

**Título em Português:** Introdução aos fenômenos não-lineares e sólitons

**Título em Inglês:** Introduction to non-linear phenomena

**Autor:** Yves Lean Nery Carvalho

**Instituição:** Universidade de São Paulo

**Unidade:** Instituto de Física de São Carlos

**Orientador:** Luiz Agostinho Ferreira

**Área de Pesquisa /**  
**SubÁrea:** Física das Partículas Elementares e Campos

**Agência Financiadora:** USP - Programa Unificado de Bolsas

## Introdução aos fenômenos não-lineares e sólitons

Yves Lean Nery Carvalho

Luiz Agostinho Ferreira

Universidade de São Paulo

yveslnc@usp.br

### Objetivos

O objetivo deste projeto de pesquisa se resume em apresentar ao estudante os conceitos e técnicas pertinentes ao estudo de sólitons e de certos aspectos iniciais de teoria de campos, criando uma base sólida para que o aluno possa aprofundar os estudos na área. Os tópicos a serem abordados foram divididos em: Introdução geral a teoria dos sólitons; A equação de KdV (Korteweg - De Vries) e construção de soluções soliton; Introdução a aspectos gerais da teoria de campos; O problema de FPU (Fermi-Pasta-Ulam); A equação de curvatura nula como uma lei de conservação.

### Métodos e Procedimentos

A abordagem utilizada para os estudos consistiu no uso de uma apostila de autoria do próprio professor-orientador, Luiz Agostinho Ferreira, e livros didáticos para o estudo de conceitos paralelos necessários para o desenvolvimento do projeto. O progresso feito foi, então, relatado através de reuniões com o orientador. Ademais, para o estudo do problema de FPU, foi estipulada a confecção de um programa que simulasse as hipóteses dos autores, comparando o resultado com o obtido pela publicação original [1]. Como forma de aprofundamento dos estudos, o estudante foi apresentado a três artigos publicados da área [2] [3] [4].

### Resultados

Os sólitons foram inicialmente descobertos por John Scott Russel em agosto de 1834. Os sólitons, inicialmente conhecidos como ondas solitárias, se propagavam com velocidade constante, sem alterar a forma e sem dissipar energia. Em 1895, os físicos Korteweg e De Vries publicaram um estudo teórico de uma equação de onda (1) que tinha como solução os sólitons de Russel (2). A existência de uma solução do tipo sóliton indica um elevado grau de simetria do sistema.

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + 6\mu \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial^3 \mu}{\partial x^3} = 0 \quad (1)$$

$$\mu(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right) \quad (2)$$

Após isso, em 1940, o problema de FPU propunha uma rede de massas ligadas por molas com extremos fixos cuja força apresentava termos de ordens não lineares:

$$F(\Delta) = -K(\Delta + \alpha \Delta^2) \quad (3)$$

A solução esperada configurava um comportamento ergódico. Porém, o observado (figura 1) foi que apenas os modos mais baixos eram excitados e depois a configuração inicial se repetia, aproximadamente. Isso indicava a existência de quantidades conservadas, que por sua vez, indica a existência de simetrias. Em 1967, Morikazu Toda estudou uma rede com potencial semelhante ao de FPU, mas desta vez com solução exata (sóliton). A partir dessa rede, encontramos uma relação entre sóltons e quantidades conservadas: a equação de curvatura nula (4).

$$F_{\mu\nu} = [\partial_\mu + A_\mu, \partial_\nu + A_\nu] = 0 \quad (4)$$

Em comparação com a figura 1, a figura 2 demonstra o resultado obtido pelo estudante ao simular o problema de FPU numericamente. O código foi feito utilizando-se o Python.

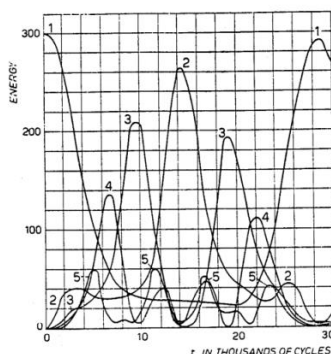


Figura 1: Resultado obtido na publicação original.

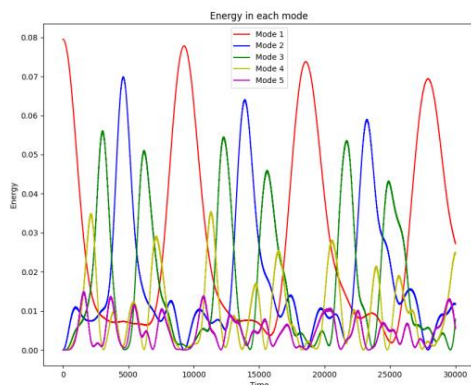


Figura 2: Resultado obtido pelo estudante.

## Conclusões

Os sóltons surgiram primeiramente na hidrodinâmica, como soluções especiais de uma equação diferencial não-linear para descrever ondas em águas rasas. Seu comportamento, um precioso presente da Natureza, abriu janelas para explorar muitos aspectos de fenômenos não lineares e, hoje, os sóltons encontram aplicações em muitas outras áreas da ciência, como matéria condensada, física de partículas e nuclear, e em aplicações tecnológicas, como as fibras óticas.

## Agradecimentos

Agradeço o professor Luiz Agostinho Ferreira pela dedicação e paciência ofertada em sua orientação durante o projeto.

## Referências

- [1] E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam and M. Tsingou, Los Alamos preprint LA-1940, Studies of nonlinear problems I (1955).
- [2] T. Hollowood, Nuclear Physics B 384 (1992) 523—540, Solitons in affine Toda field theories.
- [3] C.P. Constantinidis, L.A. Ferreira, J.F. Gomes and A.H. Zimerman, Physics Letters B 298 (1993) 88-94, Connection between the affine and conformal affine Toda models and their Hirota solution.
- [4] H. Aratyn, C.P. Constantinidis, L.A. Ferreira, J.F. Gomes and A.H. Zimerman, Nuclear Physics B406 (1993) IFS] 727—770, Hirota's solitons in the affine and the conformal affine Toda models.

## Introduction to non-linear phenomena

Yves Lean Nery Carvalho

Luiz Agostinho Ferreira

University of São Paulo

yveslnc@usp.br

### Objectives

The objective of this research project is to introduce the student to the concepts and techniques related to the study of solitons and some initial aspects of field theory, creating a solid foundation for the student to deepen their studies in the field. The topics to be covered are divided as follows: General introduction to soliton theory; Introduction to the KdV (Korteweg - De Vries) equation and construction of soliton solutions; Introduction to general aspects of field theory; The FPU (Fermi-Pasta-Ulam) problem; The zero-curvature equation as a conservation law.

### Materials and Methods

The approach used for the studies involved using a booklet authored by the advisor, Luiz Agostinho Ferreira, and textbooks to study parallel concepts necessary for the development of the project. The progress made was then reported through meetings with the advisor. Furthermore, for the study of the FPU problem, the creation of a program that simulated the authors' hypotheses was suggested, comparing the result with the original publication [1]. As a way of deepening the studies, the student was introduced to three published articles in the field [2][3][4].

### Results

Solitons were initially discovered by John Scott Russel in August 1834. Solitons, initially known as solitary waves, propagated at a constant speed without changing shape and without dissipating energy. In 1895, physicists Korteweg and De Vries published a theoretical study of a wave equation (1) that had Russel's solitons as a solution (2). The existence of a soliton-type solution indicates a high degree of symmetry in the system.

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + 6\mu \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial^3 \mu}{\partial x^3} = 0 \quad (1)$$

$$\mu(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right) \quad (2)$$

Later, in 1940, the FPU problem proposed a network of masses connected by springs with fixed ends, where the force had terms of non-linear orders:

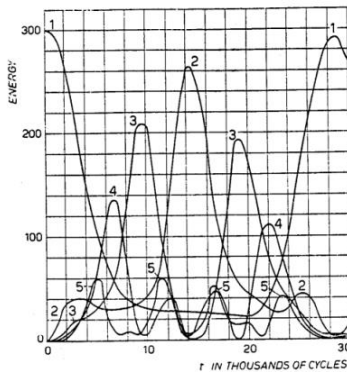
$$F(\Delta) = -K(\Delta + \alpha \Delta^2) \quad (3)$$

The expected solution showed ergodic behaviour. However, the observed result (figure 1) was that only the lower modes were excited, and then the initial configuration repeated

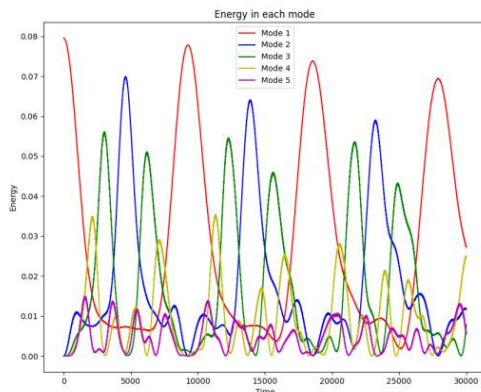
approximately. This indicated the existence of conserved quantities, which, in turn, suggested the existence of symmetries. In 1967, Morikazu Toda studied a network with a potential like FPU's, but this time with an exact solution (soliton). From this network, we found a relationship between solitons and conserved quantities: the zero-curvature equation (4).

$$F_{\mu\nu} = [\partial_\mu + A_\mu, \partial_\nu + A_\nu] = 0 \quad (4)$$

Compared to figure 1, figure 2 shows the result obtained by the student when simulating the FPU problem numerically. The code was written using Python.



Picture 1: Result obtained in the original publication.



Picture 2: Result obtained by the student

## Conclusions

Solitons first emerged in hydrodynamics as special solutions to a non-linear differential equation describing waves in shallow water. Their behaviour, a precious gift from Nature, has opened windows to explore many aspects of non-linear phenomena. Today, solitons find applications in many other areas of science, such as condensed matter, particle and nuclear physics, and in technological applications such as optical fibers.

## Acknowledgements

I thank Professor Luiz Agostinho Ferreira for his dedication and patience in guiding me during the project.

## References

- [1] E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam and M. Tsingou, Los Alamos preprint LA-1940, Studies of nonlinear problems I (1955).
- [2] T. Hollowood, Nuclear Physics B 384 (1992) 523—540, Solitons in affine Toda field theories.
- [3] C.P. Constantinidis, L.A. Ferreira, J.F. Gomes and A.H. Zimerman, Physics Letters B 298 (1993) 88-94, Connection between the affine and conformal affine Toda models and their Hirota solution.
- [4] H. Aratyn, C.P. Constantinidis, L.A. Ferreira, J.F. Gomes and A.H. Zimerman, Nuclear Physics B406 (1993) IFS] 727—770, Hirota's solitons in the affine and the conformal affine Toda models.