bernstein de ordem n.

Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$ uma álgebra de Bernstein de ordem n de tipo $(1+r, d)$. Como $r^2 = \dim End_K(U_e)$ e $d^2 = \dim End_K(Z_e)$, então $\dim Der(A) \leq r + r^2 + d^2$.

É conhecido que se $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$ é uma álgebra de Bernstein trivial, então $\dim Der(A) = r + r^2 + d^2$ (ver [1] e [13]).

Proposição 7. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$ uma álgebra de Bernstein de ordem n. Então, $\dim Der(A) = r + r^2 + d^2$ se e somente se $(Ker\omega)^2 = 0$ e $eZ_e = 0$.*

Neste caso (A, ω) é uma álgebra de Bernstein $(n = 1)$.

Corolário 8. *Se $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$ é uma álgebra de Berntein de ordem n com $n \geq 2$, então $\dim Der(A) < r + r^2 + d^2$.*

Teorema 9. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$ uma álgebra de Bernstein de ordem n. Suponhamos que existe m, com $1 < m \leq n$ tal que $C_{me} = Z_e$ e $L_e^{m-1}(Z_e) \neq 0$. Seja $d_k = \dim L_e^{m-k}(Z_e)$, $0 \leq k \leq m, s_1 = \dim C_{1e}$ e $r = \dim U_e$. Então*

$$\dim Der(A) \leq r + r^2 + \sum_{k=1}^{m-1} (d_k + (m-k)s_1)s'_k + (s_1 - d_{m-1} + d_{m-2})s_1,$$

onde $s'_k = \begin{cases} d_1 & if \quad k = 1; \\ d_k - 2d_{k-1} + d_{k-2} & if \quad 2 \leq k \leq m. \end{cases}$

Além disso, o máximo é atingido se e somente se $(Ker\omega)^2 = 0$.

Corolário 10. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$ uma álgebra de Bernstein de ordem n. Suponhamos que existe m, com $1 < m \leq n$ tal que $C_{me} = Z_e$ e $L_e^{m-1}(Z_e) \neq 0$. Seja $d_k = \dim L_e^{m-k}(Z_e)$, $0 \leq k \leq m, s_1 = \dim C_{1e}$ e $r = \dim U_e$. Se*

$$\dim Der(A) = r + r^2 + \sum_{k=1}^{m-1} (d_k + (m-k)s_1)s'_k + (s_1 - d_{m-1} + d_{m-2})s_1,$$

onde $s'_k = \begin{cases} d_1 & if \quad k = 1; \\ d_k - 2d_{k-1} + d_{k-2} & if \quad 2 \leq k \leq m. \end{cases}$

então, $m = n$.

Corolário 11. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$ uma álgebra de Bernstein de ordem n tal que $U_eZ_e = 0 = Z_e^2$. Então $Der(A) \neq 0$.*

Proposição 12. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$ uma álgebra de Bernstein de ordem n tal que $U_eZ_e = 0 = U_e^2$. Se $U_e \neq 0$, então $Der(A) \neq 0$.*

Proposição 13. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus Z_e$ uma álgebra de Bernstein de ordem n de tipo $(1+r, d)$ tal que $U_e = eZ_e = 0$ e para algum k, $Z_e^k = 0$ e $Z_e^{k-1} \neq 0$. Então $\dim Der(A) \geq (d - \dim Z_e^2)\dim Z_e^{k-1} \neq 0$.*

Referências

[1] Garcia Muñiz, M.A , Derivaciones en álgebras de Bernstein de orden 2, Ph.D. thesis, *University of Oviedo*, Spain (1998).

[2] Garcia Muñiz, M.A , *Derivations in second order Bernstein algebras*, Nonassociative algebra and its applications, Lecture notes in pure and applied mathematics, vol 211: 105-124 (2000).

[3] S. González, J.C. Gutiérrez and C. Martínez, On Bernstein algebras of n^{th}-order, presented at *Third International Conference on Non-associative Algebra and Its Applications*, Oviedo, Spain (1993).

[4] González, S., Guzzo Jr., H. and Vicente, P.: *Special classes of n^{th}-order Bernstein algebras*, International Journal of Mathematics, Game Theory, and Algebra (to appear).

[5] S. González, C. Martínez and P. Vicente, Power-Associative and Jordan 2^{nd}-order Bernstein algebras, *Nova Journal of Algebra and Geometry*, Vol. 2, No. 4, (1993) 367-381.

[6] J.C. Gutiérrez, Clasificación de Algebras de Bernstein en función del tipo y la dimensión, Ph.D. thesis, *University of Oviedo*, Spain (1995).

[7] A. Labra, C. Mallol and A. Suazo, A characterization of Power-Associative Bernstein algebras of order 2, *Nova Journal of Algebra and Geometry*, Vol. 3, No. 1, (1994) 83-96.

[8] C. Mallol, A propos del algèbres de Bernstein Ph.D. Thesis, *Université des Sciencies et Techniques du Languedoc, Montpellier* II (1989).

[9] C. Mallol et A. Micali, Sur les algèbres de Bernstein III, *Bull. London Math. Soc.*

[10] M. Ouattara, Sur les algèbres de Bernstein d'ordre 2, *Linear Algebra and its Applications*, (1991) 144:29-38.

[11] D.A. Towers and K. Bowman: *On power asociative Bernstein algebras of arbitrary order*, Algebras, Groups and Geometries **13**, 295-322 (1996).

[12] S. Walcher, Bernstein's algebras which are Jordan algebras, *Arch. Math.*, 50, (1988) 218-222.

[13] Wörz, A.: *Algebras in Genetic* (Lecture Notes in Biomathematics **36**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1980).

H. Guzzo Jr
Departamento de Matemática
IME-USP, Cx. P. 66281
05315-970-São Paulo, Brasil
`guzzo@ime.usp.br`

P. Vicente
Universidad de León
Departamento de Matemática
24071-León, España
`demmvm@unileon.es`