



Anais do XIII ENAMA

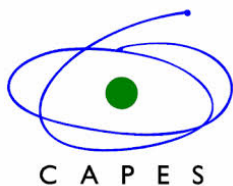
Comissão Organizadora

Joel Santos Souza - UFSC
Ruy Coimbra Charão - UFSC
Mário Roldán - UFSC
Cleverson da Luz - UFSC
Jocemar Chagas - UEPG
Haroldo Clark - UFDP

Home web: <http://www.enama.org/>

Realização: Departamento de Matemática da UFSC

Apoio:



$C(K)$ COM MUITOS QUOCIENTES INDECOMPONÍVEIS

ROGÉRIO A. S. FAJARDO¹ & ALIRIO G. GÓMEZ²

¹Instituto de Matemática e Estatística, USP, SP, Brasil, fajardo@ime.usp.br,

²Instituto de Matemática e Estatística, USP, SP, Brasil, gomezgomezalirio@gmail.com

O primeiro autor teve apoio financeiro da FAPESP (projeto temático 2016/25574-8 e auxílio regular 2018/10254-3) e o segundo, bolsa de doutorado da CAPES.

Abstract

Assumindo o Axioma $\diamond$, mostramos a existência de um espaço de Banach da forma $C(K)$ que contém 2^ω quocientes indecomponíveis não isomorfos e também l_∞ como quociente.

1 Introdução

Para K um espaço topológico compacto e Hausdorff, seja $C(K)$ o espaço de Banach real das funções contínuas de K em $\mathbb{R}$ munido da norma do supremo. Um operador $T : C(K) \rightarrow C(K)$ linear e contínuo é dito *multiplicador fraco* se, para toda sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ limitada e duas a duas disjunta (i.e., $f_n \cdot f_m = 0$, se $n \neq m$) em $C(K)$ e para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos distintos em K tal que $f_n(x_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência $T(f_n)(x_n)$ converge a 0.

Dizemos que $C(K)$ *tem poucos operadores* se todo operador em $C(K)$ é multiplicador fraco. Foi provado em [4] que se $K \setminus F$ é conexo, para todo F finito, e $C(K)$ tem poucos operadores, então $C(K)$ é *indecomponível*, i.e., tem dimensão infinita e não possui subespaço complementado de dimensão e codimensão infinita. Se, além disso, K não contém dois abertos disjuntos V_1 e V_2 tais que $|\overline{V_1} \cap \overline{V_2}| = 1$, a hipótese da conexidade de K é suficiente para garantir que $C(K)$ é indecomponível (consequência de resultados de [4] e [1]).

Apresentamos aqui o seguinte resultado: assumindo $\diamond$, existem $C(K)$ indecomponível e uma família $(L_\xi)_{\xi < 2^\omega}$ de subespaços fechados de K tais que $(C(L_\xi))_{\xi < 2^\omega}$ são indecomponíveis e dois a dois não isomorfos. Além disso, K contém uma cópia homeomórfica de $\beta\mathbb{N}$, o que diferencia a construção daquela obtida no Corolário 5.4 de [2].

2 Principais resultados

Para um compacto conexo $K \subset [0, 1]^{2^\omega}$ e um real $r \in]0, 1]$ denotaremos por K_r o conjunto $\overline{\{x \in K : x(0) < r\}}$, visto como subespaço topológico de K . Provamos o seguinte teorema:

Teorema 2.1. ($\diamond$) *Existe um compacto $K \subset [0, 1]^{2^\omega}$ tal que, para todo $L \in \{K\} \cup \{K_r : r \in]0, 1]\}$, temos*

- (a) *L é conexo e não contém abertos disjuntos V_1 e V_2 tais que $|\overline{V_1} \cap \overline{V_2}| = 1$;*
- (b) *todo operador em $C(L)$ é multiplicador fraco;*
- (c) *se $0 < r < s \leq 1$, $C(K_r)$ não é isomorfo a $C(K_s)$;*
- (d) *K contém um subespaço homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$.*

Do teorema e dos resultados mencionados na introdução segue o seguinte corolário:

Corolário 2.1. ($\diamond$) *Sendo K como no Teorema 2.1, $C(K)$ é indecomponível, possui l_∞ como quociente e uma família não enumerável de quocientes indecomponíveis não isomorfos.*

3 Ideia da demonstração

Descreveremos aqui apenas as ideias principais da prova, que se baseiam em [4] e [2].

Se $T : C(K) \longrightarrow C(K)$ não é multiplicador fraco, existem $\varepsilon > 0$, uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C(K)$ limitada e duas a duas disjuntas e uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos distintos de K tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x_n) = 0$ e $|T(f_n)(x_n)| > \varepsilon$. Usando argumentos combinatórios, podemos assumir que cada f_n tem imagem contida em $[0, 1]$ e que $f_n(x_m) = 0$, para todos $m, n \in \mathbb{N}$. Assumimos, ainda, que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pertencem a um conjunto denso fixado.

Construímos K de modo a não ser possível obtermos T com essa propriedade. Para isso, mostramos que, nas condições acima, obtemos funções $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que são “pequenas modificações” de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (em relação à medidas $T^*(\delta_{x_n})$) e um subconjunto infinito e co-infinito b de $\mathbb{N}$ tais que $(f'_n)_{n \in b}$ tem supremo em $C(K)$ e $\overline{\{x_n : n \in b\}} \cap \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N} \setminus b\}} \neq \emptyset$. A partir disso provamos a descontinuidade de $T(f)$, onde $f = \sup\{f'_n : n \in b\}$. O mesmo argumento se aplica aos subespaços de K que são fechos de abertos (vide [3]).

Fazemos a construção de K usando recursão transfinita. Começamos com $K_2 = [0, 1]^2$ e definimos uma sequência $(K_\alpha)_{\alpha \leq 2^\omega}$ de compactos tais que $K_\alpha \subset [0, 1]^\alpha$ e $\pi_\beta[K_\alpha] = K_\beta$, para $\beta < \alpha$. Nos ordinais limites definimos K_α como o limite inverso de $(K_\beta)_{\beta < \alpha}$ e tomamos K como K_{2^ω} .

A chave da construção está no passo sucessor da definição recursiva. Em cada passo α “destruímos” um operador não multiplicador fraco ao adicionar o supremo de $(f'_n)_{n \in b}$ descrito acima. Para isso, a partir de uma enumeração pré-fixada, que estabelecemos utilizando o princípio $\diamond$, encontramos $b \subset \mathbb{N}$ e uma sequência $(g_n)_{n \in b}$ de funções contínuas duas a duas disjuntas de K_α em $[0, 1]$ e definimos

$$K_{\alpha+1} = \overline{\{(x, \sum_{n \in b} g_n(x)) : \exists U \in \tau_{K_\alpha} (x \in U \wedge |\{n \in b : U \cap \text{supp}(g_n) \neq \emptyset\}| < \omega)\}}, \quad (1)$$

onde o fecho está sendo tomado em $K_\alpha \times [0, 1]$, τ_{K_α} é o conjunto de abertos de K_α e $\text{supp}(g_n)$ é o suporte de g_n , i.e., o fecho do conjunto dos pontos onde a função é não nula.

Seguindo a nomenclatura de Koszmider, em [4], o espaço definido em 1 é chamado de *extensão de K_α por $(g_n)_{n \in b}$* . A função $g : K_{\alpha+1} \subset K_\alpha \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ dada por $g(x, t) = t$ é o supremo de $(g_n \circ \pi_{\alpha, \alpha+1})_{n \in b}$ em $K_{\alpha+1}$. A construção irá garantir que, se $f'_n = g_n \circ \pi_{\alpha, 2^\omega}$, em $C(K)$, então $g \circ \pi_{\alpha+1, 2^\omega}$ é o supremo de $(f'_n)_{n \in b}$ em $C(K)$.

Para garantir a conexidade de K e de cada K_r , precisamos de uma hipótese adicional sobre a extensão, a qual acunhamos de *extensão completa*: para cada ponto $x \in K_\alpha$, $\pi_{\alpha, \alpha+1}[\{x\}]$ ou é unitário ou igual a $\{x\} \times [0, 1]$. As modificações das f_n 's mencionadas anteriormente servem justamente garantir que a extensão pelas funções correspondentes no passo α da construção seja completa.

References

- [1] FAJARDO, R. A. - An indecomposable Banach space of continuous functions which has small density. *Fundamenta Mathematicae*, **202** (1), 43 - 63, 2009.
- [2] FAJARDO, R. A. - Quotients of indecomposable Banach spaces of continuous functions. *Studia Mathematica*, **212** (3), 259-283, 2012.
- [3] FAJARDO, R.A., GÓMEZ, A. G. AND PELLEGRINI, L.R. - Decompositions of Banach spaces $C(K)$ with few operators. *Sao Paulo Journal of Mathematical Science*, **13** (1), 305-319, 2018.
- [4] KOSZMIDER, P. - Banach spaces of continuous functions with few operators. *Mathematische Annalen*, **300**, 151-183, 2004.