

TEMAS ESTRUTURAIS

Tese apresentada à d.ª
Congregação da Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo, por
José Carlos de Figueiredo Ferraz,
para o concurso da cátedra de
" PONTES E ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS "

São Paulo

1968

INTRODUÇÃO

São aqui reunidos alguns trabalhos, resultados de soluções dadas a problemas que se nos apresentaram na vida profissional; e que, acreditamos, contêm aspectos originais.

O título - Temas Estruturais - traduz exatamente aquelas características que pretendemos imprimir à nossa Tese, onde, sem a extensão de um tratado, os assuntos são abordados na medida em que as soluções ofereçam cunho de originalidade e, sobretudo, de simplicidade.

* * * * *

G R E L H A S E S C O N S A S

N'um trabalho anterior⁽¹⁾ introduzimos os polinômios trigonométricos no cálculo das grelhas, apresentando-as como um poderoso instrumento matemático para a solução de problemas, até então resolvidos de maneira extremamente complicada e trabalhosa. E chegamos mesmo a explorar a grande contribuição da torção das longarinas na distribuição transversal da carga, usando algoritmo simples e rápido.

Posteriormente⁽²⁾ voltamos ao assunto para demonstrar, desta feita, ser possível, sem prejuízo da simplicidade do método dos polinômios trigonométricos, introduzir também a colaboração da torção das transversinas.

Retornamos agora ao problema para estudar as implicações resultantes da esconsidade, levando o estudo ao caso apenas das grelhas com duas longarinas, que apresentam um interesse particularmente importante. E isto porque - como se poderá facilmente constatar, através dos resultados numéricos - a contribuição da torção é tão grande que não justificaria, para as pontes com as larguras correntes, adoção de número de longarinas superior a dois.

I. Equações de diferenças

Na suposição de uma viga livremente apoiada, sujeita a cargas concentradas atuando em pontos equidistantes, pode-se escrever:

$$M_{x+1} - 2 M_x + M_{x-1} = - P_x \cdot \lambda \quad (1)$$

onde M_x é o momento fletor na seção de ordem x ; P_x a carga agindo em x e λ o intervalo.

Já entre as flechas δ_x nos pontos x e os respectivos momentos existe a relação:

$$\delta_{x+1} - 2\delta_x + \delta_{x-1} = -\frac{\lambda^2}{6EJ} (M_{x+1} + 4M_x + M_{x-1}) \quad (2)$$

Se a viga for solicitada por momentos discretos T_x a intervalos iguais λ , à maneira da figura 1, poder-se-á encontrar uma relação aproximada simples, ligando as flechas aos momentos T_x .

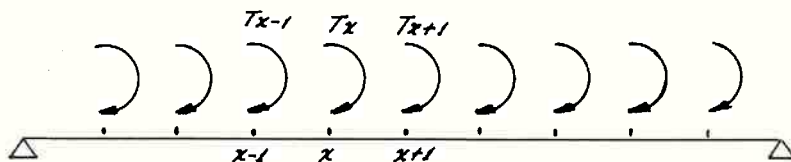


Figura 1

O diagrama de momentos fletores implantado terá aspecto de dente de serra. Na figura 2 está representado um trecho do mesmo.

Definamos os momentos:

$$M_x^T = M_x + \frac{1}{2} T_x \quad (3)$$

Por outro lado temos:

$$M_x = M_{x-1} - T_x + C \quad (4)$$

sendo C uma constante.

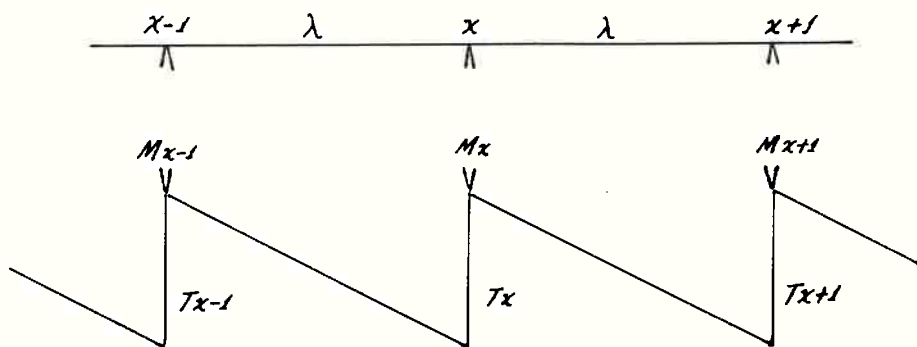


Figura 2

Como consequência:

$$M_{x+1}^T - M_x^T = C - \frac{1}{2} T_{x+1} - \frac{1}{2} T_x$$

$$M_x^T - M_{x-1}^T = C - \frac{1}{2} T_x - \frac{1}{2} T_{x-1}$$

Dai resulta:

$$M_{x+1}^T - 2 M_x^T + M_{x-1}^T = - \frac{1}{2} (T_{x+1} - T_{x-1}) \quad (5)$$

Se o apoio da viga for de forma a impedir a rotação transversal nas extremidades, então podemos escrever:

$$\theta_{x+1} - 2 \theta_x + \theta_{x-1} = \frac{\lambda Z_x}{G J_t} \quad (6)$$

sendo θ_x a rotação da seção de ordem x , resultante da aplicação de momentos de torção externos Z_x , discretamente aplicados a intervalos iguais λ ; e $G J_t$ o produto de rigidez transversal da viga.

II. Estabelecimento do problema

Seja a grelha da figura 3, com esconsidade α , sujeita ao conjunto de cargas P_x aplicadas na viga A.

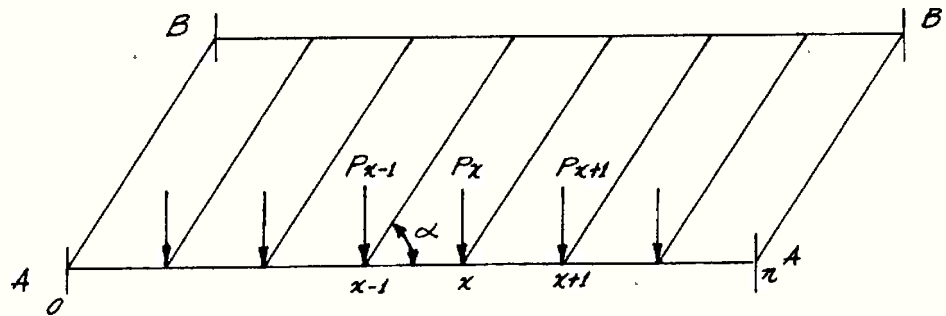


Figura 3

Tal carregamento faz despertar na viga transversal de ordem x momentos Z_x^A , T_x e reações de apoio X , como se representa na figura 4 e na figura 5.

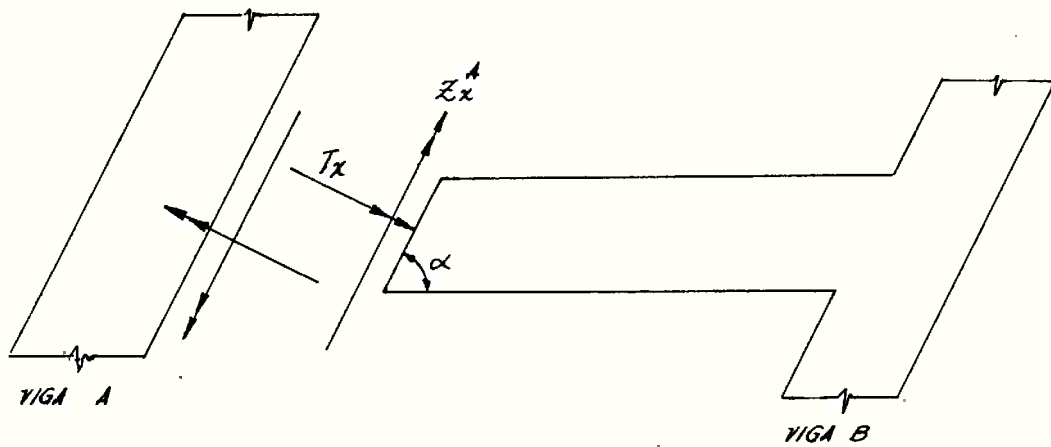


Figura 4

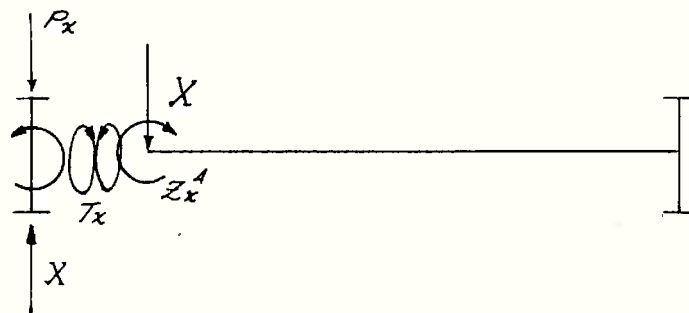


Figura 5

Consideremos os deslocamentos verticais, na altura da viga transversal de ordem x , caracterizados na figura 6.

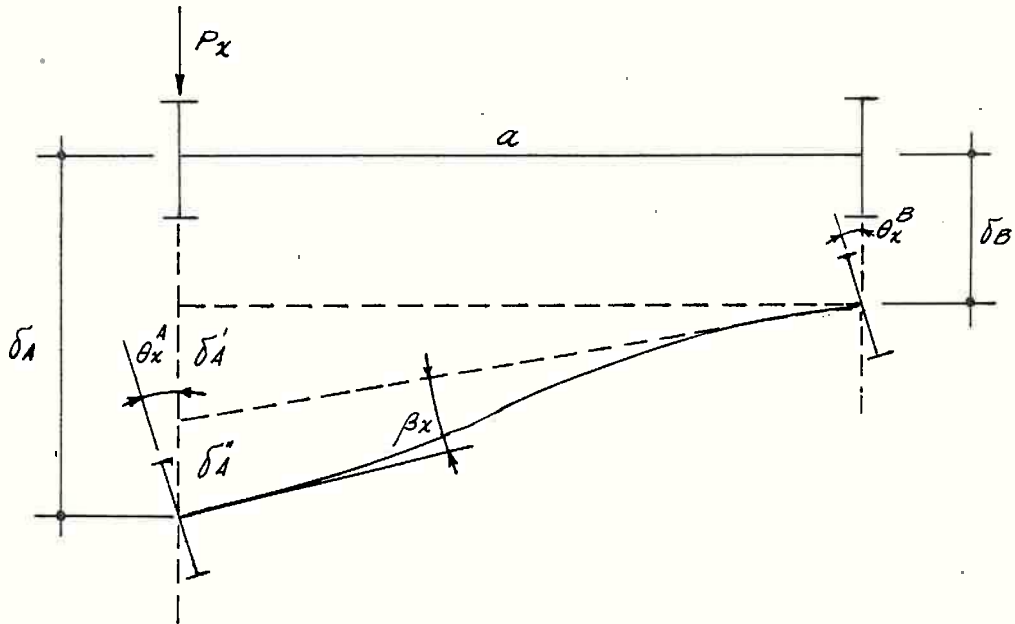


Figura 6

Então:

$$\delta_A = \delta_B + \delta_A' + \delta_A'' \quad (7)$$

onde

$$\delta_A' = a \theta_x^B \sin \alpha \quad (8)$$

$$\delta_A'' = \frac{X a^3}{3 E J_0} - \frac{a}{2 E J_0} (Z_x^A \sin \alpha - T_x \cos \alpha) \quad (9)$$

J_0 é o momento de inércia da transversina, que é suposto constante e igual para tôdas elas.

Se analisarmos as rotações das longarinas, concluímos:

$$(\theta_x^A - \theta_x^B) \sin \alpha = \frac{X a^2}{2 E J_0} - \frac{a}{E J_0} (Z_x^A \sin \alpha - T_x \cos \alpha) \quad (10)$$

As inclinações da linha elástica podem ser expressas aproximadamente por

$$\phi_x \approx \frac{\delta_{x+1} - \delta_{x-1}}{2 \lambda} \quad (11)$$

Relacionando as rotações ϕ_x^A e ϕ_x^B das vigas A e B, tem-se:

$$(\phi_x^A - \phi_x^B) \sin \alpha = \frac{1}{G J_t^0} (Z_x^A \cos \alpha + T_x \cos \alpha), \quad (12)$$

onde $G J_t^0$ é o produto de rigidez transversal da transversa na suposto constante para tôdas.

Por outro lado há a relação:

$$Z_x^B = X.a \sin \alpha - Z_x^A \quad (13)$$

III. Desenvolvimentos trigonométricos

Tendo em conta as condições de contorno em 0 e n, as grandezas abaixo são passíveis dos seguintes desenvolvimentos trigonométricos:

$$\delta_x = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta_i \sin \frac{i \pi x}{n} \quad (14)$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \sin \frac{i \pi x}{n}$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \sin \frac{i \pi x}{n}$$

$$Z_x = \sum_{i=1}^{n-1} z_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

$$T_x = \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

$$P_x = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \dot{x}_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{n}$$

O desenvolvimento de T_x na forma proposta só é possível se $T_0 = T_n = 0$. É o que ocorre quando a resistência à torção das transversinas extremas é nula.

Usando as relações (14) nas equações de diferença (1), (2), (5) e (6), vem:

$$a) \quad \mathcal{M}_i = -\lambda \mu_i p_i \quad (15)$$

com

$$\mu_i = \frac{1}{2 \left(\cos \frac{i \pi}{n} - 1 \right)}$$

$$b) \quad \alpha_i = -\frac{\lambda^2}{6 E J} g_i \mathcal{M}_i \quad (16)$$

com

$$g_i = \frac{\cos \frac{i \pi}{n} + 2}{\cos \frac{i \pi}{n} - 1}$$

$$c) \quad m_i^T = m_i + \frac{1}{2} \tau_i \quad (17)$$

$$d) \quad m_i^T = -s_i \tau_i \quad (18)$$

com

$$s_i = \frac{\cos \frac{i \pi}{n}}{2 \left(\cos \frac{i \pi}{n} - 1 \right)}$$

$$e) \quad v_i = \frac{\lambda \rho_i z_i}{G J_t}$$

com

$$\rho_i = \frac{1}{2 \left(\cos \frac{i \pi}{n} - 1 \right)}$$

e assim

$$\rho_i = \mu_i$$

IV. Determinação das incógnitas hiperestáticas

Para tanto lançamos mão das equações (7), (10) e (12).

De (7) resulta:

$$\begin{aligned} - \frac{\lambda^2}{6 E J} g_i (m_i^o - m_i^X - m_i^T) &= - \frac{\lambda^2}{6 E J} g_i (m_i^X + m_i^T) \\ - \frac{a \lambda}{G J_t^o} \rho_i (a \sin \alpha \cdot x_i - z_i^A) \sin \alpha \\ + \frac{a^3}{3 E J_o} x_i - \frac{a}{2 E J_o} (z_i^A \sin \alpha - T_x \cos \alpha) & \quad (20) \end{aligned}$$

Da equação (10) vem:

Da equação (10) vem:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda \rho_i}{G J_t} (2 z_i^A - a \operatorname{sen} \alpha \cdot x_i) \operatorname{sen} \alpha = \\ = \frac{a}{2 E J_o} x_i - \frac{a}{E J_o} (z_i^A \operatorname{sen} \alpha - \tau_i \operatorname{sen} \alpha) \end{aligned} \quad (21)$$

Da equação (12), levando em conta (11), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2 \lambda} \left[(\delta_{x+1} - \delta_{x-1})_A - (\delta_{x+1} - \delta_{x-1})_B \right] = \\ = \frac{1}{G J_o} (z_x^A \cos \alpha + T_x \operatorname{sen} \alpha) \end{aligned} \quad (22)$$

Mas

$$\begin{aligned} \delta_A = - \frac{\lambda^2}{6 E J} \sum_{i=1}^{n-1} g_i (\mathcal{M}_i^o - \mathcal{M}_i^X - \mathcal{M}_i^T) \operatorname{sen} \frac{1}{n} \pi x \\ \delta_B = - \frac{\lambda^2}{6 E J} \sum_{i=1}^{n-1} g_i (\mathcal{M}_i^X + \mathcal{M}_i^T) \operatorname{sen} \frac{1}{n} \pi x \end{aligned}$$

Voltando a (22), encontramos-:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda g_i}{6 E J} (\mathcal{M}_i^o - 2 \mathcal{M}_i^X - 2 \mathcal{M}_i^T) \cos \frac{1}{2} \pi \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ = - \frac{1}{G J_o} (z_i^A \cos \alpha + \tau_i \operatorname{sen} \alpha) \end{aligned} \quad (23)$$

Como

$$\mathcal{M}_i^X = - \lambda \mu_i x_i$$

e

$$\mathcal{M}_1^T = -s_1 \tau_1$$

as equações (20) e (23) passam respectivamente às seguintes formas:

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda^2}{6 E J} g_1 (\mathcal{M}_1^0 + 2 \lambda \mu_1 x_1 + 2 s_1 \tau_1) &= \\ &= \frac{a \lambda}{G J_t} \rho_1 (a \sin \alpha x_1 - z_1^A) \sin \alpha \\ &+ \frac{a^3}{3 E J_0} x_1 - \frac{a}{2 E J_0} (z_1^A \sin \alpha - T_x \cos \alpha) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda g_1}{6 E J} (\mathcal{M}_1^0 + 2 \lambda \mu_1 x_1 + 2 s_1 \tau_1) \cos \frac{1}{n} \pi \sin \alpha &= \\ &= -\frac{1}{G J_0^t} (z_1^A \cos \alpha + \tau_1 \sin \alpha) \end{aligned} \quad (25)$$

A resolução do sistema das três equações (21), (24) e (25) permite determinar x_1 , z_1^A e τ_1 .

Usando depois as relações (14), ficam conhecidos X , Z_x e T_x para qualquer nó x , resolvendo assim o problema.

V. Caso particular

Se nas equações anteriores fizermos $\alpha = \pi/2$, teremos a solução da grelha reta. E se a relação $n \lambda/a$ for superior a 2, podemos inclusive desprezar a flexão da transversina assumindo $J_0 = \infty$.

Para este caso particular as equações (21), (24) e (25) tomariam o seguinte aspecto:

$$z_i^A = \frac{a}{2} x_i = z_i \quad (21')$$

$$\frac{\lambda}{6 E J} g_i (\mathcal{M}_i^0 + 2 \lambda \mu_i x_i + 2 s_i \tau_i) = \frac{a^2 \rho_i}{2 G J_t} x_i \quad (24')$$

$$\frac{\lambda}{6 E J} g_i (\mathcal{M}_i^0 + 2 \lambda \mu_i x_i + 2 s_i \tau_i) \cos \frac{i \pi}{n} = - \frac{a \tau_i}{G J_t^0} \quad (25')$$

Daí resulta:

$$\tau_i = \frac{J_t^0}{2 J_t} a \rho_i \cos \frac{i \pi}{n} x_i \quad (26)$$

e

$$x_i = - \frac{\mathcal{M}_i^0}{2 \lambda \mu_i - \frac{J_t^0}{J_t} a \rho_i \cos \frac{i \pi}{n} - \frac{3 E J}{G J_t} \frac{a^2 \rho_i}{\lambda g_i}} \quad (27)$$

Se desprezarmos a torção nas transversinas, então $J_t^0 = 0$ e assim

$$x_i = - \frac{\mathcal{M}_i^0}{2 \lambda \mu_i - \frac{3 E J}{G J_t} \frac{a^2 \rho_i}{\lambda g_i}} \quad (28)$$

Mas, como $\mathcal{M}_i^0 = - \lambda \mu_i p_i$, vem:

$$x_i = \frac{p_i}{2 - \frac{3 E J}{G J_t} \frac{a^2 \rho_i}{\lambda^2 g_i}}, \quad (29)$$

já que $\rho_i = \mu_i$.

Há pois toda a conveniência de se adotar J_t o maior possível. O caso extremo seria $J_t = \infty$. Então da fórmula

la (29) se conclue $x_1 = p_1/2$. Quer isto dizer que a carga na viga A se distribuiria igualmente pela viga A e B.

Referências

1. J.C. de Figueiredo Ferraz : Contribuição ao Estudo das Grelhas. São Paulo, 1951.
2. J.C. de Figueiredo Ferraz : Distribuição Transversal das Cargas nas Pontes. São Paulo, 1966.

OBSERVAÇÕES SOBRE O
CÁLCULO DAS LAJES NO REGIME PLÁSTICO

Neste trabalho são consideradas apenas as lajes isotrópicas. As considerações feitas podem no entanto ser extendidas às lajes anisótropas, desde que executadas as transformações necessárias.

A condição de escoamento das lajes isotrópicas, providas assim da mesma armadura segundo duas direções ortogonais, se expressa por:

$$|M|_{\max} = m, \quad (1)$$

onde M é o maior momento fletor em qualquer direção; e m o momento fletor de escoamento, referidos ambos, à unidade de comprimento.

Havendo apenas armadura inferior, a condição anterior seria:

$$M_{\max} = m \quad M_{\min} = 0 \quad (2)$$

Êstes dois casos estão representados na figura 1.

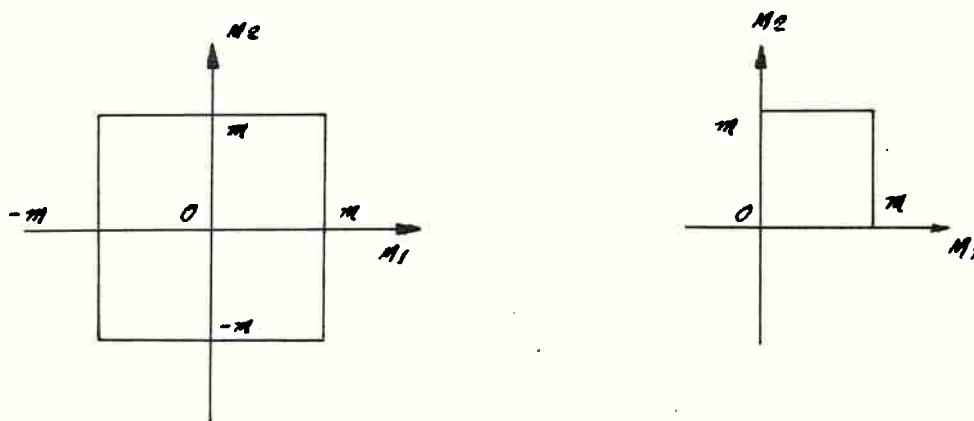


Figura 1

Designando por s_f a armadura por unidade de comprimento nas duas direções ortogonais; e sendo α o ângulo que certa seção faz com uma daquelas direções, então, nesta seção a armadura por unidade de comprimento seria $s_f \cos \alpha$ e $s_f \sin \alpha$. Considerando que nas duas direções ortogonais consideradas a tensão nas armaduras possa atingir o escoamento σ_e , o esforço de tração por unidade de comprimento na mencionada seção seria:

$$s_f (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \sigma_e = s_f \cdot \sigma_e \quad (3)$$

A condição de escoamento é então independente da direção da seção.

1. Lajes no estado de equilíbrio limite

Consideremos o caso das lajes isótropas livremente apoiadas no seu contorno e sujeitas a cargas normais ao seu plano.

Suponhamos inicialmente que o campo dos momentos fletores, decorrentes do carregamento, seja positivo.

Desprezemos, além disso, a influência dos momentos de torção no fenômeno de plastificação.

Admitindo um estado de plastificação integral, o trabalho interno de um elemento de laje dS seria dado por:

$$d \tau_i = (\chi_x + \chi_y) m dS = (\chi_1 + \chi_2) m dS, \quad (4)$$

sendo χ_x e χ_y as curvaturas da superfície da laje deformada; e χ_1 e χ_2 as curvaturas principais.

Designando por $w = w(x, y)$ a flecha em qualquer ponto (x, y) , ter-se-á:

$$\begin{aligned} \tau_i &= - m \int \int_S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dS \\ &= - m \int \int_S \nabla^2 w \cdot dS \end{aligned} \quad (5)$$

O trabalho da carga p será:

$$\tau_e = \iint_S p w \, dS \quad (6)$$

A condição de mínimo da soma dos trabalhos, interno e externo, nos leva a escrever então:

$$\iint_S (p w - m \nabla^2 w) \, dS = \min \quad (7)$$

Entretanto, a expressão do trabalho interno sob a forma (5) só é possível se uma das curvaturas, χ_1 ou χ_2 , for nula. Em caso contrário, os momentos principais M_1 e M_2 deveriam ser iguais entre si e, bem assim, iguais a m , o que é absurdo, dentro das condições impostas à laje. Demonstra-se assim que a superfície de rutura da laje é uma superfície regradada.

Utilizando o teorema de Green, podemos escrever:

$$\iint_S \nabla^2 w \, dS = \oint_C \frac{\partial w}{\partial n} \, ds, \quad (8)$$

sendo s contado segundo o contorno C , e n segundo a normal ao mesmo contorno.

Se a carga p for constante por toda a laje, resulta:

$$p = \frac{m \oint_C \frac{\partial w}{\partial n} \, ds}{\iint_S w \, dS} \quad (9)$$

O valor de p deve corresponder ao menor valor da relação (9).

2. Configuração real de rutura

O problema de determinação da carga de rutura das lajes de concreto armado, de um modo geral, tem sido resolvi

do para determinados casos apenas; e, mesmo assim, a partir de uma configuração de rutura imposta.

Não se tem daí nenhuma garantia de que não possa haver uma outra configuração de rutura, que importe em menor valor do carregamento.

Procuremos estabelecer a seguir uma condição a que a configuração de rutura deve satisfazer.

Consideremos o caso geral de uma laje de contorno qualquer curvilíneo ou poligonal, mantidas as condições impostas em 1.

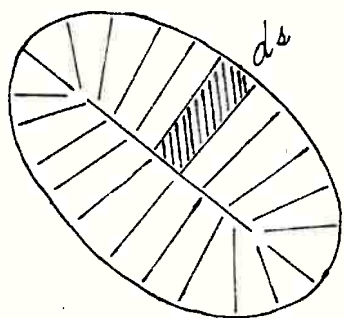


Figura 2

Se carregada até a rutura, sua deformada será uma superfície regradada como indicada na figura 2.

Tomemos a porção da laje correspondente ao trecho ds do contorno.

A expressão do trabalho interno τ_i , levado em conta (8), seria:

$$\tau_i = m \int_c \gamma ds \quad (10)$$

sendo γ o ângulo que a mencionada porção elementar de laje faz com o elemento ds .

Dentro desta mesma porção de laje, chamemos de λ a distância de um ponto genérico (x, y) ao lado ds . Então:

$$w = \gamma \lambda \quad (11)$$

Por consequência vem:

$$\int \int_S w dS = \int_c \gamma d\mathcal{M}_i \quad (12)$$

onde $d\mathcal{M}_i$ é o momento estático da carga atuando, naquela porção elementar de laje, em relação a ds .

A condição (7) poderia ser escrita da seguinte forma:

$$\int_c \gamma (d\mathcal{M} - m ds) = \min \quad (13)$$

A condição de mínimo implicará em:

$$d\mathcal{M} - m ds = 0 \quad (14)$$

já que os ângulos γ podem ser considerados pequenos, ou mesmo desprezíveis, no início do processo de configuração de rutura.

Então

$$\frac{d\mathcal{M}}{ds} = m \quad (15)$$

A configuração de rutura procurada será exatamente aquela para a qual a relação (15) seja preenchida.

Esta condição é muito importante. Através dela se conclue, por exemplo, que no caso de uma laje submetida a uma carga concentrada em certo ponto P , a configuração de rutura é uma pirâmide (ou cone) com vértice em P .

Este fato é sempre postulado nos diversos tratados. Ele, no entanto, como se viu, é passível de demonstração.

Para fins de aplicação da condição ... (15) determinemos o momento estático do elemento de laje - uniformemente carregada com carga p até a rutura - em relação a ds

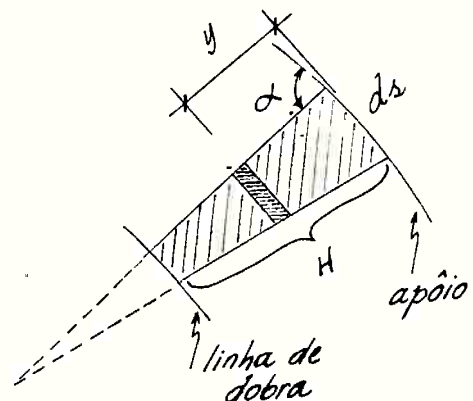


Figura 3

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{M} &= p \int_0^H \frac{ds}{\rho} (\rho - y) y \sin^2 \alpha \cdot dy \\
 &= \frac{p}{\rho} \sin^2 \alpha \int_0^H (\rho y - y^2) dy \\
 &= \frac{H^2 \sin^2 \alpha}{6} (3 - 2 \frac{H}{\rho}) p \, ds
 \end{aligned} \tag{16}$$

Portanto

$$\frac{d\mathcal{M}}{ds} = \frac{p \sin^2 \alpha}{6} \cdot H^2 (3 - 2 \frac{H}{\rho}) = m \tag{17}$$

Conclui-se assim que:

$$H^2 (3 - 2 \frac{H}{\rho}) \sin^2 \alpha = C = \text{const.} \tag{18}$$

A esta conclusão chegou também Tchou-Tzu-Y (5) por caminho totalmente diferente.

Ao se aplicar contudo a condição (15), deve-se ter em conta que pode haver outra forma de rutura da laje livremente apoiada, onde a deformação se estenda apenas a parte da laje, e fica limitada por um contorno fechado interno, como na figura 4.

Se a laje fôr engastada, provida de duas armaduras, inferior e superior, correspondendo a momentos de plastificação m e m' respectivamente, o trabalho interno seria então expresso por

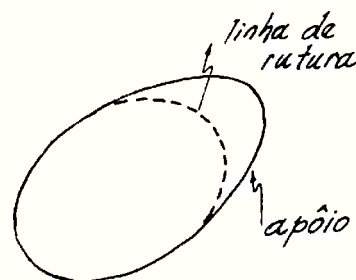


Figura 4

$$\tau_i = - (m + m') \iint_S \nabla^2 w \cdot dS \tag{19}$$

Pode então ocorrer que os limites da zona de rutura não coincidam com os apoios.

Se a laje for livremente apoiada, e existindo apenas armadura inferior, procuremos a condição de equilíbrio de um elemento junto ao apoio. Tem-se:

$$M_p \sin^2 \alpha + m \cos^2 \alpha = 0 \quad \therefore \quad M_p = -m \operatorname{ctg}^2 \alpha \quad (20)$$

Daí se conclue que o ângulo de incidência α das linhas de rutura (geratriz da superfície regradada) não pode ser inferior a $\pi/4$, sob pena de se ter $|M_p| > m$.

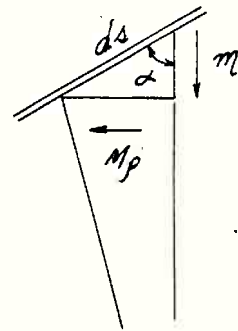


Figura 5

3. Alguns problemas particulares

A condição (15) nos permite resolver, de modo bastante simples, certos problemas que, por outros métodos, teria solução bem mais complicada.

a) Laje romboidal sob ação de carga uniformemente distribuída

Aplicando a condição (15) ou, mais especificamente, a condição (18), aos pontos I e II, vem:

Para o ponto I

$$C_I = h^2 \sin^2 \alpha$$

Para o ponto II

$$C_{II} = b^2 \left(3 - 2 \frac{b}{\rho} \right)$$

E como

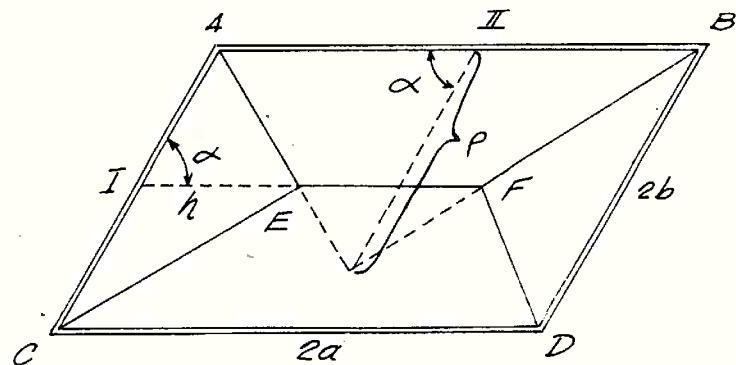


Figura 6

$$\rho = \frac{ab}{h}$$

vem:

$$C_{II} = b^2 \left(3 - 2 \frac{h}{a} \right)$$

Consequentemente,

$$b^2 \left(3 - 2 \frac{h}{a} \right) = h^2$$

Fazendo $\lambda = \frac{a}{b}$ e $h = v a$, vem:

$$v = \frac{1}{\lambda^2} \left(\sqrt{1 + 3 \lambda^2} - 1 \right) \quad (21)$$

Voltando a (17) tem-se:

$$m = \frac{h^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{6} p = \frac{v^2 a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{6} \cdot p, \quad (22)$$

ou ainda

$$m = \frac{v^2 \lambda^2}{6} b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot p \quad (23)$$

Portanto

$$p = \frac{6 m}{v^2 a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{6 m}{v^2 \lambda^2 b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \quad (24)$$

Se a laje for retangular (figura 7), ter-se-á:

$$p = \frac{6 m}{v^2 a^2} = \frac{6 m}{v^2 \lambda^2 b^2}; \quad (25)$$

e se for quadrada, com $a = b$

$$p = \frac{6 m}{a^2} \quad (26)$$

Analisando o equilíbrio junto ao canto A, verifica-se que o momento M_p atuando na seção normal a AE (figura 7) é:

$$M_p = - m \operatorname{tg} \beta \quad (27)$$

Conclue-se daí, então, que a configuração de ruptura apontada só é possível se houver uma armadura superior, junto aos cantos, maior que a armadura inferior estendida por toda a laje. Em caso contrário há o conhecido fenômeno de bifurcação junto aos cantos.

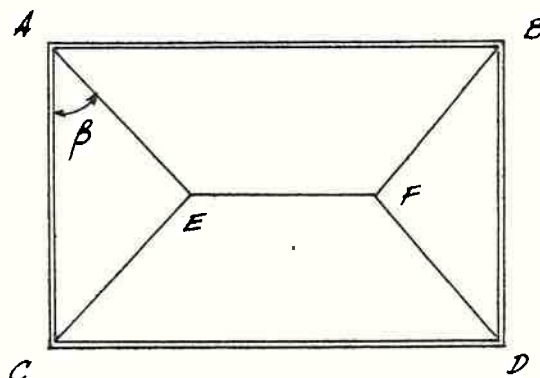


Figura 7

b) Laje livremente apoiada, de contorno curvilíneo, sob ação de carga concentrada P.

Como já ficou demonstrado, a figura de ruptura é uma superfície cônica com vértice em P.

Aplicada a condição (15), conclue-se

$$\frac{d P h}{ds} = m \quad (28)$$

Portanto

$$P = m \int_c \frac{ds}{h}, \quad (29)$$

onde h é a distância do ponto de aplicação da carga ao elemento ds.

Evidencia-se assim a simplicidade de demonstração da conhecida fórmula (29) como um corolário imediato de (15).

Poder-se-ia chegar a esta fórmula de maneira também bastante simples, desde que postulada uma superfície de ruptura regradada (cônica), com vértice em P, para a laje livremente apoiada.

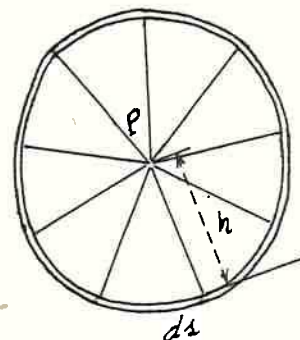


Figura 8

Assim, isolando um elemento de laje, confinada por duas posições vizinhas da geratriz, podemos indicar por vetores $\vec{\psi}$ as rotações recíprocas que este elemento executa com os vizinhos.

Sendo constante o momento ao longo de cada lado do elemento, o trabalho ao longo dos mesmos é proporcional ao seu comprimento.

O trabalho resultante pode então ser expresso como o produto do módulo do vetor rotação $\vec{\psi}$ resultante por $m ds$.

Considerada uma flecha unitária no ponto de aplicação da carga P , a rotação ao longo de ds é $\frac{1}{h}$, sendo h a distância deste ponto ao elemento considerado.

Então o trabalho interno correspondente ao elemento de laje de base ds é:

$$d \tau_i = \frac{m ds}{h}$$

Portanto

$$P = m \int_c \frac{ds}{h}$$

Como $h = \rho \sin \alpha$, resulta:

$$\frac{ds}{h} = \frac{d\theta}{\sin^2 \alpha} = (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) d\theta$$

Então

$$m \int_c \frac{ds}{h} = m \int_c \left(1 + \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2\right) d\theta \quad (30)$$

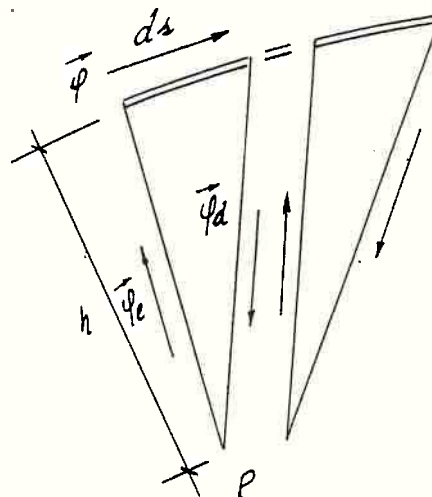


Figura 9

Se quisermos o trabalho correspondente ao comprimento de um trecho do contorno, limitado por $\theta = 0$ e $\theta = \theta$, devemos subtrair da expressão acima o trabalho correspondente às rotações ao longo das posições extremas da geratriz, ou sejam, $m \operatorname{ctg} \alpha_0$ e $m \operatorname{ctg} \alpha$.

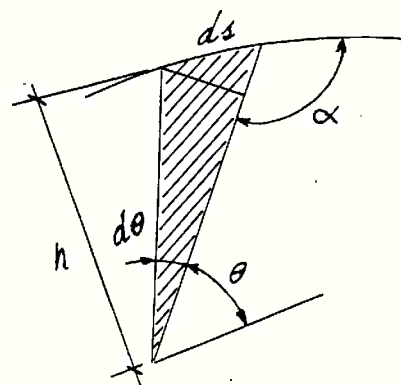


Figura 10

$$\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)_{\theta=\theta} - \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)_{\theta=0} = \int_0^{\theta} d\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) \quad (31)$$

Mas

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\rho'}{\rho}\right) d\theta = \frac{\rho\rho'' - \rho'^2}{\rho^2} \quad (32)$$

Voltando à expressão (30) e subtraindo (32), vem:

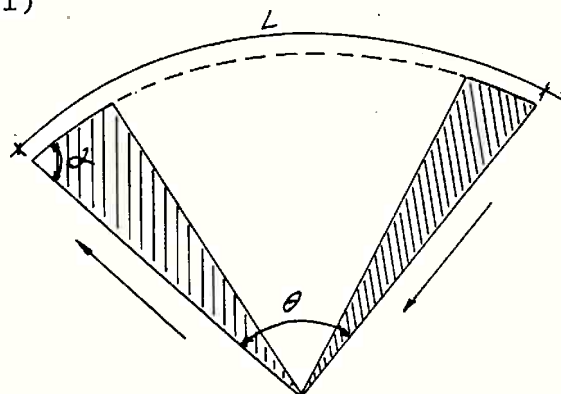


Figura 11

$$\tau_{1,L} = m \int_0^{\theta} \left(1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2} - \frac{\rho\rho'' - \rho'^2}{\rho^2}\right) d\theta \quad (33)$$

$$= m \int_0^{\theta} \left(1 - \frac{\rho''}{\rho} + 2 \frac{\rho'^2}{\rho^2}\right) d\theta, \quad (34)$$

que é o trabalho correspondente ao trecho L do contorno.

Poder-se-ia dar também um outro aspecto a esta expressão:

$$1 - \frac{\rho''}{\rho} + 2 \frac{\rho'^2}{\rho^2} = \frac{\rho}{R} \left(1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2}\right)^{3/2} = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{R \rho^2} \quad (35)$$

sendo R o raio de curvatura da linha de contorno.

Por outro lado

$$d\theta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = ds \quad (36)$$

Com isto a expressão sob o sinal de integral de ..
(33) passa a:

$$\tau_{i,L} = m \int_L \frac{ds}{R \sin^2 \alpha} \quad (37)$$

Vê-se então que ao longo de um trecho retilíneo do contorno, o trabalho é nulo.

c) Laje elíptica, livremente apoiada, carregada uniformemente

Para simplificar,
admitamos válida a relação

$$\operatorname{tg} \theta = k \operatorname{tg} \psi = k \frac{y}{x}$$

É uma hipótese plausível, eis que ela é correta em I e em II; e bem assim nos trechos intermediários é uma aproximação razoável.

Da figura se conclue:

$$H = \sqrt{y^2 + \frac{x^2}{k^2}} \quad e$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{d\theta}{ds}$$

Aplicando a condição
(18) em I, onde $\frac{dx}{ds} = 1$, $x = 0$
e $y = b$, vem:

$$C_I = b^2 \left(3 - \frac{2}{k}\right)$$

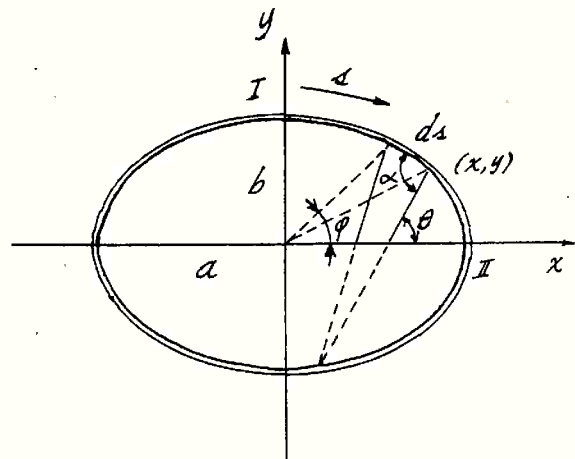


Figura 12

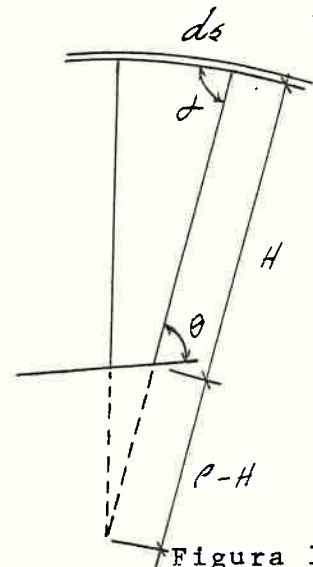


Figura 13

Para o ponto II ter-se-ia:

$$C_{II} = \frac{a^2}{k^2}$$

já que $\frac{dy}{ds} = -1$, $y = 0$ e $x = a$.

Como $C_I = C_{II}$, obtem-se

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{1 + 3 \frac{a^2}{b^2}} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \sqrt{1 + 3 \frac{a^2}{b^2}} \right) \end{aligned}$$

Voltando à expressão (17), resulta:

$$p = \frac{6m}{C} = \frac{2}{3} \left(\sqrt{1 + 3 \frac{a^2}{b^2}} + 1 \right) \frac{m}{a^2} \quad (38)$$

Este resultado deve ser aplicado a relações de a/b variando de 1 até 2. Acima disto o ângulo α de incidência assumiria valores menores do que $\pi/4$, e a figura de rutura pode ser outra.

A fórmula (38) encontra-se também no trabalho de Tchou-Tsu-Y⁽⁵⁾.

d) Laje circular sujeita a carga linear uniforme

Suponhamos uma carga p distribuída ao longo do diâmetro $2a$.

Aplicando a condição do momento estático ao ponto I, vem:

$$\frac{dP}{2} \frac{a}{ds} = m$$

$$\therefore dP = \frac{2m}{a} ds$$

$$P = \frac{2m}{a} \cdot 2\pi a = 2\pi m$$

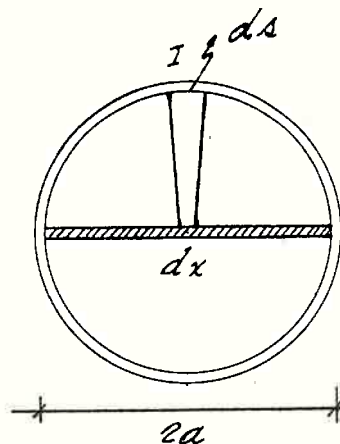


Figura 14

Então

$$p = \frac{2}{a} \pi m = 6,28 \frac{m}{a}$$

Este resultado é aproximado. Dever-se-ia corrigi-lo multiplicando por dx/ds .

e) Laje elíptica sujeita a carga linear uniforme

Admitamos que o carregamento p se estenda ao longo do diâmetro maior $2a$.

Aplicando a referida condição para o ponto I, tem-se:

$$\frac{dP}{2} \left(\frac{ds}{dx} \right) \frac{b}{ds} = m$$

Admitindo que nas vizinhanças de I o ângulo de incidência α seja $\pi/2$, vem:

$$dx = \frac{R - b}{R} \cdot ds$$

$$= \left(1 - \frac{b}{R} \right) ds$$

$$= \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) ds$$

Portanto

$$dP = \frac{2m}{b} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) ds$$

$$\therefore P = \frac{2m}{b} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) U,$$

onde U é o perímetro da elipse.

Então

$$p = \frac{m}{ab} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) U$$

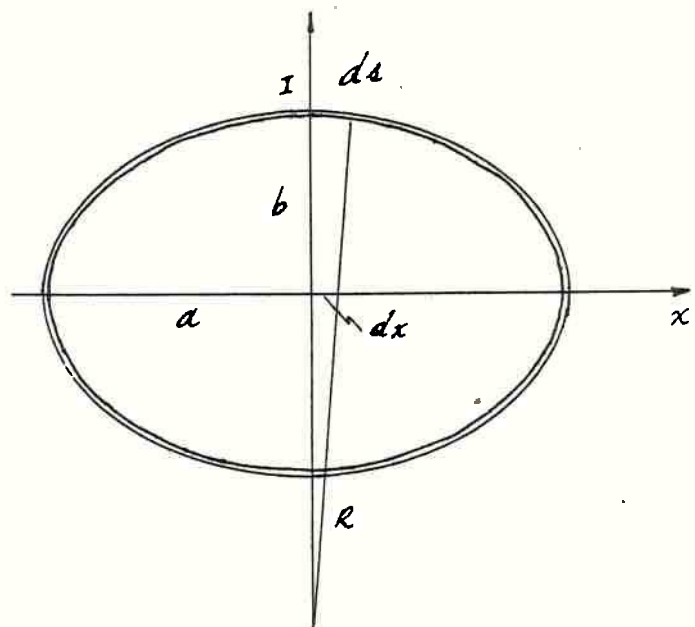


Figura 15

Para $a = 2b$ vem:

$$p = 7,2 \frac{m}{a}$$

Referências

1. T. van Langendonck: Charneiras Plásticas em Lajes de Edifícios. Associação Brasileira de Cimento Portland. 1966.
2. M.P. Nielsen: Limit Analysis of Reinforced Concrete Slabs. Acta Polytechnica Scandinavica. 1964.
3. A.R. Rjanitsyn: Calcul à la Rupture. Eyrolles Editeur. 1959.
4. D. Zagottis: Charneiras Plásticas - Configurações de Rutura com Superfícies Cônicas. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. 1967.
5. Tchou-Tsu-Y: Equilíbrio Limite das Lajes de Concreto Armado (em russo). Publicação da Academia Russa de Construções e Arquitetura. 1961.

O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS
NO EXAME DE ALGUNS CASOS DE INSTABILIDADE

Por este instrumento é possível resolver, dentro de uma aproximação desejada, equações diferenciais cuja solução exata importa em grandes dificuldades ou, até mesmo, em dificuldades intransponíveis.

Para a solução de problemas de instabilidade, este método se apresenta muito vantajoso, como se verificará nos casos aqui abordados.

I. Flambagem de barra reta mergulhada em meio elástico

Tal problema recai na solução da conhecida equação diferencial :

$$(E J y'')'' + (P y')' = 0 \quad (1)$$

Admitamos para a deformação y da barra de comprimento uma expressão da forma:

$$\bar{y} = a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) + \dots + a_n \phi_n(x), \quad (2)$$

onde $\phi_1(x)$ são funções linearmente independentes e os a_1 , coeficientes a serem determinados, respeitadas as condições de contorno.

A equação (1) pode ser também escrita sob a forma:

$$L(y) = (E J y'')'' + (P y')' = 0 \quad (3)$$

Os coeficientes a_1 devem ser então tais que acarescem valor mínimo para a integral:

$$I = \int_0^l [L(a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + \dots + a_n \phi_n)]^2 dx \quad (4)$$

Consideremos, como exemplo, o caso de uma barra reta de comprimento l , com $EJ = \text{constante}$, articulada nas extremidades, mergulhada em meio elástico, e cuja carga de flambagem deve ser determinada.

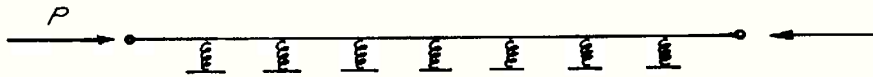


Figura 1

A equação diferencial que rege o problema é:

$$y^{IV} + \alpha y'' + \beta y = 0, \quad (9)$$

onde

$$\alpha = \frac{P}{EJ}, \quad \beta = \frac{k}{EJ}, \quad (10)$$

sendo k o coeficiente de recalque.

Façamos

$$y = C \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{l} \quad (11)$$

com $i = 1, 2, 3 \dots$

Então

$$y'' = -C \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{l} \quad (12)$$

$$y^{IV} = C \frac{i^4 \pi^4}{l^4} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{l} \quad (13)$$

Por consequência:

$$\int_0^l \left(\frac{i^4 \pi^4}{l^4} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{l} - \alpha \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{l} + \beta \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{l} \right) \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{l} dx = 0 \quad (14)$$

Então resulta:

$$\left(\frac{i^4 \pi^4}{l^4} - \alpha \frac{i^2 \pi^2}{l^2} + \beta \right) \int_0^l \operatorname{sen}^2 \frac{i \pi x}{l} dx = 0$$

$$\left(\frac{i^4 \pi^4}{4} - \alpha \frac{i^2 \pi^2}{\ell^2} + \beta\right) \frac{\ell}{2} = 0$$

Tendo em conta (10), vem:

$$P_{crit} = i^2 \frac{\pi^2 E J}{\ell^2} + \frac{1}{i^2} \frac{k \ell^2}{\pi^2} \quad (15)$$

Resta determinar qual o valor de i para o qual P_{crit} seja mínimo.

Fazendo

$$\chi = \frac{i^2 \pi^2 E J}{2 \ell}, \quad (16)$$

tem-se:

$$P_{crit} = \chi + \frac{E J k}{\chi} \quad (17)$$

Admitindo que χ possa variar continuamente, a condição de mínimo é dada por:

$$\frac{d P_{crit}}{d \chi} = 1 - \frac{E J k}{\chi^2} = 0 \quad (18)$$

Então:

$$\chi = \sqrt{E J k} \quad (19)$$

Resulta pois

$$P_{crit} = 2 \sqrt{E J k} \quad (20)$$

Na realidade o valor correto de P_{crit} seria um pouco maior do que isto, dado que χ varia aos saltos, quando da passagem de i para $i + 1$.

Substituindo (20) em (15), podemos determinar o valor de i correspondente ao P_{crit} mínimo.

Então:

$$\left(i^2 - \sqrt{\frac{k \ell^4}{\pi^4 E J}}\right)^2 = 0 \quad (21)$$

Desta forma o valor de i (número inteiro) procurado será aquele número inteiro que mais se aproxima de

$$i = \sqrt[4]{\frac{k \ell^4}{\pi^4 E J}} \quad (22)$$

Este resultado pode ser testado facilmente. Basta considerar que, admitido (11), verifica-se a equação:

$$y^{IV} + 2 \left(\frac{i \pi}{\ell}\right)^2 y'' + \left(\frac{i \pi}{\ell}\right)^4 y = 0 \quad (23)$$

Esta equação coincide com a equação (9) se fizermos:

$$\frac{P}{E J} = 2 \left(\frac{i \pi}{\ell}\right)^2 \quad (24)$$

$$\frac{k}{E J} = \left(\frac{i \pi}{\ell}\right)^4 \quad (25)$$

De (25) se obtém, para $i = 1, 2, 3, \dots$, uma série de valores discretos para o coeficiente de recalque; e de (24) os correspondentes valores de carga crítica.

Fazendo

$$K^2 = \frac{k \ell^4}{E J \pi^4}, \quad (26)$$

de (25) vem:

$$i^4 = K^2$$

$$i^2 = K$$

Então de (24) resulta:

$$P_{crit} = 2 K \frac{E J \pi^2}{\ell^2} = 2 \sqrt{E J k},$$

independente de ℓ .

II. Flambagem de arcos

Vamos estudar a seguir a flambagem de arcos no seu próprio plano, admitindo que a carga não se modifique com a deformação dos mesmos. E para a exposição do método empregado serão analisados os arcos parabólicos, não obstante o seu

emprêgo para outras formas não conduzir a dificuldades maiores.

Seja $y = y(x)$ a equação do eixo do arco, e ζ , η os deslocamentos do ponto (x,y) . A equação diferencial que rege os deslocamentos verticais η é como se sabe:

$$\eta'' = - \frac{M}{E J_x \cos \psi}, \quad (27)$$

onde ψ é a inclinação da tangente no ponto (x,y) .

Por outro lado, desprezando a deformação específica ϵ do eixo do arco, isto é, considerando o arco como inextensível, resulta a equação:

$$\zeta' = - y' \eta', \quad (28)$$

ligando os deslocamentos, horizontal e vertical.

Abordamos agora o problema de flambagem dos arcos parabólicos. Se carregadas com carga uniforme constante, seu eixo é coincidente com a linha das pressões.

1. Arco biarticulado

Poder-se-ia estudar o caso de momento de inércia variável.

Como isto, entretanto, não altera o método, cuidemos, por simplicidade, dos casos correntes:

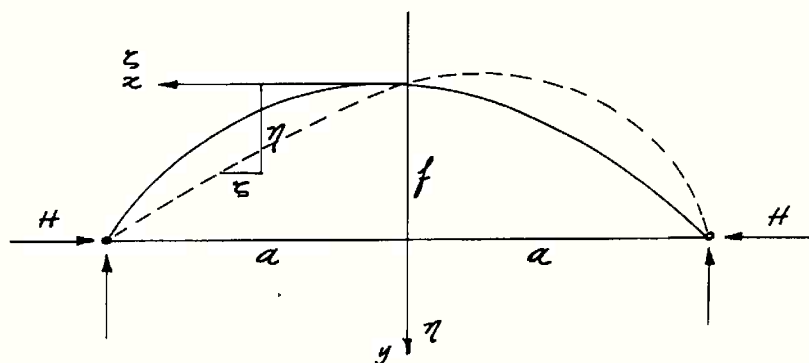


Figura 2

$EJ_x \cos \psi = EJ = \text{cte.}$ e $J = \text{cte.}$

A abordagem do segundo caso implica em levar a equação fundamental a uma forma adequada.

Sendo o arco conformado com a linha de pressões,

$$M = H (\eta - \zeta y') \quad (29)$$

Então:

$$\eta'' EJ \cos \psi + H (\eta - \zeta y') = 0 \quad (30)$$

Fazendo, para arcos não muito elevados,

$$\cos \psi \approx 1 - \frac{1}{2} y'^2 \quad (31)$$

e considerando que

$$y = f \frac{x^2}{a^2} \quad (32)$$

vem:

$$\cos \psi = 1 - \frac{2 f^2}{a^4} x^2 = 1 - \nu x^2 \quad (33)$$

Portanto (30) passa a:

$$\eta'' EJ (1 - \nu x^2) + H (\eta - \zeta y') = 0$$

$$\text{Fazendo } k^2 = \frac{H}{EJ} \quad \text{segue:} \quad (34)$$

$$\eta'' (1 - \nu x^2) + k^2 (\eta - \zeta y') = 0 \quad (35)$$

Se $EJ_x \cos \psi = EJ = \text{cte.}$, então a equação diferencial seria:

$$\eta'' + k^2 (\eta - \zeta y') = 0 \quad (36)$$

1.1. Flambagem antimétrica

Neste caso a deformação do arco se dará como indicado na figura 2 e não há alteração do empuxo. Os deslocamentos das duas metades do arco têm sinais contrários. Basta pois analisar apenas o semi-arco.

Fazemos:

$$\eta = \eta_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \quad (37)$$

Os deslocamentos horizontais resultariam da equação (28):

$$\zeta' = - y' \eta' = - \frac{2f}{a} x \eta' = - \theta x \eta'$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \zeta' &= - \eta_0 \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \cdot \theta x \\ &= - \eta_0 \theta \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \end{aligned}$$

Então: .

$$\begin{aligned} \zeta &= - \eta_0 \theta \int \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} dx \\ &= - \eta_0 \theta \frac{a}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{a} + \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + C \right) \end{aligned}$$

A constante C de integração se determina da condição: $\zeta = 0$ para $x = a$; do que resulta $C = 1$.

E assim:

$$\zeta = - \eta_0 \theta \frac{a}{\pi} \left(1 + \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \quad (38)$$

Levando este valor na equação (35), a condição para determinação do empuxo crítico é:

$$\begin{aligned} \int_0^a \left\{ - \frac{\pi^2}{2} (1 - \nu x^2) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + k^2 \left(\operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + \theta^2 \frac{a x}{\pi} \left(1 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \right\} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} dx = 0 \quad (39) \end{aligned}$$

Executando os cálculos encontramos:

$$H_{crit} = \frac{\pi^2 E J (1 - 0,57 \frac{f^2}{a^2})}{a^2 + 1,74 f^2} \quad (40)$$

Se abordado o caso de $EJ_x \cos \psi = EJ = cte.$, o empuxo crítico resultaria de:

$$\int_0^a \left\{ -\frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} + k^2 \left(\sin \frac{\pi x}{a} + \theta^2 \frac{a x}{\pi} \left(1 + \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \right\} \sin \frac{\pi x}{a} dx = 0 \quad (41)$$

Encontrariamos assim:

$$H_{crit} = \frac{\pi^2 E J}{a^2 + 1,74 f^2} \quad (42)$$

Cabe assinalar que poderíamos ter escolhido outra função para η , como por exemplo uma parábola do quarto grau:

$$\eta = \eta_0 \left(\frac{x}{a} - 2 \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} \right) \quad (43)$$

Efetuados os cálculos, encontramos também:

$$H_{crit} = \frac{\pi^2 E J}{a^2 + 1,74 f^2} \quad (44)$$

1.2. Flambagem simétrica

Neste caso, com a passagem do arco à posição deformada, há um acréscimo de empuxo ΔH .

A expressão do momento fletor é em

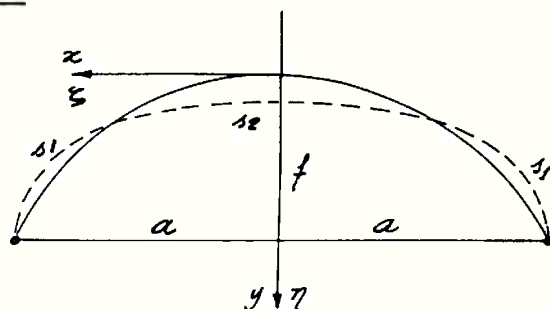


Figura 3

tão

$$M = H (\eta - \zeta y') - \Delta H f \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \quad (45)$$

A influência de ΔH no valor desta carga crítica é entretanto pequena, como se poderá constatar; razão pela qual não o consideramos.

Adotemos para η uma função do tipo:

$$\eta = \eta_0 \cos \frac{3 \pi x}{2 a} \quad (46)$$

que satisfaz as condições de contorno, isto é: para $x = a$, $\eta = 0$; para $x = 0$, $\eta' = 0$.

Voltando a (28) temos:

$$\zeta' = - y' \eta' = \theta \eta_0 \frac{3 \pi x}{2 a} \sin \frac{3 \pi x}{2 a}$$

Portanto

$$\zeta = \theta \eta_0 \frac{2 a}{3 \pi} \left(\sin \frac{3 \pi x}{2 a} - \frac{3 \pi x}{2 a} \cos \frac{3 \pi x}{2 a} + C \right)$$

Mas, como para $x = 0$, $\zeta = 0$, resulta $C = 0$.

Então

$$\zeta = \theta \eta_0 \frac{2 a}{3 \pi} \left(\sin \frac{3 \pi x}{2 a} - \frac{3 \pi x}{2 a} \cos \frac{3 \pi x}{2 a} \right) \quad (47)$$

A carga de flambagem se determina pois de

$$\int_0^a \left(- \frac{9 \pi^2}{4 a^2} \cos \frac{3 \pi x}{2 a} + k^2 \cos \frac{3 \pi x}{2 a} - k^2 \theta^2 \frac{2 a x}{3 \pi} \left(\sin \frac{3 \pi x}{2 a} - \frac{3 \pi x}{2 a} \cos \frac{3 \pi x}{2 a} \right) \right) \cos \frac{3 \pi x}{2 a} dx = 0 \quad (48)$$

Efetuados os cálculos, vem:

$$k^2 = \frac{22,2}{a^2 + 1,2 f^2} \quad (49)$$

E assim:

$$H = \frac{22,2 EJ}{a^2 + 1,2 f^2} \quad (50)$$

Poderíamos também obter outro valor aproximado da carga crítica, igualando o momento interno M_1 com o momento externo M_e , provocado pelo carregamento:

$$M_e = H \left(\eta_o \cos \frac{3\pi x}{2a} - \theta^2 \eta_o \frac{2ax}{3\pi} \left(\sin \frac{3\pi x}{2a} - \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi x}{2a} \right) \right).$$

Para $x = \frac{a}{2}$ vem:

$$\begin{aligned} M_e &= + \frac{\sqrt{2}}{2} \eta_o \left(-1 - \frac{4 f^2}{3 \pi a^2} (-1 + \frac{3\pi}{4}) \right) H \\ &= - \frac{\sqrt{2}}{2} \eta_o (1 + 0,575 \frac{f^2}{a^2}) H \end{aligned}$$

Por outro lado, para $x = \frac{a}{2}$

$$M_1 = - E J \eta'' = \frac{\sqrt{2}}{2} \eta_o \frac{9 \pi^2}{4 a^2} E J$$

Igualando vem:

$$H = \frac{22,2 EJ}{a^2 + 0,6 f^2} \quad (51)$$

Este valor é menos correto do que o dado por (49), já que a igualdade $M_1 = M_e$ foi imposta apenas para $x = \frac{a}{2}$.

Este resultado poderia também ser conseguido se considerarmos que entre A e B_2 (ver figura) se configura um arco biarticulado em estado de flambagem antimétrica. Como as abscissas de B_1 e B_2 são respectivamente $a/3$ e $-a/3$, resulta uma flecha $\bar{f}$ dada por:

$$\bar{f} = \frac{4}{9} f.$$

Aplicando a fórmula (44), vem:

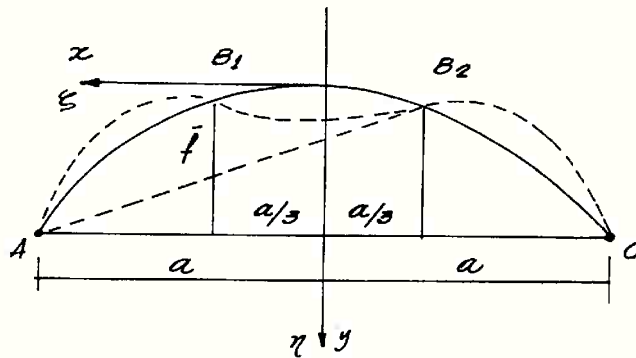


Figura 4

$$H = \frac{\pi^2 E J}{\frac{4 a^2}{9} + 1,74 \cdot \frac{16}{81} f^2}$$

$$= \frac{22,2 E J}{a^2 + 0,77 f^2} \quad (52)$$

2. Arco triarticulado

São mantidas aqui as mesmas hipóteses anteriores: arco parabólico, conformado com a linha das pressões. Não há necessidade de postular $E J_x \cos \psi = EJ = \text{cte.}$; mas por simplicidade abordaremos apenas este caso.

2.1. Flambagem antimétrica

Para este tipo de flambagem a carga crítica coincide com a do arco biarticulado, ou seja:

$$H = \frac{\pi^2 E J}{a^2 + 1,74 f^2} \quad (53)$$

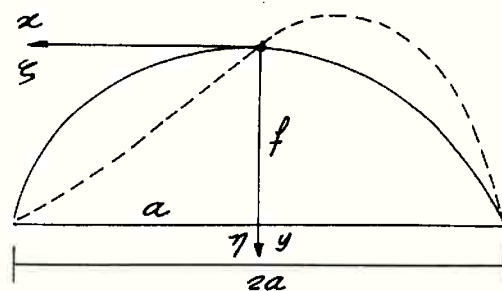


Figura 5

2.2. Flambagem simétrica

Podemos considerar que a situação da deformação do arco seja atingida em duas fases: na primeira o ponto B se desloca horizontalmente para B''; e na segunda, por uma ro-

tação de AB'' , para a posição B' .

Para a situação AB'' admitimos uma curva η dada por:

$$\eta = \eta_0 \sin \frac{\pi x}{a} \quad (54)$$

A este deslocamento η corresponde um deslocamento horizontal tal ζ :

$$\begin{aligned} \zeta' &= -\eta'y' = \\ &= -\eta_0 \theta \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a}, \end{aligned}$$

com

$$\theta = \frac{2f}{a}$$

Integrando ,

vem:

$$\begin{aligned} \zeta &= -\eta_0 \theta \int \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \\ &= -\eta_0 \theta \frac{a}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{a} + \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a} + C \right) \end{aligned}$$

Como para $x = a$, $\zeta = 0$, resulta $C = 1$.

Assim:

$$\zeta = -\eta_0 \theta \frac{a}{\pi} \left(1 + \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a} + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \quad (55)$$

Portanto para $x = 0$ vem:

$$\zeta = -2\eta_0 \theta \frac{a}{\pi} = -\frac{4f}{a\pi} \eta_0 \quad (56)$$

A este deslocamento do fecho vai corresponder um Δf dado por:

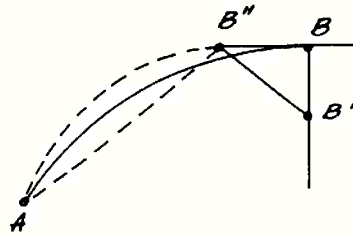
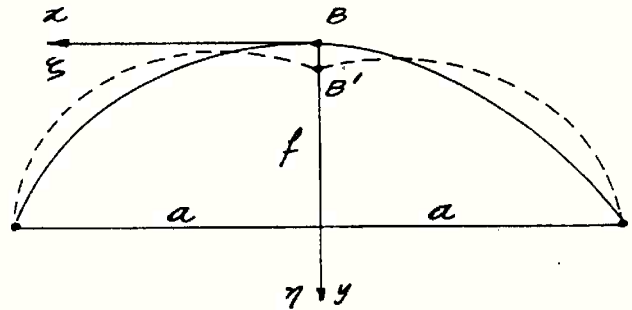


Figura 6

$$\Delta f = - \frac{4}{a} \frac{f}{\pi} \eta_0 \frac{a}{f} = - \frac{4}{\pi} \eta_0 \quad (57)$$

E, conseqüente-
mente, a este Δf corres-
ponderá uma variação de ex-
centricidade da linha de
pressões dada por:

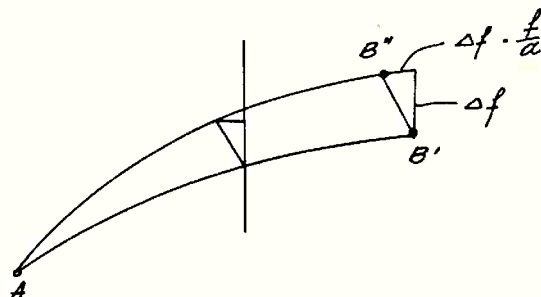


Figura 7

$$\begin{aligned} e &= \Delta f + (f - \Delta f) \frac{x^2}{a^2} - f \frac{x^2}{a^2} - \Delta f (1 - \frac{x}{a}) - \Delta f \cdot \frac{2f^2}{a^2} (\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}) \\ &= \Delta f (\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}) - \Delta f (\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}) \frac{2f^2}{a^2} \end{aligned} \quad (58)$$

Resultará pois um acréscimo de momento ΔM igual
a:

$$\begin{aligned} \Delta M &= H \left(\Delta f (\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}) (1 - \frac{2f^2}{a^2}) \right) \\ &= H \frac{4}{\pi} \eta_0 (\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}) (1 - \frac{2f^2}{a^2}) \end{aligned} \quad (59)$$

O valor final do momento será:

$$\begin{aligned} M &= H \left(\eta_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + \eta_0 \theta^2 \frac{ax}{\pi} (1 + \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + \cos \frac{\pi x}{a}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{\pi} \eta_0 (\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}) (1 - \frac{2f^2}{a^2}) \right) \end{aligned} \quad (60)$$

A carga de flambagem resultaria de:

$$\begin{aligned} \int_0^a &\left(-\frac{\pi^2}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + k^2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + k^2 \frac{4f^2}{a^2} \frac{ax}{\pi} (1 + \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{\pi x}{a}) + k^2 \frac{4}{\pi} (\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}) (1 - \frac{2f^2}{a^2}) \right) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} dx = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

O resultado seria:

$$H_{crit} = \frac{7,43 E J}{a^2 + 0,6 f^2} \quad (62)$$

Poder-se-ia tomar outro caminho, igualando o trabalho interno M_1 , com o trabalho externo M_e , no quarto do vão, por exemplo.

Assim, com $x = \frac{a}{2}$ vem:

$$\begin{aligned} M_e &= H \left(\eta_o + \eta_o \frac{4 f^2}{a^4} \frac{a^2}{2 \pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{4}{\pi} \eta_o \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2f^2}{a^2} \right) \right) \\ &= H \frac{\eta_o}{\pi} \left(4,142 + 3,14 \frac{f^2}{a^2} \right) \end{aligned} \quad (63)$$

Por outro lado,

$$M_1 = - E J \eta'' = \eta_o \frac{\pi^2}{a^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} E J = \frac{\pi^2}{a^2} \eta_o E J \quad (64)$$

Igualando, vem:

$$H_{crit} = \frac{7,5 E J}{a^2 + 0,98 f^2} \quad (65)$$

3. Arco engastado

São respeitadas também aqui as mesmas hipóteses anteriores.

3.1. Flambagem antimétrica

Podemos neste caso adotar:

$$\eta = \eta \left(\frac{x^3}{a^3} - 2 \frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a} \right), \quad (66)$$

que satisfaz às condições de contorno: $\eta = 0$ para $x = 0$ e $x = a$.

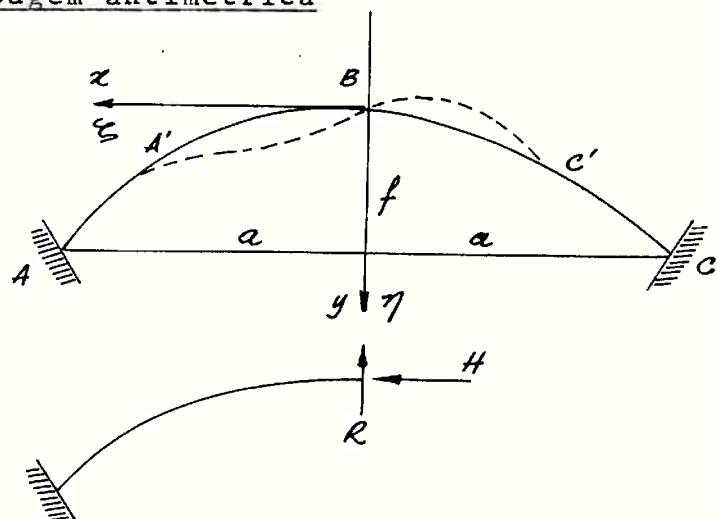


Figura 8

Resulta então:

$$\begin{aligned}\zeta' &= - y' \eta' = \\ &= - \theta \eta_0 x \left(3 \frac{x^2}{a^3} - 4 \frac{x}{a^2} + \frac{1}{a} \right) \\ &= - \theta \eta_0 \left(3 \frac{x^3}{a^3} - 4 \frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a} \right)\end{aligned}$$

Integrando, vem:

$$\zeta = - \theta \eta_0 \left(\frac{3}{4} \frac{x^4}{a^3} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^2}{2a} + C \right)$$

Como para $x = a$, $\zeta = 0$, então resulta:

$$C = \frac{a}{12}$$

Então:

$$\zeta = - \frac{\theta}{12} \eta_0 \left(9 \frac{x^4}{a^3} - 16 \frac{x^3}{a^2} + 6 \frac{x^2}{a} + a \right) \quad (67)$$

A expressão do momento em qualquer seção de abscissa x é:

$$M = H (\eta - \zeta y') + R x \quad (68)$$

Este valor de R pode ser determinado facilmente se considerarmos a expressão do momento fletor na seção de engastamento ($x = a$):

$$\begin{aligned}(M)_A &= - E J \eta''_A = + Q.a \\ \therefore - E J \eta''_A \left(\frac{6x}{a^3} - \frac{4}{a^2} \right)_A &= - E J \eta''_A \left(\frac{6}{a^2} - \frac{4}{a^2} \right) = - \frac{2}{a} E J \eta_0 \\ \therefore R &= - \frac{2}{a^3} E J \eta_0 \quad (69)\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}M &= H \left(\eta_0 \left(\frac{x^3}{a^3} - 2 \frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a} \right) + \theta^2 \eta_0 \left(9 \frac{x^5}{a^3} + 16 \frac{x^4}{a^2} + 6 \frac{x^3}{a} + ax \right) \right) \\ &\quad - \frac{2}{a^3} E J \eta_0 x \quad (70)\end{aligned}$$

O ponto de momento nulo pode ser conhecido de:

$$M = - EJ \eta'' = - EJ \left(\frac{6x}{a^3} - \frac{4}{a^2} \right)$$

$$\therefore x = \frac{2}{3} a$$

Um valor aproximado da carga crítica poderia ser obtido considerando que entre A' e C' se tem um arco biarticulado, em condição de flambagem antissimétrica. Como a carga crítica é um autovalor, igual para todo o intervalo, a carga de flambagem procurada seria dada então por:

$$H = \frac{\pi^2 EJ}{\left(2 \cdot \frac{2}{3} a\right)^2 + 1,74 \bar{f}}$$

onde $\bar{f}$ é a flecha do arco A'C'

$$\bar{f} = \frac{4}{9} f$$

Então:

$$H = \frac{\pi^2 EJ}{\frac{4}{9} a^2 + 1,74 \cdot \frac{16}{81} f^2} = \frac{22,2 EJ}{a^2 + 0,77 f^2} \quad (71)$$

Um valor mais correto seria obtido, procedendo a uma primeira integração da equação diferencial (36), usando a função η dada por (66) e a função ζ dada por (67). Encontrar-se-ia assim uma função η , em segunda aproximação. Voltando novamente à equação diferencial, e usando para a solução o método dos mínimos quadrados, encontrar-se-ia, ao final,

$$H = \frac{20,19 EJ}{a^2 + 1,04 f^2} \quad (72)$$

Cabe notar que a convergência neste caso é má.

O fator 20,19 que multiplica EJ pode ser imediatamente ser reconhecido, considerando-se que os dois semiarcos, AB e BC, comportam-se como uma barra, engastada em uma extremidade e articulada na outra. E uma tal barra, de

comprimento ℓ , se carregada de t po, tem como carga crítica $P = 20,19 EJ/\ell^2$.

3.2. Flambagem simétrica

Para se ter uma primeira função η , poder-se-ia integrar a equação diferencial (36) com $f = 0$, respeitando as condições de contorno. E com esta função η de terminar-se-ia, com a equação (28), a função ξ correspondente.

Neste caso, há que se computar um empuxo adicional dado por:

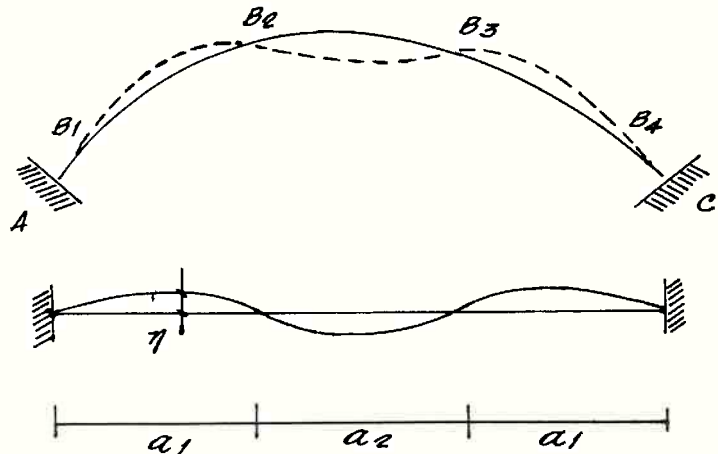


Figura 9

$$\Delta H = \frac{\int \eta \bar{y} dx}{\int \bar{y}^2 dx} \cdot H \quad (73)$$

sendo $\bar{y}$ a ordenada do arco, contada a partir da horizontal que passa pelo centro elástico.

Utilizando o método mencionado, chegar-se-  a uma carga crítica dada por:

$$H = \frac{33,2 EJ}{a^2 + 0,8 f^2} \quad (74)$$

Com uma simples inspeção da figura   possível estabelecer um valor aproximado da carga crítica.

Assim, entre B_1 e B_4 se forma um arco biarticulado em condições de flambagem simétrica. Por outro lado, conclue-se que as distâncias entre as projeções de B_1 , B_2 , B_3 e B_4 é igual a $0,7 a_1$.

E como

$$2 a_1 + 0,7 a_1 = 2,7 a_1 = 2a \quad \text{vem:}$$

$$a_1 = \frac{a}{1,35}$$

O arco B_1B_4 tem semivão:

$$\bar{a} = 0,78 a$$

e uma flecha

$$\bar{f} = \frac{f}{2} \overline{0,78^2} a^2 = f \cdot \overline{0,78^2} = 0,61 f$$

Então, aplicando a fórmula correta para H,

$$H = \frac{21,96 EJ}{0,78^2 a^2 + 1,2 \cdot 0,61^2 \cdot f^2} = \frac{36 EJ}{a^2 + 0,74 f^2} \quad (75)$$

4. Momentos parasitas

Na teoria clássica dos arcos é desprezada a influência dos deslocamentos η e ζ no valor das solicitações nas seções. Entretanto esta influência pode ser grande e assim convém avaliá-la.

4.1. Arcos bi e triarticulados

Vamos pesquisar o caso em que a deformada do arco assume configuração antissimétrica. A configuração simétrica a carreta pequenos deslocamentos e seus efeitos são bem menores.

Dado um certo carregamento, seja $\mathcal{M}_0$ o momento fletor implantado no vão $l = 2a$. Se o carregamento for antissimétrico, o momento $\mathcal{M}_0$ é nulo no meio do vão, ou seja, em $x = 0$.

O momento fletor em qualquer seção será dado por:

$$M = \mathcal{M}_0 - H (f - y) + H (\eta - \zeta y') \quad (76)$$

A equação diferencial regendo os deslocamentos é:

$$\eta'' EJ = - \left[\mathcal{M}_0 - H (f - y) + H (\eta - \zeta y') \right] \quad (77)$$

Pela teoria clássica, as flechas $\bar{\eta}$ seriam regidas por:

$$\bar{\eta}'' EJ = -(\mathcal{M}_0 - H(f - y)) \quad (78)$$

Por consequência (77) pode ser escrita:

$$\eta'' EJ = \bar{\eta}'' EJ - H(\eta - \zeta y') \quad (79)$$

ou

$$\eta'' - \bar{\eta}'' + k^2(\eta - \zeta y') = 0 \quad (80)$$

$$\text{Fazendo} \quad \eta = \alpha \bar{\eta}, \quad (81)$$

vem:

$$(\alpha - 1) \bar{\eta}'' + k^2(\alpha \bar{\eta} - \zeta y') = 0 \quad (82)$$

Admitindo para $\bar{\eta}$ a função:

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}_0 \sin \frac{\pi x}{a} \quad (83)$$

e usando a expressão de ζ dada por (38), vem:

$$\int_0^a \left\{ -(\alpha - 1) \eta_0 \frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} + k^2 \alpha \eta_0 \sin \frac{\pi x}{a} + \right. \\ \left. + \alpha \theta \eta_0 \frac{ax^2}{\pi} \left(1 + \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a} + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \right\} dx = 0 \quad (84)$$

Daí resulta:

$$\alpha = \frac{1}{1 - \frac{k^2}{2}(a^2 + 1,74 f^2)} = \frac{1}{1 - \frac{H}{H_{crit}}} \quad (85)$$

ou

$$\alpha = \frac{v}{v - 1}, \quad (86)$$

sendo

$$v = \frac{H_{crit}}{H}, \quad (87)$$

definido como coeficiente de segurança à flambagem.

Como se viu, na expressão (77) não foi levada em conta a força constante. A expressão (85), a rigor, só vale para a seção de momento máximo, onde a força constante é nula. Para as demais seções ela é aproximada.

O acréscimo de momento ΔM , decorrente do cômputo dos deslocamentos, é então dado por:

$$\begin{aligned} 4 M &= \eta'' EJ - \bar{\eta}'' EJ \\ &= (\alpha - 1) \bar{\eta}'' EJ \end{aligned} \quad (88)$$

E o fator de majoração de momento pode ser posto sob a forma:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{v - 1} \quad (89)$$

4.2. Arco engastado

Consideramos apenas o carregamento antissimétrico, embora o resultado possa ser aplicado a outras combinações de cargas.

O resultado encontrado para o arco biarticulado se estende também ao arco engastado, eis que para a configuração antissimétrica forma-se internamente um arco biarticulado A_1C_1 . Desta forma:

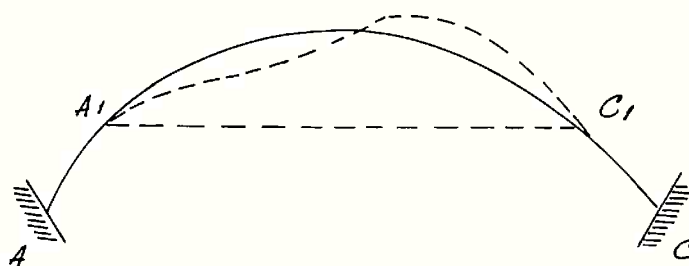


Figura 10

$$\alpha = 1 + \frac{1}{v - 1},$$

sendo v o coeficiente de segurança à flambagem antissimétrica.

5. Outras formas de arco

Os resultados supra foram obtidos na suposição de arcos parabólicos. Nos casos correntes de pontes os arcos se situam sempre entre a parábola, passando pelo centro das impostas e fecho, e o círculo contendo estes mesmos pontos.

Não é difícil mostrar, entretanto, que os valores próprios (cargas críticas), calculados para os arcos parabólicos, servem também para aqueles casos.

Bibliografia:

1. Dischinger, F.: Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken. Bauingenieur, 1937. H. 33 - 40.
2. Jakobsen, A. Aas.: Buebruers tilleggsmenter. Betong, 1952. 2.

AÇÃO DO VENTO EM EDIFÍCIOS ALTOS

Este assunto vem merecendo a atenção de diversos autores. E sobre o mesmo já tivemos a oportunidade de escrever trabalho recente⁽¹⁾.

Entretanto, apesar de, no mencionado trabalho, ter sido encontrado um processo bastante simples, fazendo uso das equações de diferenças finitas - para a determinação direta dos momentos fletores nas seções de engastamento das vigas com as colunas - não foi levada em conta a influência da força normal nas colunas.

Voltamos agora ao mesmo tema para, computando aquela influência, adotar um processamento de cálculo análogo ao das vigas compostas, ligadas por vínculos elásticos, e que foram objeto de outros trabalhos.

No decorrer deste estudo abordaremos o caso de vigas e pilares com momentos de inércia constante, não obstante o caso das inércias variáveis ser passível de um processo de cálculo simplificado.

Outrossim, admitimos que a ação dos travamentos possa ser considerada como uma solicitação uniformemente distribuída por sobre as faces dos pilares: e que as deformações dos travamentos por força normal sejam desprezadas.

I. Esforços horizontais

Suponhamos um edifício, como o representado na figura 1, sujeito à ação do vento $q(x)$.

Pelas hipóteses formuladas, todos os pilares se fletam igualmente. Analisemos pois dois pilares vizinhos, o de ordem i e o de ordem $i + 1$, separados por uma junta de ordem i (figura 2). Há portanto n juntas e $n+1$ pilares.

No conjunto fletido, consideremos uma certa abscissa x , à qual corresponde uma flecha y de todo o sistema de pilares.

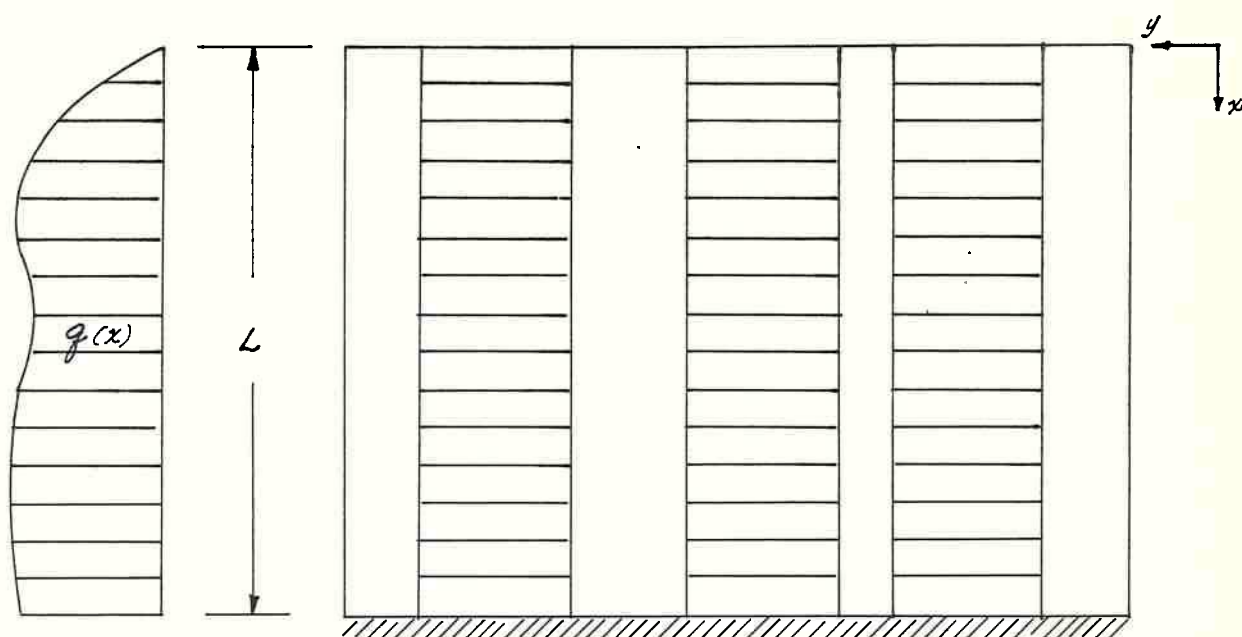


Figura 1

Os dois pontos A e B, respectivamente nos eixos dos pilares de ordem i e de ordem $i + 1$, sofrem os deslocamentos u_A e u_B , pelo efeito da força normal.

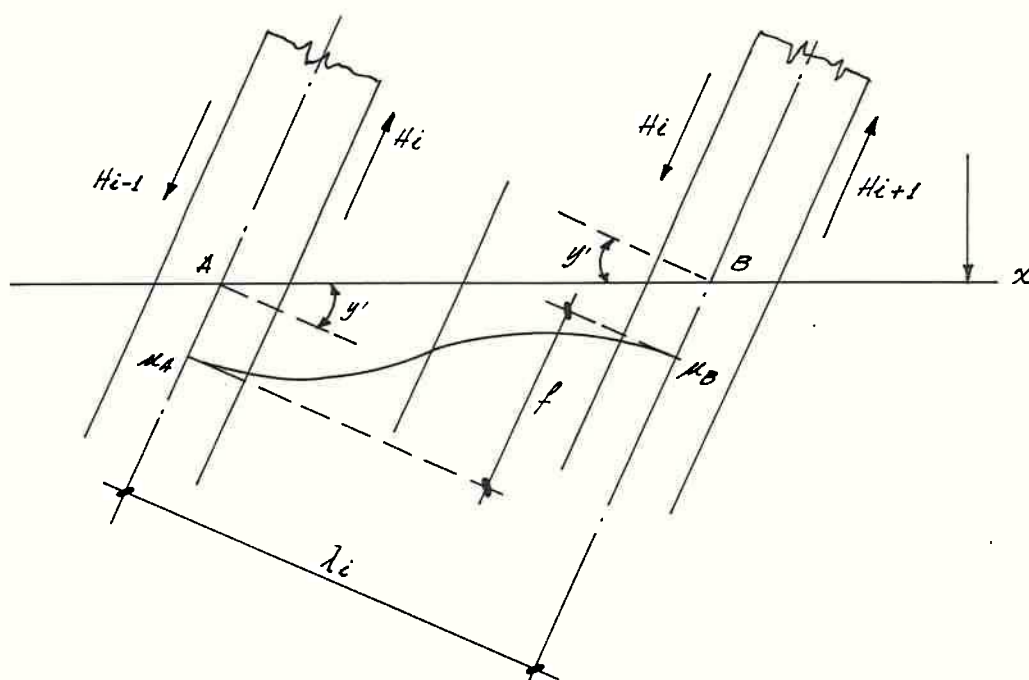


Figura 2

Da figura 2 conclue-se:

$$y' \lambda_1 + u_A = f + u_B \quad (1)$$

Portanto:

$$f = y' \lambda_1 + u_A - u_B \quad (2)$$

Por outro lado, se todos os pilares têm a mesma linha elástica y , para cada pilar de ordem j podemos escrever:

$$- E_j J_j y'' = M_j, \quad (3)$$

sendo M_j o momento fletor incorporado ao pilar j , à abscissa x .

Designando por M a soma de todos os momentos nos diferentes pilares, à mesma abscissa x , vem:

$$- y'' \sum E_j J_j = \sum M_j = M \quad (4)$$

Então:

$$y'' = - \frac{M}{\sum E_j J_j} \quad (5)$$

Pela ação dos travamentos (vigas), cada deslocamento recíproco unitário entre dois pontos correspondentes dos pilares vizinhos, faz despertar um esforço tangencial τ_1 (kg/cm) por unidade de comprimento e que lhe é proporcional.

Então:

$$f = \mu_1 \tau_1 \quad (6)$$

Designando por H_1 a soma dos esforços tangenciais, desde $x = 0$ até x , vem:

$$H_1 = \int_0^x \tau_1 dx \quad (7)$$

Chamando de $\mathcal{M}$ o momento fletor das forças horizontais externas, cabe a relação:

$$\mathcal{M} = M + \sum H_j \lambda_j \quad (8)$$

Derivando ambos os membros de (2) em relação a x , e considerando (6) e (7), vem:

$$\mu_i \tau'_i = \mu_i H''_i = y'' \lambda_i + \frac{du_A}{dx} - \frac{du_B}{dx} \quad (9)$$

Apelando para (5) e (8), segue:

$$\mu_i H''_i = - \frac{\mathcal{M} - \sum H_j \lambda_j}{\sum E_j J_j} \cdot \lambda_i + \frac{du_A}{dx} - \frac{du_B}{dx} \quad (10)$$

Por outro lado, sendo N_i e N_{i+1} as forças normais nos pilares de ordem i e $i+1$, respectivamente, à abscissa x , passamos a:

$$\mu_i H''_i = - \frac{\mathcal{M} - \sum H_j \lambda_j}{\sum E_j J_j} \cdot \lambda_i + \frac{N_i}{E_i S_i} - \frac{N_{i+1}}{E_{i+1} S_{i+1}} \quad (11)$$

E como:

$$N_i = H_i - H_{i-1}$$

$$N_{i+1} = H_{i+1} - H_i,$$

vem:

$$\mu_i H''_i = - \frac{\mathcal{M} - \sum H_j \lambda_j}{\sum E_j J_j} \cdot \lambda_i + \frac{H_i - H_{i-1}}{E_i S_i} - \frac{H_{i+1} - H_i}{E_{i+1} S_{i+1}} \quad (12)$$

Pode-se estabelecer, assim, para cada junta i , uma equação diferencial de segunda ordem. A solução do sistema de equações diferenciais determina os valores $H(x)$, o que resolve por completo o problema.

As condições de contorno são: $h = 0$ para $x = 0$;
 $H' = 0$ para $x = L$.

Em se tratando apenas de duas linhas de pilares, a

$$k_{i,i+1} = \frac{\lambda_{i+1} \lambda_i}{\Sigma EJ} - \frac{1}{E_{i+1} S_{i+1}} \quad (22)$$

$$k_{ij} = \frac{\lambda_i \lambda_j}{\Sigma EJ} \quad (23)$$

$$k_{io} = - \frac{m \lambda_i}{\Sigma EJ} \quad (24)$$

$$= - \epsilon_i m$$

II. Solução do sistema de equações diferenciais

Começamos pelo caso de apenas duas linhas de pilares, ou seja, pela solução da equação diferencial (17)

$$H'' - \alpha^2 H = - \beta m$$

Para respeitar as condições do contorno, poderíamos supor que o sistema de duas barras engastadas na base, fôsse substituído por sistema livremente apoiado, de comprimento $2L$, solicitado simetricamente à maneira da figura 3.

A carga horizontal Q é a soma da pressão do vento. As reações em A e em B são nulas.

O momento m seria então o produzido pelas cargas Q menos o produzido pela carga $2Q$, a meia altura do vão $2L$.

Façamos agora

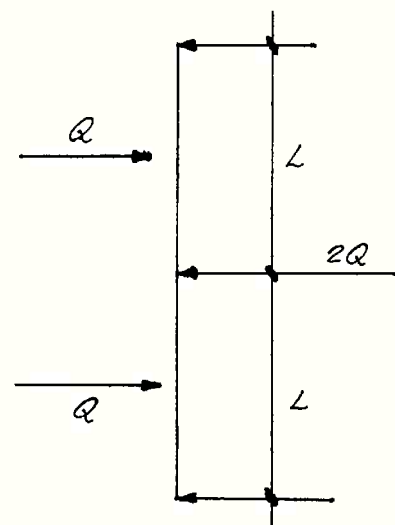


Figura 3

$$\mathcal{M} = \sum_1^{\infty} m_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{2L} \quad (25)$$

e

$$H = \sum_1^{\infty} h_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{2L} \quad (26)$$

Levando êstes valores na equação acima, vem:

$$\sum_1^{\infty} - \frac{i^2 \pi^2}{4 L^2} h_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{2L} - \alpha^2 \sum_1^{\infty} h_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{2L} = - \beta \sum_1^{\infty} m_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{2L}$$

Então:

$$h_i \left(\frac{i^2 \pi^2}{4 L^2} + \alpha^2 \right) = + \beta m_i \quad (27)$$

$$h_i = \frac{\beta m_i}{\frac{i^2 \pi^2}{4 L^2} + \alpha^2} \quad (28)$$

Se $q(x)$ fôsse constante igual a q , teríamos:

$$\mathcal{M} = \frac{8 q L^2}{\pi^3} \sum_1^{\infty} \frac{1}{i^3} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{2L} \quad (29)$$

$$- \frac{4Q}{2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{i^2} \operatorname{sen} \frac{i \pi}{2} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{2L}$$

Poderíamos apressar a convergência de (26) procedendo do seguinte modo: ⁽⁴⁾

Designando por $\bar{H}$ o valor de H para o caso de travamento rígido, isto é, para $u = 0$, a equação (17) tomaria a forma:

$$\bar{H}'' = - \beta \mathcal{M} \quad (30)$$

Com $\bar{H} = \sum \bar{h}_i \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{2L}$ vem: (31)

$$\bar{h}_i = \frac{\beta m_i}{\frac{1^2 \pi^2}{4L^2}} \quad (32)$$

Ter-se-á assim:

$$H - \bar{H} = \sum_1^{\infty} \beta \left(\frac{1}{\frac{1^2 \pi^2}{4L^2} + 2} - \frac{1}{\frac{1^2 \pi^2}{4L^2}} \right) m_i \operatorname{sen} \frac{1 \pi x}{2L} \quad (33)$$

$$= \sum_1^{\infty} \frac{1}{\frac{1^2 \pi^2}{4L^2} + 1} \cdot \frac{\beta m_i}{\frac{1^2 \pi^2}{4L^2}} = - \sum_1^{\infty} \frac{\bar{h}_i}{\frac{1^2 \pi^2}{4L^2} + 1} \operatorname{sen} \frac{1 \pi x}{2L}$$

Então

$$H = \bar{H} - \sum_1^{\infty} \frac{\bar{h}_i}{\frac{1^2 \pi^2}{4\alpha^2 L^2} + 1} \operatorname{sen} \frac{1 \pi x}{2L} \quad (34)$$

Se $\frac{1^2 \pi^2}{4\alpha^2 L^2}$ não fôr muito pequeno, a convergência de (33) é bastante grande, bastando calcular apenas um ou dois termos. A equação (30), por seu turno, tem solução fácil por uma dupla quadratura, sendo que, para as funções $\mathcal{M}$ correntes, já está até tabelada como flechas de viga livremente apoiada, uma vez que (30) tem a forma da equação da linha elástica.

No caso genérico de n linhas de pilares, ou seja, da solução do sistema (19), fariamos:

$$H_i = \sum_{j=1}^{\infty} h_{ij} \operatorname{sen} \frac{j \pi x}{2L} \quad (35)$$

e bem assim

$$\mathcal{M} = \sum_{j=1}^{\infty} m_j \operatorname{sen} \frac{j \pi x}{2L} \quad (36)$$

Levando estes valores em (19), chegaremos a um sistema de n equações algébricas a n incógnitas, cuja solução nos fornece os valores de h_{ij} . Conhecidos estes valores, ficam conhecidos os H_i , resolvendo então o problema.

III. Travamento desigual

Nos capítulos anteriores supuzemos que o travamento fôsse igual em tôda a altura do prédio, como é o caso, por exemplo, de vigas de igual momento de inércia e igualmente espaçadas. Este fato se traduz por um valor $\mu = \text{constante}$.

Pode ocorrer entretanto que o travamento se altere com a altura, ou seja, que μ seja $\mu = \mu(x)$.

No caso da equação (17), ela assumiria assim a forma:

$$H'' - \alpha^2(x) H = -\beta(x) \mathcal{M} \quad (37)$$

Conhecidas pois as funções $\alpha^2(x)$ e $\beta(x)$, poder-se-ia achar uma solução aproximada para H , usando o método dos mínimos quadrados.

Tentemos por exemplo uma função:

$$H = H^* \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L}\right) \quad (38)$$

Neste caso teríamos:

$$\int_0^L \left(\frac{4\pi^2}{L^2} H^* \cos \frac{2\pi x}{L} - \alpha^2(x) H^* \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L}\right) + \beta(x) \mathcal{M} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad (39)$$

Desta expressão podemos determinar H^* e assim, através de (38), a função H .

A precisão do resultado poderá ser aumentada usando para H :

$$H = a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) + \dots + a_n \phi_n(x) \quad (40)$$

sendo $\phi_i(x)$ funções linearmente independentes que satisfazem as condições de contorno, isto é: $\phi_i(x) = 0$ para $x=0$; $\phi_i'(x) = 0$ para $x = L$.

Os valores a_i seriam coeficientes a determinar, e que levam ao mínimo o valor da integral:

$$I = \int_0^L \{F(a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + \dots + a_n\phi_n)\}^2 dx, \quad (41)$$

sendo

$$F(\phi_i) = \phi_i'' - \alpha^2(x)\phi_i + \beta(x)\mathcal{M} \quad (42)$$

Então:

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial a_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial I}{\partial a_n} = 0, \quad (43)$$

um sistema de equações que nos permite determinar $a_1, a_2, \dots, a_n$; e assim o valor de H .

IV. Recalques de apoio

Suponhamos que o pilar de ordem i sofra um recalque diferencial Δ_{io} em relação aos demais pilares.

Considerando a figura 4, concluímos:

$$y'\lambda_i + \Delta_{io} + u_A = f + u_B$$

Portanto:

$$f = y'\lambda_i + \Delta_{io} + u_A - u_B = u_i \tau_i \quad (44)$$

Derivando ambos os

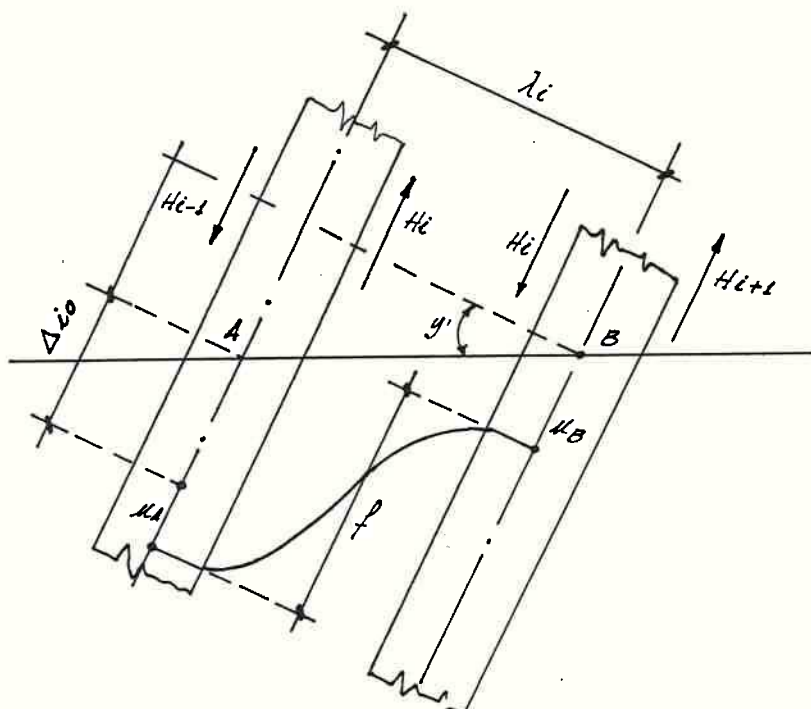


Figura 4

membros de (44) em relação a x vem:

$$\mu_i \tau'_i = \mu_i H''_i = y'' \lambda_i + \frac{du_A}{dx} - \frac{du_B}{dx} \quad (45)$$

Levando em conta (5), (8) e (12), e considerando que $\mathcal{M} = 0$, tem-se:

$$\mu_i H''_i = - \frac{M}{\sum E_j J_j} \lambda_i + \frac{H_i - H_{i-1}}{E_i S_i} - \frac{H_{i+1} - H_i}{E_{i+1} S_{i+1}} \quad (46)$$

Analisando apenas o caso de duas linhas de pilares com $E = \text{constante}$, vem:

$$\begin{aligned} \mu H'' &= \frac{H \lambda^2}{E (J_1 + J_2)} + \frac{H}{E S_1} + \frac{H}{E S_2} \\ &= \frac{H}{E} \left(\frac{\lambda^2}{J_1 + J_2} + \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) \end{aligned}$$

ou seja

$$H'' - \alpha^2 H = 0 \quad (47)$$

A solução desta equação é:

$$H = A \operatorname{sh} \alpha x + B \operatorname{ch} \alpha x \quad (48)$$

Como $H(0) = 0$ resulta $A = 0$.

Portanto:

$$H = B \operatorname{ch} \alpha x \quad (49)$$

Por outro lado:

$$f(L) = \Delta_0 \quad (50)$$

Então:

$$f(L) = \mu \tau(L) = \mu H'(L) = \Delta_0$$

ou

$$\mu B \alpha \operatorname{sh} \alpha L = \Delta_0$$

Assim

$$B = \frac{\Delta_o}{\mu \alpha \operatorname{sh} \alpha L} \quad (51)$$

Resulta pois

$$H = \frac{\Delta_o}{\mu \alpha \operatorname{sh} \alpha L} \operatorname{ch} \alpha x \quad (52)$$

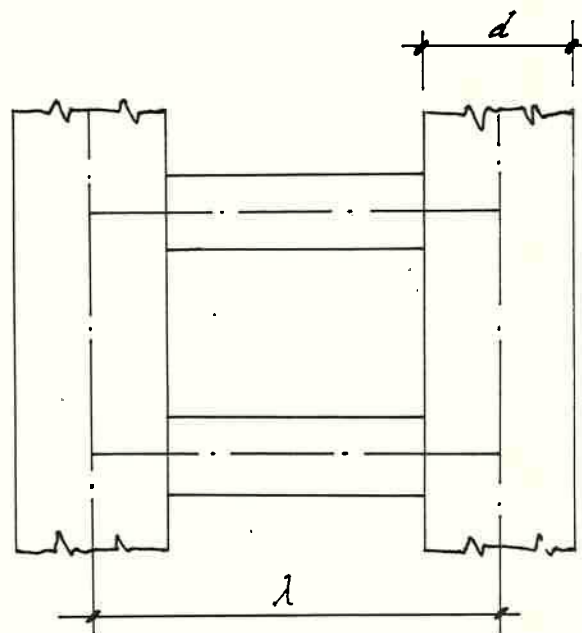
V. Influência da força normal

Esta influência é considerada com a presença das parcelas contendo S_i e S_{i+1} nas expressões (15), (20), (21) e (22). Se tais parcelas forem desprezadas, também estaria desprezada a influência da força normal.

Fácil é pois avaliar este efeito e verificar ser o mesmo de pequena monta.

A diferença de resultados, que aparece quando se confronta com o cálculo do sistema executado como um pórtico, reside na rigidez das vigas.

Sendo grande a largura da coluna d em relação a λ , o travamento se torna mais rígido; fato este não considerado no cálculo do pórtico, onde valem como vãos as distâncias entre os eixos das vigas e colunas, ou sejam, as distâncias entre os nós.



VI. Outras aplicações

Figura 5

Os resultados deste estudo podem ser utilizados no cálculo das vigas compostas; e dentre elas analisemos, a título de exemplo, o caso de uma viga Vierendeel representada

na figura 6, sujeita a um carregamento $q(x)$.

Com as designações anteriormente introduzidas, podemos escrever:

$$M = \mathcal{M} - H \lambda \quad (53)$$

Como a flecha das duas vigas, 1 e 2, é a mesma, vem:

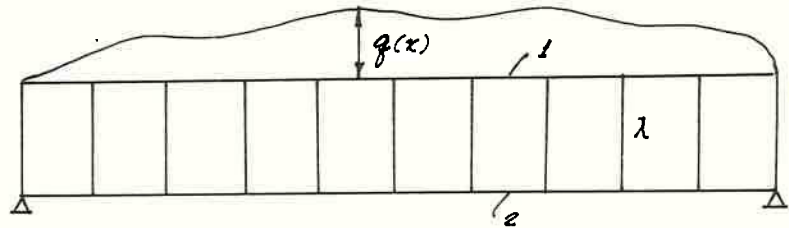


Figura 6

$$- y'' \Sigma EJ = \mathcal{M} - H \lambda \quad (54)$$

Assim:

$$y'' = - \frac{\mathcal{M}}{\Sigma EJ} + \frac{H \lambda}{\Sigma EJ} \quad (55)$$

Então:

$$y^{IV} = - \frac{\mathcal{M}''}{\Sigma EJ} + \frac{\lambda}{\Sigma EJ} H'' \quad (56)$$

Mas

$$H'' - \alpha^2 H = - \beta \mathcal{M} \quad (57)$$

Então resulta:

$$y^{IV} = - \frac{\mathcal{M}''}{\Sigma EJ} + \frac{\lambda}{\Sigma EJ} (\alpha^2 H - \beta \mathcal{M}) \quad (58)$$

$$\begin{aligned} y^{IV} &= - \frac{\mathcal{M}''}{\Sigma EJ} + \frac{1}{\Sigma EJ} (\alpha^2 (\mathcal{M} - M) - \beta \lambda \mathcal{M}) \\ &= - \frac{\mathcal{M}''}{\Sigma EJ} + \frac{1}{\Sigma EJ} (- \alpha^2 M + \mathcal{M} (\alpha^2 - \beta \lambda)) \\ &= - \frac{\mathcal{M}''}{\Sigma EJ} - \frac{\alpha^2 M}{\Sigma EJ} + \frac{\alpha^2 - \beta \lambda}{\Sigma EJ} \cdot \mathcal{M} \end{aligned}$$

Como $y'' \Sigma EJ = - M$, vem:

$$y^{IV} = - \frac{\mathcal{M}''}{\Sigma EJ} + \alpha^2 y'' + \frac{\alpha^2 - \beta \lambda}{\Sigma EJ} \mathcal{M} \quad (59)$$

Se entre as duas vigas, 1 e 2, tivéssemos um travamento rígido ($\mu = 0$), nasceria uma força horizontal $\bar{H}$, dada então por:

$$\bar{H} = \frac{\beta}{\alpha^2} \mathcal{M} \quad (60)$$

De (59) vem:

$$\begin{aligned} y^{IV} - \alpha^2 y'' &= - \frac{\mathcal{M}''}{\Sigma EJ} + \frac{\alpha^2}{\Sigma EJ} \mathcal{M} - \frac{\beta \lambda}{\Sigma EJ} \mathcal{M} \\ &= - \frac{\mathcal{M}''}{\Sigma EJ} + \frac{\alpha^2 \mathcal{M}}{\Sigma EJ} (1 - \frac{\bar{H} \lambda}{\mathcal{M}}) \\ &= - \frac{\mathcal{M}''}{\Sigma EJ} + \frac{\alpha^2 \mathcal{M}}{\Sigma EJ} - \frac{\alpha^2 \bar{H}}{\Sigma EJ} \lambda \\ &= - \frac{\mathcal{M}''}{\Sigma EJ} + \frac{\alpha^2}{\Sigma EJ} (\mathcal{M} - \bar{H} \lambda) \end{aligned} \quad (61)$$

Designamos por $\bar{M}$ a soma dos momentos $\bar{M}_1$ e $\bar{M}_2$ incorporados nas duas vigas, se rigidamente associadas.

Então:

$$\bar{M} = \mathcal{M} - \bar{H} \lambda = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 \quad (62)$$

E se chamarmos de $\bar{y}$ a flecha das duas vigas se rigidamente associadas, teremos:

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= - \bar{y}'' EJ_1 \\ \bar{M}_2 &= - \bar{y}'' EJ_2 \end{aligned} \quad (63)$$

E

$$\bar{M} = - \bar{y}'' \Sigma EJ \quad (64)$$

Voltando a (59), vem:

$$\begin{aligned} y^{IV} - \alpha^2 y'' &= - \frac{\mathcal{M}''}{\Sigma EJ} - \frac{\alpha^2}{\Sigma EJ} \bar{y}'' \Sigma EJ \\ &= - \frac{\mathcal{M}''}{\Sigma EJ} - \alpha^2 \bar{y}'' \end{aligned} \quad (65)$$

Mas

$$E J_0 \bar{y}'' = - \mathcal{M} \quad (66)$$

sendo J_0 o momento de inércia da seção total.

Resulta pois:

$$y^{IV} - \alpha^2 y'' = - \frac{M''}{\Sigma EJ} + \frac{\alpha^2 M}{E J_0} \quad (67)$$

expressão bastante útil para o cálculo das flechas e para a determinação da carga crítica.

No caso em apreço, na suposição de que as vigas, 1 e 2, sejam iguais, o valor de μ seria determinado em se v lendo da figura abaixo.

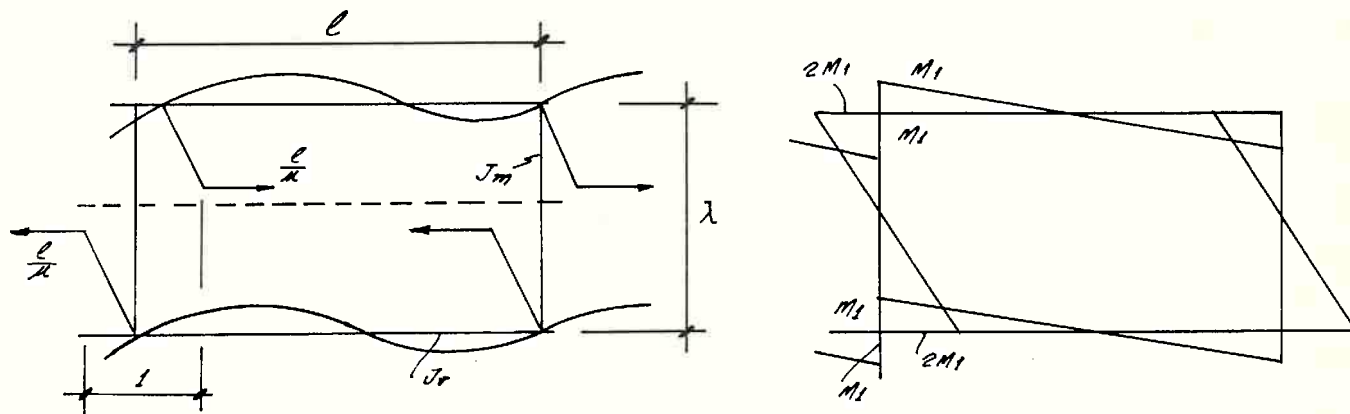


Figura 7

Expressando o trabalho de um painel chega-se a:

$$\mu = \frac{l \lambda^2 \left(\frac{l}{J_v} + \frac{2 \lambda}{J_m} \right)}{24 E}$$

J_v e J_m são, respectivamente, os momentos de inércia das vigas (supostas iguais) e dos montantes.

Outros exemplos poderiam ser mencionados para aplicação d^este método, como o caso das vigas mistas (perfil de aço e concreto armado): ou como o caso da associação de vigas de concreto armado e de concreto protendido.

Bibliografia

1. Ferraz, J.C. de Figueiredo: Caso Particular de Estrutura Sujeita à Ação do Vento. São Paulo, 1966.
2. Franco, Mario: Alguns problemas relativos à ação do vento em edifícios de grande altura. São Paulo, 1966.
3. Rosman, R.: Beitrag zur statischen Berechnung waagerecht belasteter Querwände bei Hochbauten. Bauingenieur, 1960.
4. Karman, T. - Biot, M.A.: Métodos matemáticos em Engenharia. Trad. Livraria Kosmos Editora. 1948.

* * * * *