

ALGUMAS SEQUÊNCIAS POR ITERAÇÃO INVERSA

RENATA GRUNBERG

ORIENTADOR: ELOI MEDINA CALEGO

É conhecido o seguinte resultado que é caso particular do teorema de Banach sobre pontos fixos e contrações (I)

Seja $I \subset \mathbb{R}$, intervalo fechado e limitado e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua e derivável em I .

Se existe uma constante c , $0 < c < 1$ tal que $|f'(x)| < c < 1$, $\forall x \in I$, então, se escolhermos um ponto qualquer $x_0 \in I$ e pusermos $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ..., $x_{n+1} = f(x_n)$, temos que a sequência $\{x_n\}$ converge para algum a e temos que: $f(a) = a$ e a é o único ponto fixo de f . Ou seja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = f(a) \quad \text{e} \quad f(b) = b \Leftrightarrow b = a$$

No Boletim do IMA foi apresentado o seguinte problema:

Seja a sequência $a_0, a_1, a_2, \dots$ definida por: $a_0 = 3$ e para $n \geq 1$ a_n é a única raiz real da equação:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4a_{n-1} = 0$$

$\{a_n\}$ é convergente?

A demonstração foi feita na Mathematical Gazette (II) sendo feita a seguinte generalização:

Seja a sequência $a_0, a_1, a_2, \dots$ definida por:

$$a_0 = p$$

e para $n \geq 1$ a_n é a única raiz real da equação:

$$g(x) = x \cdot (x-p)^{2m} - q^{2m} a_{n-1} = 0 \text{ onde } m \in \mathbb{N} \text{ e } p, q \in \mathbb{R}_+^*$$

com $q^{2m} > (2mp)^{2m} / (2m+1)^{2m+1}$ então a sequência $\{a_n\}$ converge para $p+q$.

Observamos que o problema acima é uma generalização do primeiro problema, basta fazermos: $m=1$

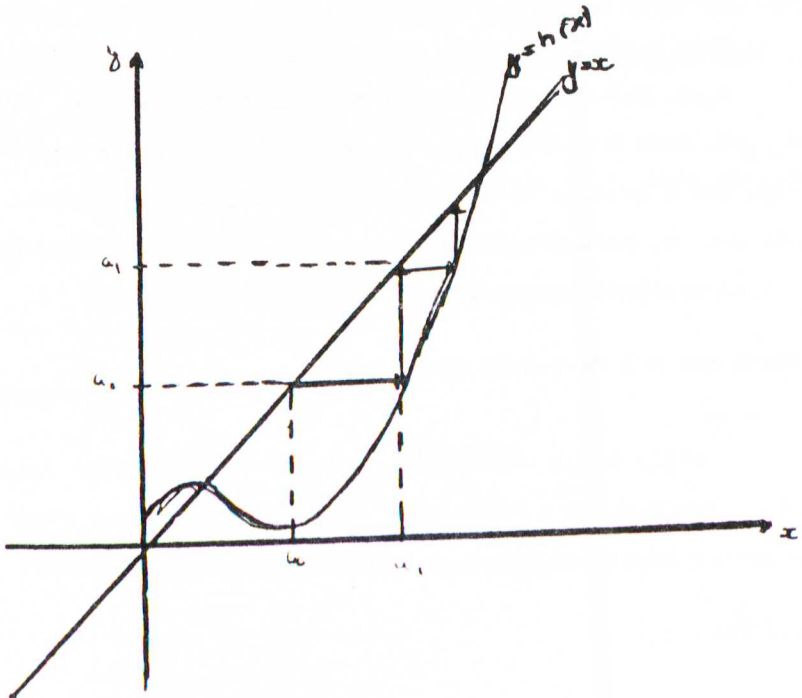
$$p=3$$

$$q=2.$$

- Aspectos do gráfico.

No problema proposto inicialmente, a sequência pode ser ilustrada por meio de um diagrama em escada.

Se $h(x) = \frac{1}{4} (x^3 - 6x^2 + 9x)$ e $a_0 = 3$ então a_1 é escolhido de modo que $h(a_1) = a_0$, $h(a_2) = a_1$ e $h(a_n) = a_{n-1}$. A figura abaixo ilustra o processo, mostrando que $\{a_n\}$ é crescente:



O diagrama acima é familiar em técnicas iterativas onde a seqüência é definida da forma:

$$a \in \mathbb{R}, a_0 = a \text{ e sendo } K: \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a_1 = k(a_0); a_2 = k(a_1), \dots, a_n = k(a_{n-1}).$$

O teorema inicialmente apresentado estabelece as condições de convergência da seqüência.

No caso, porém, a seqüência é definida de "modo contrário": $a_0 = h(a_1)$, $a_1 = h(a_2)$, ..., sendo que h é crescente num intervalo contendo os a_n , $n \in \mathbb{N}$, contínua e portanto inversível, logo a seqüência pode ser definida de modo mais usual:

$a_0, a_1 = h^{-1}(a_0)$, $a_2 = h^{-1}(a_1)$, levando à seguinte generalização:

TEOREMA.

Seja a seqüência $\{a_n\}$ definida por:

$a_0 = p$, $p \in \mathbb{R}$ e para $n \geq 1$ a_n é a única raiz real da equação $h(x) - a_{n-1} = 0$, onde h é uma função crescente, contínua e derivável para $x \geq p$, com o gráfico de h cruzando a reta $y=x$ somente uma vez, no ponto $x=L$, e, para $x < L$, $h(x) < x$.

A seqüência converge para L .

Dem. Temos que h é derivável em L , logo

$$h'(L) = \lim_{x \rightarrow L} \frac{h(x) - h(L)}{x - L} > \lim_{x \rightarrow L} \frac{x - h(L)}{x - L} =$$

já que $x < L \Rightarrow h(x) < x$ ou $x - L < 0 \Rightarrow h(x) < x$ e $x - L > 0 \Rightarrow h(x) > x$

$$= \lim_{x \rightarrow L} \frac{x - L}{x - L} = 1.$$

Logo, temos que $h'(L) > 1$.

Vamos provar que $\{a_n\}$ é crescente.

Se $a_{n-1} < L$ então $h(a_{n-1}) < a_{n-1} = h(a_n)$ como h é crescente $a_{n-1} < a_n$. Por indução, $\forall n$ $a_{n-1} < a_n$.

Seja $f(x) = h'(x) - 1$. Temos que $f(L) = h'(L) - 1 > 0$ logo existe $B(L; \delta)$, $\delta > 0$, tal que $x_0 \in B(L; \delta) \Rightarrow f(x_0) > 0$ (Teorema da conservação do sinal) e portanto $h'(x_0) > 1$. Seja $c_1 = \min\{f'(x_0) / x_0 \in B(L; \delta)\}$ temos que:

$h'(x_0) \geq c_1 > 1$ e como $\forall x, h'(x) > 0$ temos

$$|h'(x_0)| \geq c_1 > 1 \quad (I)$$

Dadas as condições de h sabemos que existe a inversa h^{-1} e que h^{-1} define a sequência de modo habitual. Sendo h contínua e derivável, h^{-1} é contínua e derivável nos pontos onde não se anula. Sabemos que: $(h^{-1})' = \frac{1}{h'}$, logo, usando a desigualdade (I):

$$\left| \frac{1}{h'} \right| \leq \frac{1}{c_1} < 1$$

Seja $c = \frac{1}{c_1}$, temos $|(h^{-1})'| \leq c < 1$, tendo sido satisfeitas as condições do resultado inicialmente apresentado.

Desse resultado, tiramos que $\{a_n\}$ converge. cqd.

BIBLIOGRAFIA:

- (I) Lima, Elon Lages - "Espaços Métricos".
- (II) "Some Sequences by Inverse Iteration" - Clegg, David; Bryant, Victor. Mathematical Gazette, vol. 70, número 454, dez. 1986.