

Introdução ao Estudo do Levantamento do Geóide

por
LYSANDRO VIANNA RODRIGUEZ
Engenheiro Civil

Tese de concurso para provimento da Cadeira nº. 6,
Topografia, Geodésia Elementar e Astronomia de Campo,
da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

1959

ok

SYSNO: 712003

DEDALUS - Acervo - EPEC



31400026637

OK

ESCOLA POLITÉCNICA DA USP
DIVISÃO DE BIBLIOTECA
BIBLIOTECA DE ENGENHARIA CIVIL

PCC

Escola Politécnica da USP
Divisão de Biblioteca

FT-106

S U M Á R I O

- I - Introdução
- II - O geóide
- III - Coordenadas geográficas
- IV - Superfícies de referência
- V - O nivelamento astronômico
- VI - Considerações finais
- VII - Bibliografia

I - INTRODUÇÃO

Desde os primeiros albores da civilização, vem a ciência geográfica desempenhando um papel preponderante no desenvolvimento político, econômico e social dos povos, que jamais puderam prescindir, para seu progresso ou mesmo sobrevivência, de um adequado conhecimento de seus próprios países e de outras regiões visitadas em missão pacífica ou belicosa. Disto temos um frizante exemplo nos rústicos mapas encontrados em tabletas Babilônicas, do século 40 A.C.. Outro exemplo é encontrado na clássica obra de Julio Cesar, que se inicia com a descrição geográfica dos países da Gália.

Idêntica afirmação podemos fazer com referência à observação e interpretação dos fenômenos celestes, que não estiveram ausentes das primitivas concepções religiosas, nem da Mitologia, e a cujo estudo se dedicaram vários dos grandes vultos da Antiguidade. Além do sentido místico despertado pela inigualável majestade do firmamento estrelado e pela imutável sucessão de seus variados aspectos, vem de tempos imemoriais a subordinação consciente da vida humana ao passar do tempo, marcado pelos movimentos aparentes dos astros.

A interdependência entre os climas e as situações geográficas, de um lado, e o movimento e a posição dos

astros, do outro, também não passaram despercebidas aos antigos viajantes e navegantes, que em suas aventurosas empresas tinham na esfera celeste os indispensáveis elementos de orientação. Dêste modo, o anseio por desvendar os mistérios da natureza, através da interpretação e da compreensão de fatos observados, não podia deixar de atrair as atenções de estudiosos e pensadores para as indagações referentes à forma e às dimensões da Terra; nem podia deixar de sugerir-lhes conjecturas e hipóteses que, fugindo às primitivas concepções, melhor se ajustassem a critérios de raciocínio objetivo e prático.

Assim é que Pitágoras atribuía à Terra uma forma esférica simplesmente porque "a esfera é a mais bela das figuras sólidas", ao passo que Aristóteles, justificava o mesmo ponto de vista com o resultado de observações dos eclipses da Lua e dos arcos semi-diurnos em diversas latitudes.

Desta forma já militava Aristóteles no campo científico, mas neste campo haviam tais estudos de assumir, bem depressa, um caráter de alta transcendência, que as contribuições geniais de Newton, Clairaut, Bouguer e muitos outros dos grandes nomes da Geodésia Clássica não vieram senão acentuar, reservando, até os nossos dias, para o domínio da Geodésia Superior as investigações da forma e das dimensões do geóide.

Na realidade, ao procurarmos a solução desse problema através do estudo comparativo dos levantamentos astronômicos e geodésicos, logo verificamos que este método subordina-se a condições bastante críticas de uniformidade,

homogeneidade e precisão que só agora começam a prevalecer. Além disso, tais levantamentos "detêm-se impotentes à margem dos oceanos", para citar a feliz expressão de Pierre Le Jay, de modo que sua aplicação é limitada a uma fração da superfície terrestre.

Outros métodos astronômicos, utilizando os princípios da Mecânica Celeste, permitem a determinação de superfícies geométricas relativamente simples, capazes de representar aproximadamente a superfície terrestre, porém não possuem sensibilidade bastante para revelar em detalhe as ondulações do geóide.

Quanto ao método geofísico, ou mais precisamente o gravimétrico, prende-se menos a essas limitações e presta-se bem para a investigação minuciosa da forma do geóide carecendo, porém, de recursos para a determinação das dimensões, que se necessita buscar nos outros métodos. Deve-se também considerar que, antes do advento dos gravímetros modernos, as vantagens deste método eram grandemente limitadas pelas dificuldades e complexidades instrumentais.

Deste modo, verificamos que nenhum método é suficiente por si só. Pode-se, entretanto, trazer a questão para o campo das aplicações generalizadas e sistemáticas, mediante o adequado aproveitamento dos recursos disponíveis, através da cuidadosa coordenação dos resultados das mais variadas observações. Neste processo, a eficácia depende principalmente da padronização dos métodos de levantamento e, também, da uniformidade de critério em relação a um certo número de parâmetros fundamentais.

A Geodésia entra assim, em uma nova fase de sua longa História. Segundo Georg Strasser:

"... the time has come when we have really ceased to enquire about the figure of the Earth in terms of two or three parameters, and we now seek to show the varied forms of the geoid by contoured charts in terms of any convenient international Standard Reference Spheroid".

Citemos também algumas palavras do discurso de De Graaff-Hunter, inaugurando a XI Assembléia Geral da União Geodésica e Geofísica Internacional (Toronto-1957):

... "Faith in the spheroid truly representing the geoid could only be held by the credulous in face of observational results which denied it. The spheroid must be relegated to the position of a reference figure. "....

... "The geoidal era demands intensive attacks on the precise form of the Earth; for we must prepare for more precise evaluation of the relative position of any points on the Earth's surface; and we must improve determinations in the vertical sense" ...

De fato, se os levantamentos topográficos permitem determinar a posição da superfície do terreno em relação ao geóide; e se podemos referir numericamente o elipsoide de referência (cujos parâmetros são convencionais) a um sistema qualquer de coordenadas no espaço; falta-nos de

terminar a posição dos pontos do geóide em relação a suas projeções no elipsóide, para podermos definir as coordenadas absolutas desses pontos ou a posição precisa de uns em relação aos outros.

Configura-se desta forma o problema fundamental da Geodésia em sua concepção atual, de acordo com a qual procuraremos alcançar uma visão de conjunto de tão interessante tema.

Isto posto, previna-se o leitor de que estamos longe de pretender doutrinar sobre a matéria. Tentaremos, simplesmente, realizar um estudo tão sintético e objetivo quanto possível, tendo em vista o conhecido axioma:

"Qui scribit, bis legit".

Além disto, se alguma esperança mais ousada nos anima, é que, completando o estudo iniciado com a monografia intitulada "O Problema do Datum Geodésico", possamos contribuir para melhor utilização dos levantamentos astronômicos e geodésicos executados em nosso País, dando ao mesmo tempo maior divulgação a esses trabalhos tão arduamente executados.

II - O GEÓIDE

Tratemos inicialmente da definição do geóide: Superfície representativa da forma da Terra, que serve de fato como superfície de referência em Topografia para a representação da superfície do terreno, o Geóide, assim denominado por Listing, é definido como a superfície do nível médio dos mares. Subentende-se, nesta definição, a superfície de equilíbrio da massa líquida sob a ação única da gravidade, abstração feita das várias influências externas, que produzem oscilações ou deslocamentos, como sejam as marés, as vagas e as correntes oceânicas.

Como veremos adiante, tal superfície não admite uma definição geométrica simples, porém identifica-se, fisicamente, com uma superfície equipotencial da gravidade. De fato, em virtude da própria definição dos campos vetorial e potencial, podemos escrever, para um ponto qualquer da superfície, onde o potencial da gravidade seja W :

$$\begin{aligned} g_t &= \frac{\partial W}{\partial t} \\ g_u &= \frac{\partial W}{\partial u} \\ g_v &= \frac{\partial W}{\partial v} \end{aligned} \tag{1}$$

onde g_t , g_u e g_v são as componentes da gravidade segundo três eixos ortogonais quaisquer.

Neste caso, vamos fazer com que os eixos t

e u sejam contidos no plano tangente à superfície no ponto considerado; o eixo y coincidirá então com a normal à superfície no mesmo ponto.

Considerando agora uma curva qualquer (S), contida na superfície temos:

$$\frac{dW}{ds} = \frac{\partial W}{\partial t} \cdot \frac{dt}{ds} + \frac{\partial W}{\partial u} \cdot \frac{du}{ds} + \frac{\partial W}{\partial v} \cdot \frac{dv}{ds} \quad (2)$$

Introduzamos a condição de que a superfície considerada seja a de equilíbrio da massa fluida. É evidente que:

$$g_t = g_u = 0 \quad (3)$$

Por outro lado, sendo o eixo y normal à superfície, logo também normal à curva, resulta que:

$$\frac{dv}{ds} = 0 \quad ; \quad g_v = g \quad (4)$$

donde:

$$\frac{dW}{ds} = 0 \quad ; \quad W = \text{Constante} \quad (5)$$

Sendo isto verdadeiro para qualquer curva contida na superfície de equilíbrio, esta deve ser uma equipotencial, à qual a direção da gravidade é perpendicular em cada um de seus pontos.

Para obtermos, agora, a expressão analítica do potencial, calculemos inicialmente a atração exercida pela massa m , concentrada em um ponto de coordenadas ξ, η, ζ

sôbre um outro ponto, de massa unitária e coordenadas x, y, z , referidas a um sistema que, podendo ser qualquer, suporemos solidário com a Terra e disposto de tal forma que o eixo dos z coincida com o eixo de rotação. Pela Lei de Newton:

$$F = k \frac{m}{r^2} \quad (6)$$

onde k é a constante da gravitação universal
E:

$$r^2 = (x-\bar{x})^2 + (y-\eta)^2 + (z-\bar{z})^2 \quad (7)$$

As componentes dessa força, ao longo dos três eixos de coordenadas, serão:

$$\begin{aligned} F_x &= k \frac{m}{r^2} \frac{x-\bar{x}}{r} \\ F_y &= k \frac{m}{r^2} \frac{y-\eta}{r} \\ F_z &= k \frac{m}{r^2} \frac{z-\bar{z}}{r} \end{aligned} \quad (8)$$

O potencial da atração Newtoniana da massa m no ponto considerado, deverá satisfazer as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial x} &= F_x \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} &= F_y \\ \frac{\partial v_0}{\partial z} &= F_z \end{aligned} \quad (9)$$

Condição esta satisfeita pela expressão:

$$V_0 = \int F dr = Km \int r^{-2} dr \quad (10)$$

Ou:

$$V_0 = - \frac{Km}{r} + C_0 \quad (11)$$

Daf, levando em conta a convenção de sinais, o potencial total da atração Newtoniana, no ponto considerado é definido por:

$$V = K \sum \frac{m}{r} \quad (12)$$

Fixando o triédrio de referência em relação à Terra, devemos levar em conta a rotação do sistema, somando a expressão de uma força centrífuga, perpendicular ao eixo de rotação, tal que:

$$f = \omega^2 R \quad (13)$$

onde:

$$R^2 = X^2 + Y^2$$

Cujas componentes segundo os eixos do triédrio são:

$$f_x = \omega^2 X \quad (14)$$

$$f_y = \omega^2 Y$$

$$f_z = 0$$

E cujo potencial é definido por:

$$U = \int \omega^2 R dR = \frac{1}{2} \omega^2 R^2 \quad (15)$$

De forma que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= f_x \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= f_y \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

O potencial da gravidade é então:

$$W = v + u \quad (17)$$

isto é;

$$W = K \sum \frac{m}{r} + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (18)$$

Esta fórmula evidencia que o potencial, em cada ponto, depende da distribuição de massas na superfície da Terra. Logo, a forma do geóide, que há pouco identificamos com uma superfície equipotencial, somente poderia corresponder a uma expressão matemática simples no caso em que o mesmo sucedesse com a função:

$$\delta = f(x, y, z) \quad (19)$$

onde δ é a densidade na expressão:

$$W = k \iiint \delta \frac{dV}{r} + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) + (C_1 + C_2) \quad (20)$$

à qual podemos assimilar a fórmula (18), substituindo o somatório pela integral e a massa finita m pela massa elementar:

$$dm = \delta \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \delta \cdot dV \quad (21)$$

As irregularidades de distribuição de massas na superfície da Terra são evidentes, sob a forma de relevo orográfico ou submarino, a que se acrescem as diferenças de densidade entre as várias substâncias que compõem a crosta terrestre. Nas camadas superficiais, essas variações de densidade são reveladas pelas sondagens geológicas; nas camadas mais profundas, fora do alcance das sondas, elas são indicadas pela teoria e confirmadas pelas anomalias de gravidade, observadas na superfície, assim como pelas observações sismológicas.

Verdade é que a Teoria Isostática presume existirem, nas camadas profundas, variações de massa ou densidade que tendem a contrabalançar o efeito gravitacional do relevo superficial, contribuindo assim para atenuar a amplitude das ondulações do geóide. Estas, entretanto, mesmo assim, apresentam grande complexidade, que a fórmula (18) permite antever e que vários autores modernos, desde Hayford, têm constatado experimentalmente.

Nestas condições, tratando-se de representar

analiticamente a superfície do geóide, é necessário ir além da relativa simplicidade da forma elipsóidica. Recorrem então os geodestas à mais ampla generalização, por meio de funções harmônicas esféricas, não esquecendo que as variações do raio vetor são relativamente pequenas: o achatamento polar é da ordem de grandeza de três centésimos do comprimento do raio e as demais variações, somadas, não excedem três milésimos desse comprimento. Dessa ordem serão portanto, os coeficientes do desenvolvimento analítico.

Em funções harmônicas esféricas, a superfície do geóide, como a de qualquer esferóide, pode ser representada pela seguinte fórmula geral:

$$\rho = R \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\theta, \lambda) \quad (22)$$

onde:

ρ é o raio vetor contado desde o centro da Terra até a superfície do geóide;

R é um parâmetro linear;

S_n são as funções harmônicas esféricas do tipo mais geral, tendo como variáveis independentes:

θ , a colatitude geocêntrica;

λ , a longitude, contada a partir de uma origem arbitrária.

Cada um dos termos da série representada na fórmula (22) é um polinômio contendo $n + 1$ termos e $2n + 1$ parâmetros numéricos, de sorte que a fórmula geral contém um número infinito de termos e parâmetros, de cuja determinação dependeria a solução do problema em foco. Por

ta nestes termos, a solução seria impraticável.

Devemos então substituir o limite superior do somatório por um limite finito, correspondente a um determinado grau de precisão, visto que sempre podemos fixar uma tolerância de erro, em função das aplicações pretendidas e dos dados previamente fixados. Delimitamos assim o valor da grandeza (no caso, o raio vetor) além do qual podemos considerar desprezíveis as variações.

Na prática, como sabemos, precisamos recorrer ao processo das aproximações sucessivas, que corresponde a fazer variar o limite do somatório à medida que progridem as investigações, até que possamos proceder diretamente, passando à análise harmônica dos resultados das determinações de grandezas que constituem, cada uma delas, a soma de muitos termos, inclusive os erros de observação.

Passamos, assim, à seguinte expressão:

$$\rho = R \sum_{n=0}^{n=q} S_n (\theta, \lambda) \quad (23)$$

Recordemos agora que as funções harmônicas esféricas, por sua vez, podem ser representadas pela seguinte fórmula geral:

$$S_n = \sum_{m=0}^{m=n} A_n^m T_n^m \cos m (\lambda - \lambda_n^m) \quad (24)$$

onde n é o grau e m é a ordem de cada termo;

A_n^m e λ_n^m são os parâmetros característicos de cada termo;

E:

$$T_n^m = \sin^m \theta \frac{d^m}{dp^m} P_n \quad (25)$$

Sendo P_n o polinômio de Legendre de grau n , cuja única variável independente é a colatitude, de acordo com a fórmula geral:

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dp^n} (p^2 - 1)^n \quad (26)$$

onde $p = \cos \theta$.

Isto posto, é evidente que, na expressão de qualquer superfície de revolução, estarão ausentes as funções de ordem superior a zero, reduzindo-se as fórmulas (24) e (25) a:

$$S_n = A_n T_n$$

E:

$$T_n = P_n$$

ou seja:

$$S_n = A_n P_n$$

Além disto, é imediato que:

$$S_0 = P_0 = 1$$

Podemos então escrever a fórmula (23) sob a seguinte forma:

$$\rho = R \left[1 + \sum_{n=1}^{n=q} A_n P_n(\theta) + \sum_{\substack{n=1 \\ m=1}}^{m=n} S_n(\theta, \lambda) \right] \quad (27)$$

Fórmula esta, que adotaremos como expressão analítica do geóide enquanto passamos a algumas considerações indispensáveis quanto às coordenadas geográficas e superfícies de referência.

III - COORDENADAS GEOGRÁFICAS

As coordenadas geográficas desempenham um papel importantíssimo em Geografia e em Cartografia, pois são elas que definem o que se convencionou chamar a "posição" de um ponto na superfície da Terra. Servem, desta forma, como base para a construção de cartas e como auxílio indispensável à navegação. Entretanto, de um modo mais preciso, devemos entender que as coordenadas geográficas definem apenas a direção de uma reta no espaço, em relação a um sistema convencional de referência. A posição de um ponto da superfície da Terra, dada por suas coordenadas geográficas, só tem sentido quando interpretada como o traço da referida reta na superfície aludida.

Assim, para definir matematicamente o ponto, precisamos conhecer não só as suas coordenadas geográficas, referidas a um sistema qualquer de referência, como também a equação da superfície da Terra, em relação ao mesmo sistema.

Se considerarmos o ponto definido por sua projeção vertical sobre o geóide (uma vez que a direção da vertical e a altitude do ponto sobre o geóide são determinadas

pelos processos astronômicos, geodésicos ou topográficos de levantamento), teremos definido a posição do ponto quando forem conhecidos os parâmetros da fórmula (27).

Esses parâmetros não são conhecidos; para sua determinação dependemos, como veremos adiante, do conhecimento das coordenadas geográficas ou das posições de pontos de observação.

Vejamos, então, como definimos e determinamos essas coordenadas.

A latitude é comumente definida como o complemento do ângulo formado pela vertical do ponto de observação com o eixo de rotação da Terra, de modo que os processos de determinação de latitude consistem na medida do ângulo formado por essas duas direções.

Quanto à longitude, define-se como o ângulo diédrico formado pelo plano meridiano que contém o eixo de rotação da Terra e a vertical do lugar, com um outro meridiano origem, arbitrariamente definido em função da vertical de um outro lugar (Greenwich, por convenção universal).

Presume-se, nestas definições, que a vertical e o eixo de rotação da Terra são coplanares, pois só assim essas duas retas poderiam definir o plano meridiano.

Ora, quer se trate de problemas de levantamento ou de navegação, a vertical é determinada instrumentalmente: em navegação, é utilizado o sextante para a observação da linha do horizonte, definindo-se desta forma o plano horizontal; em terra, os instrumentos utilizados são o fio de prumo (que define a vertical) e principalmente os níveis (que definem a tangente à superfície de nível, ou

seja, o plano horizontal). É possível ainda determinar com grande precisão a vertical, por meio de reflexão dos raios luminosos na superfície de um banho de mercúrio, por meio do dispositivo ilustrado na Figura 1. Neste dispositivo, a luz emitida pela fonte F é refletida na lâmina L parcialmente espelhada, iluminando o retículo R , que por sua vez é refletido em C , na superfície do banho de mercúrio, de modo que o observador, colocado em O , vê simultaneamente duas imagens do retículo R . Quando a reta AC é perpendicular à superfície do mercúrio, sendo o ângulo de incidência nulo, o raio refletido coincide com o incidente, de modo que as duas imagens do retículo se confundem. Desta forma, o observador faz realmente uma pontaria para o nadir, cuja precisão fica na exclusiva dependência do poder da luneta.

Nestas condições, seja qual fôr o processo adotado, a vertical assim determinada é perpendicular à superfície do geóide no ponto de observação.

Dá-se se conclui que, sendo irregular a superfície do geóide, a vertical geralmente não intercepta o eixo de rotação da Terra, isto é, essas duas retas não são coplanares.

Do ponto de vista astronômico, a consideração acima é superflua, pois as direções observadas na superfície são consideradas como tendo origem no centro da Terra; salvo pelas correções de paralaxe, sempre pequenas, as dimensões do esferóide terrestre são desprezadas em face das grandes distâncias a que se encontram os corpos celestes; portanto, com maior razão pode ser desprezada a distância

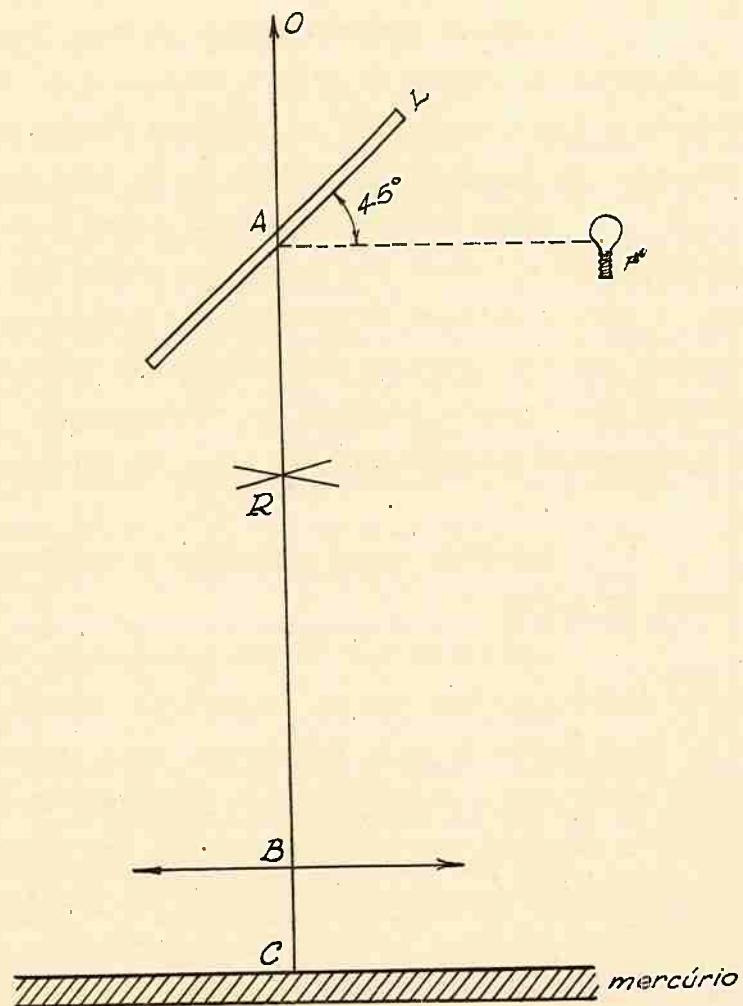


Figura 1

entre a vertical e o eixo de rotação.

Posta a questão nestes termos, reduz-se a Terra a um ponto no centro da esfera celeste e a determinação astronômica das coordenadas geográficas resume-se no problema clássico da resolução do triângulo de posição.

Sobre este não insistiremos, pois é assunto exaustivamente estudado nos trabalhos clássicos, onde encontramos os vários métodos de observações angulares e cronométricas, que nos conduzem aos resultados desejados. Consideraremos resolvido o problema de determinação astronômica das coordenadas geográficas, ou seja, da direção da vertical.

Passemos agora a encarar o problema do ponto de vista geodésico.

Lembrando-nos de que devemos, em Geodésia, considerar distâncias medidas na superfície e muito inferiores ao comprimento do raio terrestre, este precisa ser levado em conta com a maior precisão possível, e o afastamento entre a vertical e o eixo de rotação não poderia deixar de ser levado em consideração. Adota-se, por isso, como representação matemática da superfície terrestre, o elipsóide de revolução a que já fizemos referência no capítulo anterior. Evidentemente, qualquer perpendicular a tal superfície é coplanar com o eixo de rotação.

Nestas condições, de qualquer ponto de observação podemos traçar duas perpendiculares: uma ao geóide, à qual denominamos "vertical", e outra ao elipsóide, à qual chamamos "normal".

Se a vertical e a normal não coincidam, pre-

cisamos distinguir, dentro do conceito de coordenadas geográficas, dois tipos de coordenadas diferentes: as astronômicas, que definem a direção da vertical, e as geodésicas, que definem a direção da normal.

Finalmente, ao ângulo formado pela vertical com a normal dá-se o nome de "desvio de vertical", que utilizaremos adiante como elemento de observação para a determinação do relevo do geóide.

Antes, porém, de passarmos ao levantamento do geóide, convém lembrarmos que a determinação direta da normal, contrariamente ao que ocorre com a vertical, é problema de grande complexidade, como tivemos oportunidade de mostrar na monografia intitulada "O Problema do Datum Geodésico" (1957); depende, como vimos, do levantamento do campo gravitacional terrestre em uma região bastante extensa em torno do ponto considerado, ou de complexas observações lunares.

Assim, temos facilidade em determinar a vertical, porém não a normal; e temos facilidade em determinar a superfície de referência, porém não o geóide. Daí a natural tendência para definir a posição de um ponto, na superfície da Terra, pelo traço da vertical na superfície de referência.

Aplicado este critério, o desvio da vertical surge como um erro de posição, dada pelas fórmulas:

$$\Delta X = M\eta$$

$$\Delta Y = N\zeta$$

onde:

ΔX e ΔY são as componentes do erro de posição segundo o meridiano e o primeiro vertical, respectivamente;

M e N são os raios de curvatura, também segundo o meridiano e o primeiro vertical, respectivamente;

η e ζ são as componentes do desvio de vertical, ainda segundo os planos do meridiano e do primeiro vertical.

Ora, como sabemos, as concessões que fazemos no cálculo dos levantamentos topográficos e a propagação relativamente rápida dos erros nesses levantamentos, tornam necessário que os mesmos sejam apoiados em pontos de controle, independentemente determinados por métodos de maior precisão.

Devido aos erros de posição, acima referidos, as coordenadas astronômicas não satisfazem plenamente a essa finalidade, salvo em levantamentos a pequena escala ou de baixa precisão. Nos demais casos, é necessário recorrermos ao levantamento geodésico, sobre cujas características é desnecessário insistirmos e de cuja comparação com os astronômicos resulta o método de levantamento do geóide que vamos examinar.

Mesmo nos levantamentos geodésicos da mais alta precisão, é impossível evitar a propagação dos erros das medições angulares, que se refletem nos comprimentos e azimutes dos lados calculados.

Para evitar a excessiva propagação dos erros li-

neares, ou seja, para contrôlê da escala, é usual medir-se bases, a espaços regulares.

Para contrôlê da orientação, é necessário determinar, também a intervalos regulares, o azimute de um dos lados da triangulação.

Ora, a determinação direta do azimute geodésico não é possível, pela dificuldade que encontramos em definir a normal. Determinamos então o azimute astronômico.

Para estabelecer a relação entre o azimute astronômico e o geodésico, consideremos a Figura 2.

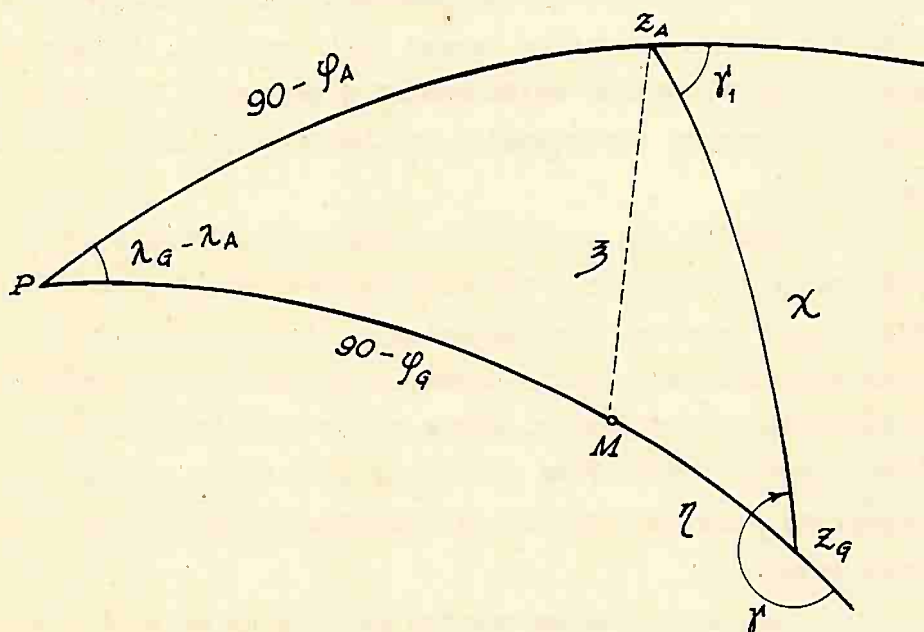


Figura 2

Sejam, na esfera celeste:

$\underline{Z_A}$ e $\underline{Z_G}$ o zenite astronômico e o zenite geodésico de um ponto de observação $\underline{M}$

$\underline{P}$ o polo norte

$\underline{PZ_A}$ a colatitude astronômica

$\underline{PZ_G}$ a colatitude geodésica

Supondo agora que Z_G esteja a oeste de Z_A , e que as longitudes sejam contadas de leste para oeste, de acôrdo com a convenção usual, o ângulo no polo será a diferença de longitude, isto é:

$$Z_G \hat{P} Z_A = \lambda_g - \lambda_A$$

O desvio de vertical é o arco

$$\widehat{Z_A Z_G} = \chi$$

De forma que, projetando Z_A sobre o arco $P Z_G$, no ponto $\underline{M}$ e chamando γ o azimuth geodésico do arco $Z_G Z_A$, contado como de hábito a partir do sul, vamos encontrar:

$$\overline{Z_G M} = \eta - \chi \cos \gamma$$

$$\overline{Z_A M} = \xi = -\chi \sin \gamma$$

No triângulo retângulo $P Z_A M$, de acôrdo com a lei dos senos, temos:

$$\sin \xi = \sin (\lambda_g - \lambda_A) \cos \phi_A$$

Ou, tendo em vista que o desvio de vertical é sempre um arco muito pequeno, de modo que podemos confundir os senos com os arcos:

$$\mathcal{Z} = (\lambda_g - \lambda_A) \cos \phi_A$$

Quanto à componente do desvio de vertical segundo o meridiano, podemos escrever:

$$\eta = (90 - \phi_g) - (90 - \phi_A) \cos(\lambda_g - \lambda_A)$$

Ou, desenvolvendo o coseno:

$$\eta = (90 - \phi_g) - (90 - \phi_A) \left[1 - \frac{(\lambda_g - \lambda_A)^2}{2\rho^2} + \dots \right]$$

Sendo ρ o valor de um radiano em segundos, para $(\lambda_g - \lambda_A)$ em segundos.

Sendo pequeno o desvio de vertical, como já vimos, podemos desprezar os termos de segunda ordem, de modo que:

$$\eta = (90 - \phi_g) - (90 - \phi_A) = \phi_A - \phi_g$$

Sendo agora γ_1 o azimute astronômico de $Z_A Z_G$, também contado a partir do sul, temos as seguintes igualdades que nos dão os ângulos internos do triângulo ..

P $Z_A Z_G$:

$$P Z_A Z_G = \pi - \gamma_1$$

$$P Z_G Z_A = \gamma - \pi$$

Visto isto, podemos escrever, no triângulo ..

P Z_A Z_G:

$$\operatorname{sen}(\gamma' - \pi) \cotg(\pi - \gamma'_1) = \cotg\left(\frac{\pi}{2} - \phi_g\right) \operatorname{sen} \chi - \cos \chi \cos(\gamma' - \pi)$$

Reduzindo ao primeiro quadrante:

$$\operatorname{sen} \gamma' \cotg \gamma'_1 = \operatorname{tg} \phi_g \operatorname{sen} \chi + \cos \chi \cos \gamma'$$

Donde, dividindo por $\operatorname{sen} \gamma'$:

$$\cotg \gamma'_1 = \operatorname{cosec} \gamma' \operatorname{tg} \phi_g \operatorname{sen} \chi + \cos \chi \cotg \gamma'$$

Substituindo

$$\operatorname{sen} \chi = \chi \quad \text{radianos}$$

$$\cos \chi = 1$$

Vem:

$$\cotg \gamma'_1 = \chi \operatorname{cosec} \gamma' \operatorname{tg} \phi_g + \cotg \gamma'$$

ou

$$\cotg \gamma' - \cotg \gamma' = \chi \operatorname{tg} \phi_g \operatorname{cosec} \gamma' \quad (28)$$

Ora,

$$\cotg \gamma'_1 - \cotg \gamma' = \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma'_1} - \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma'} = \frac{\operatorname{tg} \gamma' - \operatorname{tg} \gamma'_1}{\operatorname{tg} \gamma'_1 \operatorname{tg} \gamma'}$$

onde, de acordo com a fórmula trigonométrica elementar da tangente da soma de dois ângulos:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_1 = \operatorname{tg}(x - x_1)(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x_1)$$

Substituindo, vem:

$$\operatorname{cotg} x_1 - \operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{tg}(x - x_1)(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x_1)}{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} x_1}$$

como

$$\operatorname{tg} x \approx \operatorname{tg} x_1$$

Podemos escrever:

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x_1 \approx \operatorname{tg}^2 x$$

E visto que:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

vem:

$$\operatorname{cotg} x_1 - \operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{tg}(x - x_1) \sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$$

ou seja,

$$\operatorname{cotg} x_1 - \operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{tg}(x - x_1)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Ou, relembrando que:

$$x \approx x_1 + \pi$$

e confundindo o arco com a tangente:

$$\operatorname{cotg} x_1 - \operatorname{cotg} x = \frac{x - x_1 - \pi}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Comparando com a fórmula (28), vamos encontrar:

$$\gamma - \gamma_1 = \chi \operatorname{tg} \varphi_g \operatorname{sen} \gamma + \pi \quad (29)$$

Admitindo agora que do ponto M é visado um outro ponto geodésico N, sendo:

- α_A o azimute astronômico da visada M N
- α_g o azimute geodésico da mesma visada
- γ a distância zenital do ponto N, visto do ponto M.

De acôrdo com a Figura 3, podemos escrever:

$$\operatorname{sen}(\alpha_g - \gamma) \operatorname{cotg}(\alpha_A - \gamma_1) = \operatorname{cotg} \gamma \operatorname{sen} \chi + \cos \chi \cos(\alpha_g - \gamma)$$

Existe assim uma evidente analogia entre os triângulos $P Z_A Z_G$ e $N Z_A Z_G$, em virtude da qual podemos à vista da fórmula (29), escrever:

$$\gamma' = \alpha_g + (\gamma - \alpha_g) + (\pi - \alpha_g)$$

$$\gamma'_1 = \alpha_A - (\alpha_A - \gamma_1) + (\pi - \alpha_A)$$

$$\gamma' - \gamma'_1 = \chi \operatorname{cotg} \gamma \operatorname{sen} \gamma' + \pi$$

ou seja, substituindo:

$$(\alpha_A - \gamma'_1) - (\alpha_g - \gamma') = \chi \operatorname{cotg} \gamma \operatorname{sen}(\alpha_g - \gamma') + \pi$$

Donde se deduz:

$$(\alpha_A - \alpha_g) = (\gamma'_1 - \gamma') + \chi \operatorname{cotg} \gamma \operatorname{sen}(\alpha_g - \gamma') + \pi$$

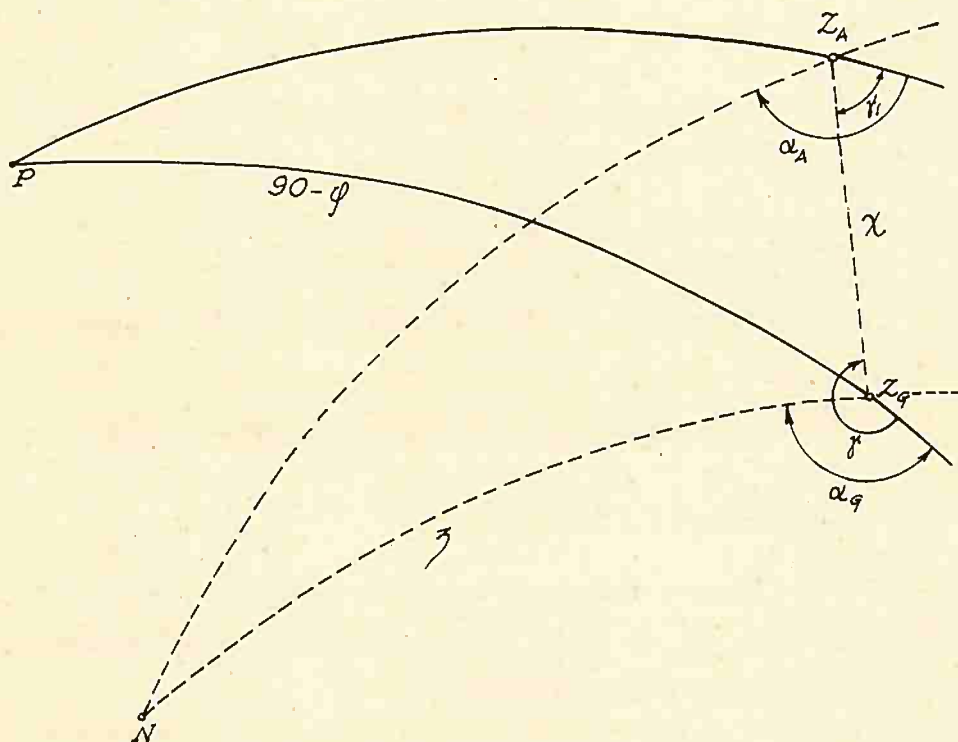


Figura 3

As visadas geodésicas são aproximadamente ho
rizontais, de modo que podemos considerar:

$$\beta \approx 90^\circ$$

$$\cot g \beta \approx 0$$

Substituindo $(t_1 - t')$ pelo seu
valor em (29), vem:

$$\alpha_A - \alpha_g = -\chi \operatorname{tg} \phi_g \operatorname{sen} \delta'$$

Ora,

$$-\chi \operatorname{sen} \delta' = \beta$$

donde:

$$\alpha_A - \alpha_G = \bar{\lambda} \operatorname{tg} \varphi_G$$

porém,

$$\bar{\lambda} = (\lambda_G - \lambda_A) \cos \varphi_A$$

donde:

$$\alpha_A - \alpha_G = (\lambda_G - \lambda_A) \cos \varphi_A \operatorname{tg} \varphi_G$$

Como surgem aqui, no mesmo termo, a latitude astronômica e a geodésica, vamos diferenciar esta fórmula para estimar o erro que faríamos substituindo uma pela outra:

Para $d\varphi$ em segundos:

$$d(\alpha_A - \alpha_G) = (\lambda_G - \lambda_A) \sec \varphi d\varphi \operatorname{sen} 1'' + (\lambda_G - \lambda_A) \operatorname{tg} \varphi \operatorname{sen} \varphi d\varphi \operatorname{sen} 1''$$

O primeiro termo do segundo membro desta fórmula nos dá o erro cometido substituindo a latitude geodésica pela astronômica; o segundo nos dá o erro cometido substituindo a latitude astronômica pela geodésica.

Introduzindo os valores numéricos:

$$\lambda_G - \lambda_A \leq 15''$$

$$1 \geq \sec \varphi \geq 1.21$$

$$0 \leq \operatorname{tg} \varphi \leq 0.70$$

$$0 \leq \operatorname{sen} \varphi = 0.57$$

$$d\varphi \leq 15'' = \varphi_A - \varphi_G$$

$$\operatorname{sen} 1'' = 485 \times 10^{-8}$$

E substituindo encontramos:

$$d(\alpha_A - \alpha_G) \leq 225 \times 1.21 \times 485 \times 10^{-8} + 225 \times 0.70 \times 0.57 \times 485 \times 10^{-8}$$

ou seja:

$$d(\alpha_A - \alpha_G) \leq (128041 + 8489) \times 10^{-8}$$

Êstes erros são desprezíveis, muito inferiores aos erros de observação. Podemos portanto considerar a latitude, na fórmula anterior, indiferentemente astronômica ou geodésica. Consequentemente, podemos escrever:

$$\alpha_A - \alpha_G = (\lambda_G - \lambda_A) \operatorname{sen} \varphi$$

ou

$$\alpha_G = \alpha_A + (\lambda_A - \lambda_G) \operatorname{sen} \varphi$$

Esta é a fórmula de Laplace, de uso corrente. Ela nos permite passar do azimuth astronômico para o geodésico, de forma a limitar a propagação do erro azimuthal nas triangulações. Exige, entretanto, a determinação da longitude e do azimuth astronômico em determinados pontos geodésicos, os quais tomam então o nome de pontos de Laplace.

Como vimos, não é necessária a determinação da latitude, mas é usual determiná-la também, para fins de estudos do Geóide, a que nos dedicaremos mais adiante, utilizando alguns dos pontos de Laplace existentes na triangulação do País.

IV - SUPERFÍCIES DE REFERÊNCIA

Como vimos há pouco, os estudos em que estamos empenhados visam a determinação de valores da função

$$F(\rho, \theta, \lambda)$$

que possam vir a ser utilizados, oportunamente, na determinação analítica dos parâmetros da fórmula (27) e que permitam, desde logo, a representação gráfica da superfície do geóide, à medida que se forem acumulando os resultados das investigações.

Ora, não só o centro, como o interior da Terra, além de profundidades relativamente pequenas, são virtualmente inacessíveis, à observação, de forma que a determinação do raio vetor só é possível por métodos indiretos, dependentes de observações realizadas na superfície. Dêste modo, é intuitiva a necessidade de uma superfície de referência, próxima do geóide, na qual possamos projetar posições, distâncias e direções observadas sobre o terreno, afim de investigar as correlações entre êsses dados e as incógnitas do problema. Nada mais natural, por outro lado, que adotar-se, como superfície de referência, aquela definida pelos termos da fórmula (27) cujos parâmetros possamos determinar "a priori", ainda que aproximadamente, nos casos em que não fôr possível fazê-lo de forma rigorosa.

Não há propriamente novidade nisto; apenas

maior rigor nas definições, estabelecendo distinção entre o geóide, na acepção de Listing, e superfícies geometricamente simples que dele se aproximam, e que podemos definir com aproximação cada vez maior, à medida que evoluem os nossos conhecimentos. É evidente, porém, que essa distinção tem decisiva importância para a solução completa do problema, colocando a nosso alcance a fase final do longo processo de aproximações sucessivas, em que tão importante papel desempenharam os ensinamentos de Ptolomeu e Aristóteles, as medidas de Eratóstenes, a teoria de Newton e os trabalhos dos sábios da Academia de França, completados pelas extensas investigações desenvolvidas pelos geodestas modernos.

Estabelecida essa distinção, podemos escrever:

$$\rho = \rho_0 + N \quad (30)$$

onde ρ_0 é o raio vetor da superfície de referência, incluindo determinados termos da fórmula (27), segundo o critério adotado na própria definição; e N é o segmento do raio vetor do geóide compreendido entre este e a superfície de referência, encerrando todos os outros termos da fórmula (27).

Evidentemente, uma vez adotada a fórmula da superfície de referência, a determinação ^{de} ρ_0 em função de θ e λ resume-se em uma simples questão de cálculo numérico. O problema em cujo estudo estamos interessados fica limitado à determinação do segmento N .

Vejamos, pois, como determinaremos os parâmetros da superfície de referência:

Històricamente, a primeira tentativa nesse sentido foi a célebre medição de Eratóstenes (276 - 196 A.C.) que não pode deixar de merecer uma referência especial, tendo-se em vista que o mesmo método veio a ser utilizado um século mais tarde por Poseidonio e dezenove séculos mais tarde por Picard, no continente Européu. Deve-se considerar que, no tempo de Eratóstenes, grandes dificuldades se opunham às expedições geográficas, de modo que seus cálculos foram baseados, de uma parte, em suas próprias observações da altura do sol em Alexandria, porém de outra parte dados estimativos quanto à distância e à diferença de longitude entre Alexandria e Syenê, presumindo-se, ademais, a passagem do sol pelo zenite desta última localidade, por ocasião do solstício de verão, uma vez que, nesse dia, todos os anos, os raios do sol iluminavam o fundo dos poços, por mais profundos que fossem.

Não seria, pois, o caso de alimentarmos ilusões quanto à precisão da medição de Eratóstenes, ou da de Poseidonio, também baseada em dados estimativos. Indubitavelmente, a exatidão dessas estimativas era insuficiente para revelar qualquer das irregularidades do geóide, inclusive o próprio achatamento polar. Ainda no caso oposto, isto é, na eventualidade de que a precisão fôsse comparável à que hoje se obtém na determinação das coordenadas astronômicas e na medição das distâncias geodésicas, é claro que uma determinação isolada do raio de curvatura padeceria da mesma limitação, permitindo apenas uma determinação aproximada do primeiro termo da fórmula (27).

Teòricamente, seriam necessárias, no mínimo,

tantas determinações do raio de curvatura, em regiões diversas e convenientemente situadas, quantos fôsse os parâmetros a determinar. Na prática, são necessárias determinações muito mais numerosas, pois cada uma delas é afetada pelas irregularidades locais do geóide, além dos inevitáveis erros de observação, que finalmente conduzem o geodesta ao problema de cálculo da interpolatriz para um determinado número de valores de uma função cuja forma é previamente convencionalizada. Neste aparente paradoxo, citando Daly:

"... The figure of the Earth has to be assumed in order to find the figure of the Earth"

Assim, neste processo, os termos da série não incluídos na fórmula convencional da superfície de referência somam-se aos erros das observações e com eles se confundem, tratados indistintamente, uns e outros, como erros acidentais. Ora, não é provável que as irregularidades do geóide se comportem como erros acidentais, senão quando considerados em conjunto sobre toda a superfície do geóide, ou pelo menos grande parte dela. Toda vez que aplicarmos este processo de cálculo a uma porção limitada da superfície terrestre, será prudente contarmos com a probabilidade de erros sistemáticos, de natureza regional, não evidenciados pelos resíduos apurados em relação aos valores mais prováveis dos parâmetros calculados.

De fato, o próprio Hayford pôs em evidência a existência de termos harmônicos de período comparável com a extensão do território estudado, ao demonstrar que a superfície do geóide tende a acompanhar, com amplitude ate-

nuada, os grandes acidentes geográficos, em compreensível decorrência de seu efeito gravitacional.

Dentro dos limites da área considerada na investigação (que foi, para Hayford, o território dos Estados Unidos da América), as irregularidades locais, devidas à atração das massas situadas na imediata vizinhança de cada ponto, dão origem a termos que na falta de expressão mais adequada, chamaremos "de curto período"; estes termos tendem a assumir comportamento comparável com a distribuição normal de erros acidentais. O mesmo, porém, não ocorre com os termos "de longo período", citados antes; estes introduzem, nos resultados da investigação, influências sistemáticas, de natureza regional, quer seja aplicado o método dos arcos, ou o célebre método das áreas, cujas vantagens Hayford soube tão bem acentuar.

Nestas condições, além das influências locais, que pouco ou nada interferem na determinação dos parâmetros da superfície de referência, devemos contar com a presença, em cada valor de N , de termos de pequeno grau cuja lenta variação pouco se manifesta em áreas reduzidas, porém atinge valores significativos entre pontos situados a grandes distâncias, sujeitos a influências diversas da atração das grandes massas continentais. Em face, porém, do que ficou dito antes, importa não perder de vista que uma parcela desses termos estará também presente, sob a forma de erros sistemáticos, nos valores dos parâmetros da superfície de referência, que assim não podemos considerar definidos, em última análise, para a expressão analítica do geóide, senão quando dispuzermos do levantamento total da superfície ter-

restre. Até então, devemos contentar-nos com determinações parceladas, referidas à superfície arbitrariamente de finida por valores provisórios dos parâmetros principais, de acôrdo com a fórmula (27).

Idênticas considerações aplicam-se à investigação da forma do geóide, ou da superfície de referência, com o auxílio das observações da aceleração da gravidade. Antes, porém, de entrarmos neste assunto, vamos investigar a precisão numérica resultante da aplicação do método astronômico-geodésico à determinação da superfície de referência, à parte as considerações anteriores.

Com relação ao raio de curvatura, podemos escrever, limitando-nos ao primeiro termo do desenvolvimento:

$$R = \frac{D}{\gamma}$$

onde $\frac{R}{D}$ é o raio de curvatura;

$\frac{D}{\gamma}$ é o comprimento do arco geodésico, medido na superfície terrestre;

γ é o ângulo formado pelas normais à superfície nas duas extremidades do arco.

Diferenciando, vamos encontrar, após transformações elementares:

$$\frac{dR}{R} = \frac{dD}{D} + \frac{d\gamma}{\gamma} \quad (31)$$

Assimilando γ ao ângulo formado pelas direções das verticais, determinadas por observações astronômicas, ponhamos de parte provisoriamente os erros de estação, causados pelos desvios de vertical; estes, como sabe-

mos, podem ser representados pela derivada do segmento N em relação ao arco determinado na superfície de referência pela sua intercessão com o plano definido pela vertical (perpendicular ao geóide) e pela normal (perpendicular à superfície de referência). Isto é:

$$\chi = \frac{dN}{dS} \quad (32)$$

A hipótese, provisoriamente adotada, corresponde, portanto, a:

$$N = \text{Constante}$$

ou seja, a ausência de anomalias.

De acordo com este pressuposto, é que vamos encarar a influência dos erros de observação propriamente ditos, admitindo que possamos, em cada ponto astronômico, definir a direção da vertical com erro igual a $0.1''$, pois esta é a tolerância de erro provável adotada nas especificações internacionais para determinações astronômicas de primeira ordem.

Para o ângulo formado por duas verticais, teríamos assim:

$$d\gamma \approx 0,1''\sqrt{2} \quad (33)$$

Vemos que este termo varia na razão inversa da distância. Impõe-se, portanto, neste processo, a utilização de grandes distâncias, cuja determinação só é possível indiretamente.

Ora, o processo clássico, em Geodésia, para a determinação indireta de distâncias é a triangulação, de for

ma que a estimativa do erro dD exigiria, a rigor, um completo estudo dos erros de várias naturezas que afetam as observações geodésicas. Tal estudo não cabe, evidentemente, no plano desta modesta monografia, de modo que forçoso é contentarmo-nos com um exame resumido e esquemático da questão.

Lembremos, inicialmente, que na medição das bases geodésicas de primeira ordem tolera-se o erro provável de um milionésimo como o limite dos erros acidentais. Para atendermos à possibilidade de erros sistemáticos, que não é possível eliminar totalmente, e atendermos também à probabilidade de erros superiores ao provável, devemos adotar, como é usual:

$$e_M = 3e_p \quad (34)$$

onde:

e_M é o erro máximo a temer
 e_p é o erro provável

Chegamos assim a admitir um erro de 3 milionésimos, que se propagará uniformemente a todos os lados calculados a partir da base.

Além desse erro, devemos levar em conta a influência dos erros cometidos na medição dos ângulos utilizados no cálculo das distâncias, e para isto, atendendo a definições bem conhecidas, vamos admitir que esses erros se acumulem proporcionalmente à raiz quadrada do somatório dos módulos de rigidez de figura. Isto posto, podemos escrever, para um ponto qualquer de uma cadeia de triangulação:

$$\sum \frac{d\ell}{\ell} = \frac{2e''}{M \times 10^6} \sqrt{\frac{\sum R}{3}} \quad (35)$$

onde:

$\frac{dl}{l}$ é o erro relativo do comprimento de um lado

e'' é o erro médio de uma direção observada

M é o módulo do sistema de logarítmos decimais

$\sum R$ é o somatório dos módulos de rigidez, dados pela fórmula usual:

$$R = \frac{D-C}{D} \sum (\delta_B^2 + \delta_C^2 + \delta_B \delta_C) \quad (36)$$

Na fórmula (35) presume-se que os valores de $\sum R$ e $\frac{dl}{l}$ são acumulados a partir da mesma base.

Para uma estimativa de e'' , nas triangulações de primeira ordem, podemos utilizar o valor médio dos erros angulares de fechamento dos triângulos, para o qual é adotada a tolerância de um segundo de arco. Tendo em vista que a soma dos três ângulos de um triângulo depende de suas direções, temos então:

$$e'' = \frac{1''}{\sqrt{6}} \approx 0.41'' \quad (37)$$

Outro critério de que podemos servir-nos é a comparação dos comprimentos medidos nas bases com os comprimentos calculados a partir de bases contíguas. Segundo Simmons, o valor médio relativo dessa discrepância, na triangulação dos Estados Unidos da América, vem sendo:

$$\frac{1}{75.000} = 13.33 \times 10^{-6}$$

No Brasil, infelizmente, a triangulação geo-

década de âmbito nacional data de época bem recente, de modo que não dispomos ainda de um ajustamento de conjunto nem de elementos estatísticos suficientemente precisos.

Quanto a ΣR , adotemos o seu limite desejável, que as especificações do Instituto Pan-Americano de Geografia e História fixam em 80 unidades da sexta casa decimal. Temos assim, por substituição na fórmula (35):

$$13.33 = \frac{2e''}{0.4343} \sqrt{\frac{80}{3}}$$

donde:

$$e'' = 0.56''$$

Como vemos, é satisfatória a concordância entre os valores encontrados acima. O fato de ser maior o valor de e'' deduzido das discrepâncias entre as bases medidas e calculadas pode ser atribuído, pelo menos em parte, à possibilidade de encontrarem-se as duas bases, que influem na comparação, a diferentes alturas relativamente à superfície de referência, circunstância esta cuja influência não se faz sentir nas equações angulares.

Adotemos então, o valor:

$$e'' = 0.56''$$

Isto não só para evitarmos um critério otimista, como também porque esse valor resulta de considerações mais diretamente ligadas à finalidade que temos em vista. Feito isto, podemos escrever:

$$\sum \frac{dl}{l} = 1.49 \sqrt{\Sigma R} \times 10^{-6} \quad (38)$$

Vindo ΣR em unidades da sexta casa decimal, como de há-

bito.

Se convencionarmos adotar também o milionésimo como unidade de erro relativo, podemos escrever, mais simplesmente:

$$\sum \frac{d\ell}{\ell} = 1.49 \sqrt{\sum R} \quad (39)$$

Considerando agora um arco de triangulação compreendido entre duas bases, A e B , vamos representar o erro total do comprimento de um lado por uma das fórmulas:

$$Y = \pm [3 \pm 1.49 \sqrt{X}]$$

ou

(40)

$$Y_1 = \pm [3 \pm 1.49 \sqrt{X-x}]$$

onde estamos representando por x o valor de $\sum R$ desde a base A até o lado considerado, e por X o $\sum R$ desde a base A até a base B . É óbvio que a primeira fórmula refere-se ao erro relativo do comprimento calculado a partir da base A , e a segunda ao erro relativo do comprimento calculado a partir da base B . É evidente também a simetria em relação a um ponto de abscissa:

$$x = \frac{X}{2}$$

Para maior facilidade de raciocínio, podemos admitir que calculássemos o comprimento de cada lado a partir da base mais próxima. É fácil perceber que a discrepância entre as bases seria apurada em um determinado lado, o mais aproximadamente equidistante dos dois extremos, em termos de $\sum R$. É claro também que a discrepância seria

igual à diferença entre os erros acumulados a partir de cada extremo, o que põe em evidência a possibilidade de discrepâncias muito menores que os erros presentes, dependendo do sinal dos mesmos. Isto tem importância em nosso raciocínio, para mostrar que o processo de ajustamento da triangulação, cujo escopo é anular as discrepâncias apuradas em relação a determinadas condições geométricas, não implica necessariamente na eliminação ou na compensação dos erros de observação, de forma que, antes como depois do ajustamento, o erro a temer será maior para os pontos mais afastados das bases, devendo apresentar-se com seu valor máximo no ponto médio de cada trecho compreendido entre duas bases.

De acordo com esta ordem de idéias, e guardando coerência com o critério anteriormente esboçado, de atender às condições mais desfavoráveis, vamos admitir que o erro relativo médio, aplicável ao cálculo da distância entre as duas bases, seja dado por:

$$\frac{dD}{D} = \frac{2}{X} \int_0^{\frac{X}{2}} [3 + 1.49x^{\frac{1}{2}}] dx \quad (41)$$

donde

$$\frac{dD}{D} = 3 + 0.7 X^{\frac{1}{2}} \quad (42)$$

Teríamos, desta forma:

$$\text{Para } X = 60 : \frac{dD}{D} = 8.4$$

$$\text{Para } X = 80 : \frac{dD}{D} = 9.3$$

$$\text{Para } X = 100 : \frac{dD}{D} = 10.0$$

Para obtermos o erro relativo médio para vários trechos consecutivos, cada um dos quais compreendido entre duas bases, de acordo com a fórmula clássica de propagação do erro, podemos escrever:

$$\frac{dD}{D} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} (3 + 0.7 X^2) \quad (43)$$

onde n é o número de bases existentes na distância total considerada.

Afim de representar a fórmula acima, comparativamente com o erro angular, em função da distância, adotamos como valores médios 80 milionésimos para o valor de ΣR e 200 Km para a distância entre bases. Resulta o seguinte quadro:

D	$n-1$	$\frac{dD}{D}$	$\frac{d\gamma}{\gamma}$	$\frac{dR}{R}$
200	1	9,3	21,8	31,1
400	2	7,6	10,8	18,4
600	3	6,2	7,2	13,4
800	4	5,4	5,4	10,8
1000	5	4,8	4,3	9,1
1200	6	4,4	3,6	8,0
1600	8	3,8	2,7	6,5
2000	10	3,4	2,2	5,6

Êstes dados seriam aplicáveis à hipótese de que as observações fossem realizadas diretamente sobre a superfície de referência, ou a esta fossem reduzidas por meio

de correções apropriadas. A primeira destas alternativas é obviamente irrealizável. A segunda será praticável, a rigor, somente quando conhecermos suficientemente o relêvo do geóide, em relação à superfície de referência. Enquanto faltar êsse conhecimento, teremos que contentar-nos com a redução ao geóide das observações realizadas na superfície do terreno. Esta é possível porque as operações de nivelamento nos fornecem virtualmente as distâncias entre o terreno e o geóide. Temos assim, que a ausência das correções de redução à superfície de referência influe forçosamente nos resultados das observações, no sentido de aumentar os respectivos erros. Ao mesmo tempo, só de forma um tanto insegura podemos estimar essa influência, enquanto faltarem os elementos cuja ausência admitimos há pouco.

No que se ferere à direção das normais, isto é, ao ângulo γ , sabemos que os erros de estação podem ser muitas vezes superiores aos erros de observação; quanto aos erros dos comprimentos das bases, a correção de redução do geóide à superfície de referência tomaria a seguinte forma, análoga à correção usual de redução das distâncias ao nível do mar:

$$C = \frac{SN}{R} \quad (44)$$

onde:

- S é o comprimento de base;
- N é a distância vertical do geóide à superfície de referência, no ponto médio da base;
- R é o raio de curvatura da superfície de referência, no plano que contém a base.

De acôrdo com esta relação, é fácil verificar que a precisão de 3 milionésimos, vista antes, corresponderia a:

$$N < 19 m$$

Ora, sabendo-se que as ondulações do geóide podem exceder a uma centena de metros, também aqui são de temer erros bem maiores que os considerados antes.

Conclui-se, portanto, que as dimensões da superfície de referência, definidas pelo parâmetro R só poderão ser determinadas com a precisão que teóricamente obtivemos, depois que houvermos alcançado um razoável progresso no levantamento do geóide. Até, então, teremos que contentar-nos com uma precisão que sabemos inferior à indicada pelos erros prováveis das observações, embora não possamos avaliá-la com muita segurança. Corroborando este ponto, recordemos os valores calculados por Hayford, respectivamente em 1906 e em 1909, para o semi-eixo equatorial do elipsóide terrestre:

$$\text{Em 1906: } 6.378.283 \pm 34 m$$

$$\text{Em 1909: } 6.378.388 \pm 18 m$$

E' desnecessário insistirmos nos detalhes do método seguido por Hayford, mas convém acentuarmos que esses números foram deduzidos simultâneamente com o valor mais provável do achatamento polar e com as correções mais prováveis do efeito topoisostático em tôdas as estações astronômicas, e do erro residual na direção da normal no ponto adotado como origem para o cálculo das coordenadas geodésicas. Cumpre, portanto, ver no resultado obtido a melhor a-

daptação possível, com os elementos disponíveis, de uma superfície elipsóidica de revolução à superfície irregular do geóide na região abrangida pelos levantamentos utilizados. Ainda assim, ao consignar erros prováveis tão pequenos para dois valores cuja diferença vai além de cem metros Hayford não deixou de ressaltar a possibilidade de outros erros, de aparência ou natureza sistemática, ao escrever:

"The probable errors given above were computed directly from the residuals on the assumption that the errors involved are accidental in character. As there is some evidence of systematic errors, these probable errors should be slightly increased to represent the actual uncertainties in the values "

e: "The probable errors were computed in the usual way. They are somewhat too small, as they are based upon the assumption that the residuals are all accidental in character and independent of each other. As shown later in this publication, there is a sufficient tendency to geographic grouping of residuals of like sign to indicate that the residuals are not entirely independent of each other. It is extremely difficult to estimate the amount by which the computed probable errors should be increased to represent the real uncertainties in the values. It is believed, however, that the real probable errors are but little larger than those shown above."

Caberia acrescentar as possíveis diferenças entre essa superfície e aquela capaz de melhor adaptar-se ao geóide em seu todo, sem deixar de atender, ao mesmo tempo, às condições que tivemos oportunidade de citar em capítulo anterior.

Para Helmert, as investigações de Hayford permitiriam deduzir:

$$a = 6\,378\,388 \pm 53 \text{ m}$$

Entretanto, mesmo este erro provável é bem inferior às discordâncias com a maioria dos valores encontrados independentemente por vários pesquisadores nos últimos tempos, como se verifica em breve citação:

Everest	(1830)	$a = 6.377.276$
Bessel	(1841)	$a = 6.377.397$
Clarke	(1866)	$a = 6.378.206$
Clarke	(1880)	$a = 6.378.301$
Clarke	(1878)	$a = 6.378.199$
Helmert	(1907)	$a = 6.378.200$
Heiskanen	(1929)	$a = 6.378.400$
Jeffreys	(1948)	$a = 6.378.099$

Jeffreys atribui ao resultado por ele encontrado, baseado não só em medições geodésicas, mas também em observações gravimétricas, de paralaxe lunar e de precissão, o erro provável de 79 metros. No entanto, a tendência que modernamente predomina entre os mais abalizados autores é atribuir, a qualquer dos valores até hoje determinados, um erro provável da ordem de grandeza de uma centena de metros, que corresponde aproximadamente a 16 milionésimos em erro

relativo.

Logo adiante veremos que êsse gráu de precisão, embora bem inferior ao que deduzimos há pouco, é mais que satisfatório para a solução dos problemas ligados à determinação do relêvo do geóide, de modo que a definição da forma do geóide mais uma vez tende a preceder a determinação rigorosa das dimensões, tanto do geóide como da própria superfície de referência.

E' claro que a adoção provisória de um valor aproximado de R corresponde à fixação de uma escala ligeiramente diferente da unidade, tal que:

$$R = R_0 (1 + \sigma)$$

Sendo R_0 o valor aproximado e σ um pequeno coeficiente cuja determinação fica na dependência do levantamento da forma. Assentado êsse ponto, ocupemo-nos do achatamento polar:

$$f = \frac{a-b}{a} \quad (45)$$

A determinação dêsse coeficiente, pelos métodos astronômico-geodésicos, simultâneamente com uma das dimensões lineares do elipsóide (usualmente o semi-eixo equatorial), constitui um dos problemas clássicos da Geodésia, em cujos detalhes não precisamos insistir.

Os resultados alcançados por vários autores, na investigação dêsse parâmetro, pelo Método dos Arcos, ou pelo das Áreas, em época mais recente, foram os seguintes:

Everest	(1830):	$1/f = 300.80$
Bessel	(1841):	$1/f = 299.15$
Clarke	(1866):	$1/f = 294.98$
Clarke	(1880):	$1/f = 293.47$
Clarke	(1878):	$1/f = 293.15$
Hayford	(1906):	$1/f = 297.8$
Helmert	(1907):	$1/f = 298.3$
Hayford	(1909):	$1/f = 297.0$
Heiskanen	(1929):	$1/f = 298.2$
Jeffreys	(1948):	$1/f = 297.1$

E' evidente que êstes coeficientes sã afetados pelas mesmas causas de êrro que influem, como vimos hã pouco, na determinação do raio de curvatura. Assim, por um raciocínio análogo ao que tivemos a oportunidade de desenvolver anteriormente, concluímos que deve ser admitida uma incerteza de uma ou duas unidades para os mais recentes dos valores acima transcritos que representam a inversa do coeficiente f . Percebe-se maior discrepância dos valores devidos a Everest, Bessel e Clarke; ao mesmo tempo, é interessante notar a concordância entre os valores devidos a Everest e Bessel, e entre os três valores devidos a Clarke, como um exemplo de aparente precisão a que podem conduzir as fórmulas do êrro accidental, quando aplicadas a um número pequeno de valores, ou em condições diversas de uma distribuição normal.

Nestas condições, parece prudente não ir além de:

$$\frac{1}{297} > f > \frac{1}{299} \quad (46)$$

Ou, de acôrdo com as investigações mais recentes nos Estados Unidos da América e na União Soviética, segundo Dupuy:

$$\frac{1}{298} > f > \frac{1}{299} \quad (47)$$

Ora, derivando a fórmula clássica:

$$\rho \approx a(1 - f \cos^2 \theta)$$

temos:

$$d\rho \approx a \cos^2 \theta df - a f^2 \cos^2 \theta d\left(\frac{1}{f}\right) \quad (48)$$

onde, se adotarmos:

$$d\left(\frac{1}{f}\right) = 1$$

vamos encontrar, aplicando os valores numéricos:

$$d\rho \approx 72 \cos^2 \theta \quad (49)$$

ou seja:

Para $\theta = 0$	:	$d\rho = 72 \text{ m}$
$\theta = 30$	:	$d\rho = 54 \text{ m}$
$\theta = 45$	:	$d\rho = 36 \text{ m}$
$\theta = 60$	:	$d\rho = 18 \text{ m}$
$\theta = 90$	:	$d\rho = 0 \text{ m}$

Salvo na zona equatorial, onde o achatamento polar influe pouco no raio vetor, a incerteza de uma unidade no denominador do coeficiente f conduz a uma precisão má dícroe na determinação da forma da superfície.

No levantamento do relêvo do geóide, podemos aspirar à precisão bem superior a essa, de forma que, para não abdicarmos da máxima precisão possível na determinação do geóide, só poderemos considerar definitivamente fixado o valor de f quando a precisão de sua determinação for bem superior à atual. Até lá, temos que admitir que:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_0} + \epsilon \quad (50)$$

onde chamamos:

$\frac{1}{f}$: o valor definitivo

$\frac{1}{f_0}$: o valor provisório

Devemos então concluir que, nas condições atuais, a superfície de referência não pode ainda corresponder rigorosamente ao conceito expresso na fórmula (30), pois é lícito prever que o termo N contenha resíduos de um ou mais termos incluídos em ρ_0 .

Isto posto, e dentro dos limites já citados, a escolha dos parâmetros provisórios da superfície de referência não é questão decisiva quanto à precisão final da determinação do geóide. Ela é, entretanto, muito ponderável no que diz respeito à coordenação dos resultados das observações, consideração esta cuja importância aumentará sem dúvida, à medida que progredirem os estudos geodésicos e geofísicos e a colaboração internacional nesse campo.

Este é o critério defendido por Bomford, com

sua indiscutível autoridade:

"... From most points of view it is now unprofitable to dispute whether the polar flattening is $1/296$ or $1/298$ of the major axis, although the point is of importance in astronomy, and for the present any such value will suffice for a spheroid with reference to which the actual form of the geoid can be represented as it becomes known. Other things being equal it is desirable to use the Hayford or International Spheroid".

Adotado este conceito, passa a um plano acadêmico o interesse do geodesta para outros métodos capazes de conduzir à determinação dos parâmetros de uma superfície ideal de referência, quais sejam, os métodos astronômicos, baseados nas observações da precessão e da paralaxe; e o método geofísico, baseado nas observações da gravidade. Ademais, para um elipsóide de revolução, esses métodos visam, exclusivamente, a determinação do achatamento polar, pois a determinação do parâmetro linear R depende necessariamente da medição geodésica de distâncias na superfície da Terra. Deixemos, então, para outra oportunidade o estudo desses métodos, que demandaria um desenvolvimento incompatível com o plano desta obra; e voltemos ao estudo do geóide:

Definida a superfície de referência como um elipsóide de revolução, podemos escrever, à vista da fórmula (27):

$$\rho_0 = R \left[1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n P_n(\theta) \right] \quad (51)$$

Es:

$$N = R \sum_{\substack{m+n \\ n=1 \\ m=1}}^{m+n} S_n(\theta, \lambda) \quad (52)$$

Ora, se

$$a \approx 6.400.000 \text{ m}$$

$$f \approx \frac{1}{300}$$

temos:

$$af \approx 21.300 \text{ m}$$

$$af^2 \approx 71 \text{ m}$$

$$af^3 \approx 0.2 \text{ m}$$

Desprezando, em vista disto, os termos em f^3 , f^4 , etc., a equação polar do elipsóide de revolução po de ser escrita sob a seguinte forma (Bomford):

$$\rho_0 = a \left[\left(1 - \frac{3}{8} f^2 \right) - f^2 \cos^2 \theta + \frac{3}{8} f^2 \cos^2 2\theta + \dots \right] \quad (53)$$

onde

ρ_0 é o raio vetor contado a partir do centro geométrico da superfície;

θ é a colatitude geocêntrica.

Levando em conta que:

$$\cos^2 2\theta = 4 \cos^4 \theta - 4 \cos^2 \theta + 1$$

vamos encontrar, após transformações algébricas elementares:

$$\rho_0 = a \left[1 - f \cos^2 \theta - \frac{3}{2} f^2 \cos^2 \theta + \frac{3}{2} f^2 \cos^4 \theta + \dots \right] \quad (54)$$

Nesta fórmula, observamos que o desenvolvimento está limitado à quarta potência de $\cos \theta$; o desenvolvimento em funções de Legendre estará, portanto, limitado ao quarto grau. Observamos também que estão ausentes as potências ímpares, devido à simetria do elipsóide, em relação à origem do sistema de coordenadas e ao plano do equador; por este mesmo motivo estarão ausentes os polinômios de Legendre de grau ímpar.

Vamos então escrever:

$$P_0 = 1$$

$$P_2 = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}$$

$$P_4 = \frac{35}{8} \cos^4 \theta - \frac{30}{8} \cos^2 \theta + \frac{3}{8}$$

e, dividindo sucessivamente por P_4 e P_2 a expressão anterior, encontramos:

$$\rho_0 = a \left[\left(1 - \frac{1}{3} f - \frac{1}{5} f^2 \right) - \frac{6}{3} \left(f + \frac{3}{14} f^2 \right) P_2 + \frac{12}{35} f^2 P_4 \right] \quad (55)$$

ou

$$\rho_0 = a (C_0 P_0 + C_2 P_2 + C_4 P_4) \quad (56)$$

onde

$$C_0 = 1 - \frac{1}{3} f - \frac{1}{5} f^2$$

$$C_2 = -\frac{2}{3} \left(f + \frac{3}{14} f^2 \right)$$

$$C_4 = \frac{12}{35} f^2$$

Ou ainda:

$$\rho_0 = R(1 + A_2 P_2 + A_4 P_4) \quad (57)$$

onde

$$R = a \left(1 - \frac{1}{3} f - \frac{1}{5} f^2 \right)$$

$$A_2 = -\frac{2}{3} \left(f + \frac{3}{14} f^2 \right) \left(1 - \frac{1}{3} f - \frac{1}{5} f^2 \right)^{-1}$$

$$A_4 = \frac{12}{35} f^2 \left(1 - \frac{1}{3} f - \frac{1}{5} f^2 \right)^{-1}$$

Quanto a N , devemos escrever:

$$N = R \sum_{\substack{n=1 \\ m=1}}^{n=n} S_n(\theta, \lambda) \quad (58)$$

Se admitirmos que a origem do nosso sistema de coordenadas, que no caso é o centro do elipsóide, possa estar afastado do centro geométrico do geóide.

Ou:

$$N = R \sum_{\substack{n=2 \\ m=2}}^{n=n} S_n(\theta, \lambda) \quad (59)$$

Se impuzermos a condição de que a origem do sistema de coordenadas, isto é, o centro do elipsóide, coincida com o centro geométrico do geóide; este por sua vez, de

ve coincidir com o centro de gravidade da Terra, uma vez que o geóide é uma superfície equipotencial da gravidade.

Por outro lado, tendo sido θ definido como a colatitude geocêntrica, o eixo principal do sistema de coordenadas, isto é, o eixo polar do elipsóide, será em qualquer caso paralelo ao eixo de rotação da Terra, cuja direção as observações astronômicas permitem determinar com precisão, e a partir do qual é medida a colatitude.

Assim, no caso de coincidir o centro do geóide com o do elipsóide, é evidente, que os eixos coincidirão também. Com referência a esta posição única do elipsóide, é que definimos como "absolutas" as coordenadas geodésicas; ao mesmo tempo, define-se como "relativas" as coordenadas geodésicas referidas a qualquer outra posição do elipsóide.

V - O NIVELAMENTO ASTRONÔMICO

Definida a superfície de referência, podemos passar a focalizar o problema de levantamento detalhado de uma determinada região do mesmo, em relação àquela superfície, e para isto o primeiro método que se nos apresenta é a interpretação comparativa dos resultados dos levantamentos geodésicos e astronômicos.

Este método, que examinaremos neste capítulo, apresenta evidente analogia com o nivelamento trigonométrico, utilizado na determinação topográfica ou geodésica de altitudes, motivo pelo qual recebe a denominação de "nivelamento astronômico", particularmente cara aos autores franceses. Esta analogia é bem patente na seguinte fórmula fundamental (Vide Figura 4).

$$dN = \chi \cos(A - A_0) dL \quad (60)$$

onde N que chamaremos "cota do geóide", é o segmento da normal compreendido entre a superfície de referência e o geóide; χ é o desvio da vertical, ou seja, o ângulo formado pela vertical com a normal; A é o azimute da direção em que é visto, do ponto P_0 , o ponto P'_0 sendo os pontos P_0 e P'_0 infinitamente próximos; dL é a distância entre P_0 e P'_0 . A_0 é o azimute do arco Z_0Z .

Os desvios de vertical sempre são ângulos su-

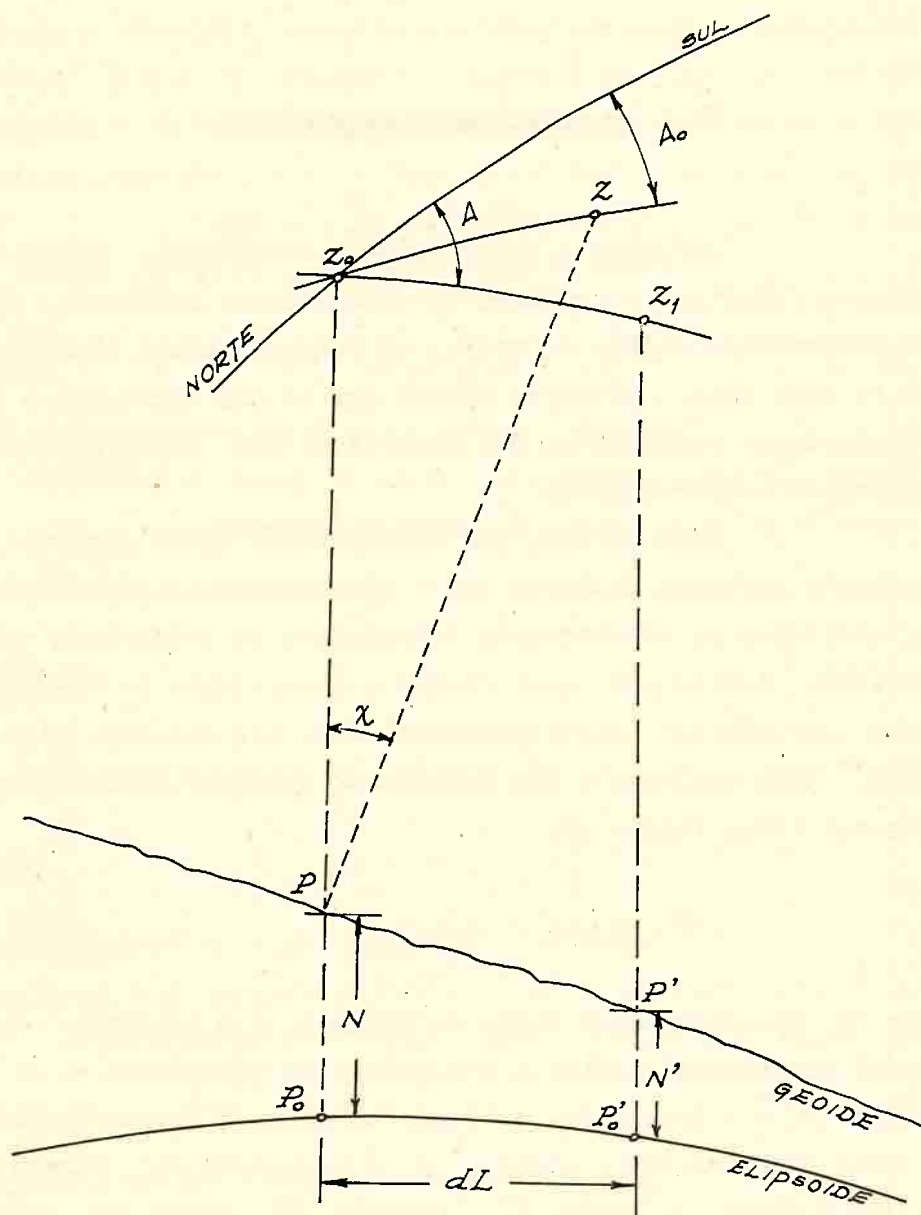


Figura 4

ficientemente pequenos para que se possa confundir o coseno com a unidade, de forma que os segmentos $\underline{N}$ e $\underline{L}$ podem ser considerados como indiferentemente contados: o primeiro, ao longo da normal ou da vertical; e o segundo, ao longo do geóide ou da superfície de referência.

Desenvolvendo a expressão anterior, temos:

$$dN = [\chi \cos A \cos A_0 + \chi \sin A \sin A_0] dL \quad (61)$$

Chamando, agora, η e ξ as componentes do desvio de vertical respectivamente no plano do meridiano e no plano do primeiro vertical, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \eta &= \chi \cos A_0 \\ \xi &= \chi \sin A_0 \end{aligned} \quad (62)$$

Expressões estas que, substituídas na anterior, nos dão:

$$dN = [\eta \cos A + \xi \sin A] dL \quad (63)$$

Integrando, concluímos que a diferença entre as cotas do geóide, em dois pontos quaisquer $\underline{A}$ e $\underline{B}$, ficaria rigorosamente determinada pela fórmula seguinte:

$$N_B - N_A = \int_A^B [\eta \cos A + \xi \sin A] dL \quad (64)$$

Cumpre, entretanto, observar que esta fórmula só teria aplicação prática se fossem conhecidas as componentes do desvio de vertical, ponto por ponto, ao longo de um caminho qualquer entre $\underline{A}$ e $\underline{B}$.

Ora, pela própria definição de desvio da ver

tical:

$$\eta = \varphi_A - \varphi_G \quad (65)$$

E:

$$\xi = (\lambda_A - \lambda_G) \cos \varphi \quad (66)$$

onde φ_A e λ_A são as coordenadas astronômicas; e φ_G e λ_G são as coordenadas geodésicas do ponto em consideração.

Nestas condições, a solução aproximada do problema pode ser encontrada através da determinação das coordenadas astronômicas nos vértices de triangulações ou poligonações, que permitam o transporte das coordenadas geodésicas. A solução rigorosa é evidentemente impraticável; se podemos calcular rigorosamente as coordenadas geodésicas nos pontos intermediários das triangulações ou poligonações o mesmo não acontece com as coordenadas astronômicas, cada uma das quais define uma característica estritamente local, e para cujo transporte carecemos de recursos.

Admitamos, pois, que as componentes do desvio de vertical são conhecidas nos pontos A e B, que passemos a considerar como os extremos de cada lance no transporte da cota N. Admitamos ainda que a variação de cada uma das componentes, entre cada dois pontos astronômicos consecutivos, seja uniforme. Temos assim, a fórmula aproximada:

$$N_B - N_A = \frac{1}{2} [(\eta_A + \eta_B) \cos A + (\xi_A + \xi_B) \sin A] L \sin 1'' \quad (67)$$

onde admitimos que as componentes dos desvios de vertical venham expressas em segundos de arco, e L seja a distân-

cia geodésica entre os pontos A e B, expressa na mesma unidade que N_A e N_B .

Atendendo às convenções adotadas na contagem do azimute (a partir do sul) e da longitude (de leste para oeste), a fórmula anterior assume a seguinte forma:

$$N_B - N_A = \frac{1}{2} [(\eta_A + \eta_B) \cos A - (\xi_A + \xi_B) \sin A] L \sec 1'' \quad (68)$$

Via de regra, os pontos A e B serão os pontos de Laplace, cuja determinação, ao longo das triangulações ou poligonações, impõe-se pela necessidade de controle do transporte de azimute, e nos quais a latitude é também determinada, embora possa ser dispensada para essa finalidade imediata.

Incorremos aqui em uma suposição um pouco ouzada, que pede uma verificação.

Para este fim, tendo em vista as bruscas variações constatadas entre Avaré e Portão, foram determinadas as latitudes astronômicas dos vértices Pico, São Sebastião, Morungava, Cerro do Elias, Urutão e Bocaiuva do Sul, com os seguintes resultados, tomando-se Itararé como origem para o cálculo das posições geodésicas:

Vértice	Estado	Latitude Geodésica	Latitude Astronômica	Desvio
		(°) (') (")	(°) (') (")	
Avaré	SP	23 04 36.0	23 04 44.9	- 08.9
Pico	SP	23 35 07.2	23 35 11.5	- 04.3
São Sebastião	SP	24 01 18.7	24 01 17.0	- 01.7
Itararé B.N.	SP	24 07 38.7	24 07 38.7	-
Morungava SGE	PR	24 12 00.1	24 11 51.6	- 08.5
Cerro do Elias	PR	24 31 56.7	24 32 03.3	- 06.6
Urutão	PR	24 54 56.5	24 55 04.0	- 07.5
Bocaiuva do Sul	PR	25 12 53.9	25 13 04.7	- 10.8
Portão	PR	25 29 09.4	25 29 24.1	- 14.7

Relativamente ao quadro acima, convém esclarecer que os vértices Avaré, Itararé BN e Portão são pontos de Laplace.

Representando, agora, graficamente esses resultados, à parte as variações em longitude, que são de pouca importância para esta simples verificação, temos a Figura 5, donde concluímos que a variação do desvio de vertical é aproximadamente gradual, pelo menos neste caso, com a única exceção do vértice Morungava, pois nos demais pontos, as discrepâncias apuradas, em relação ao perfil Avaré-Itararé-Portão, são da ordem de grandeza dos erros de observação dos pontos auxiliares, nos quais foi adotado o método de Sterneck, com precisão variável entre segunda e terceira ordens.

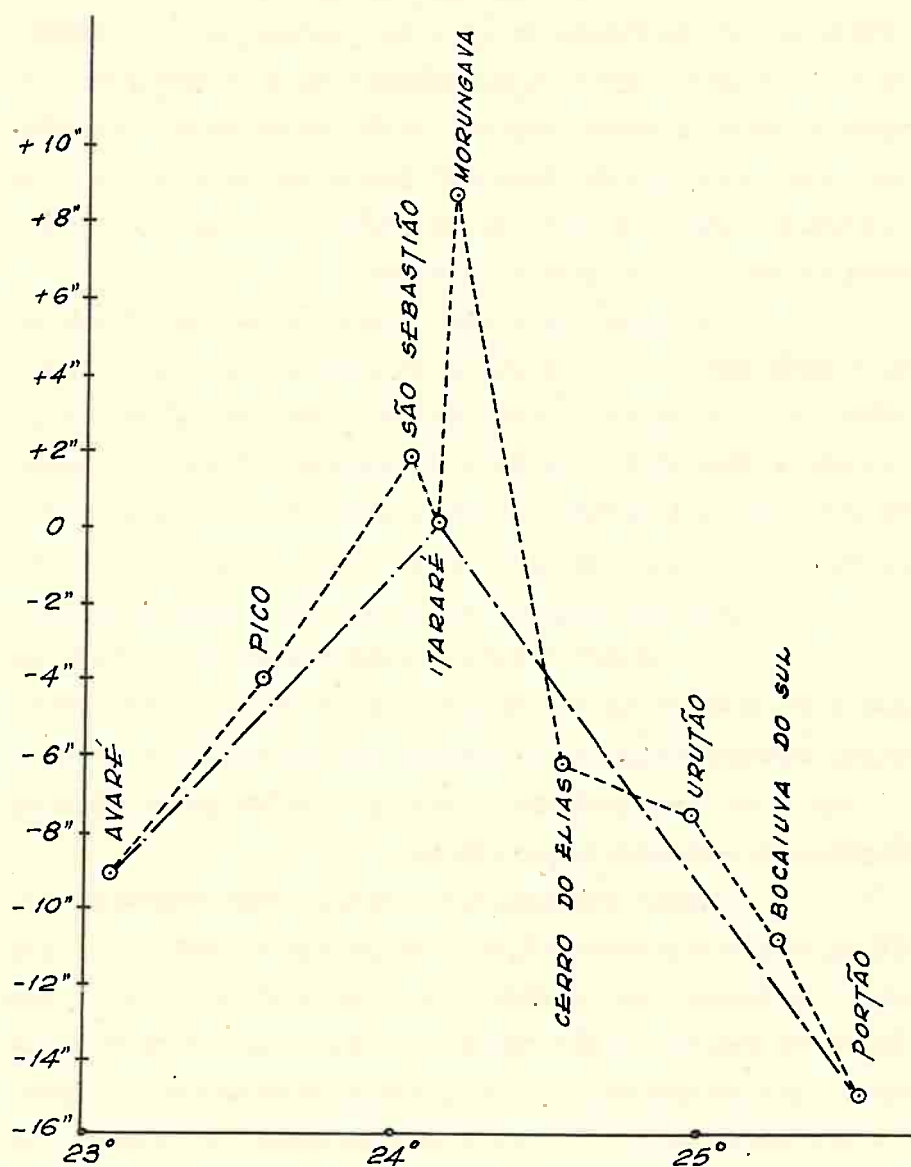


Figura 5

No próprio vértice Morungava, não pode ser excluída a possibilidade de erro de observação ou identificação do ponto, devido à existência de dois vértices com o mesmo nome e na mesma região, pertencente um à triangulação geral do Conselho Nacional de Geografia e outro à triangulação local do Serviço Geográfico do Exército, baseadas as duas em origens diferentes.

De acordo com esta ordem de idéias, vamos aplicar este método à triangulação geodésica do País, escolhendo para exemplo: o arco do meridiano de 49° W.Gr., no trecho compreendido entre o Triângulo Mineiro e o vértice Jativoca, no Estado de Santa Catarina; e o arco do paralelo de 20° Sul, desde o mesmo ponto no Triângulo Mineiro até a base de Vitória, no Estado do Espírito Santo.

No Quadro I estão relacionados os pontos de Laplace existentes nesses arcos, com as respectivas coordenadas astronômicas, determinadas com precisão de primeira ordem (erro provável não superior a $0.1''$) pelos métodos clássicos de astronomia meridiana.

Essas coordenadas definem, como bem sabemos, a direção da reta perpendicular ao geóide em cada um dos pontos de observação, direção essa que a observação nos permite determinar diretamente. O mesmo não ocorre com as coordenadas geodésicas, cujos valores dependem das convenções adotadas quanto à forma e às dimensões, e quanto à posição da superfície de referência.

Adotemos como superfície de referência o Elipsóide Internacional, e tomemos como origem para o cálculo das coordenadas geodésicas a direção da vertical de-

QUADRO I

(Coordenadas Astronômicas)

Vértices	Latitude			Longitude		
<u>Meridiano de 49°</u>	(°)	(')	(")	(°)	(')	(")
Córrego Alegre	- 19	50	15.14	48	57	42.75
Ribeiro dos Santos	- 20	38	21.15	48	55	16.48
Areão	- 21	52	19.19	49	04	51.39
Agudos	- 22	29	38.12	48	58	00.55
Avaré	- 23	04	44.80	48	53	30.66
Itararé	- 24	07	38.70	49	16	25.22
Portão	- 25	29	24.13	49	17	31.16
Jativoca	- 26	22	26.04	48	51	48.73
<u>Paralelo de 20°</u>						
Córrego Alegre	- 19	50	15.14	48	57	42.75
Uberaba	- 19	45	54.36	47	57	49.52
Araxá	- 19	35	36.76	46	54	24.21
Luz	- 19	47	32.06	45	36	51.16
Rola Moça	- 20	02	31.72	43	59	51.40
Raul Soares	- 20	04	03.37	42	26	35.26
Vitória	- 20	09	44.88	40	11	48.87

finida pelas coordenadas astronômicas do vértice Córrego A
legre, Adotemos ainda, como azimuth inicial, o azimuth as

trônômico do mesmo vértice para o vértice Chapada das Areias Teremos, com isso, definido a forma e as dimensões da superfície de referência, representadas pelos parâmetros do Elipsóide Internacional:

$$a = 6.378.388$$

$$f = 1/297$$

Ao mesmo tempo, teremos definido a posição desse elipsóide em relação ao geóide, ao aceitarmos a condição de coincidência da normal (ao elipsóide) com a vertical astronômica no ponto Córrego Alegre, assim como a coincidência do azimuth geodésico com o astronômico, da secção normal que contém a vertical de Córrego Alegre e o vértice Chapada das Areias.

De fato, quando dizemos que:

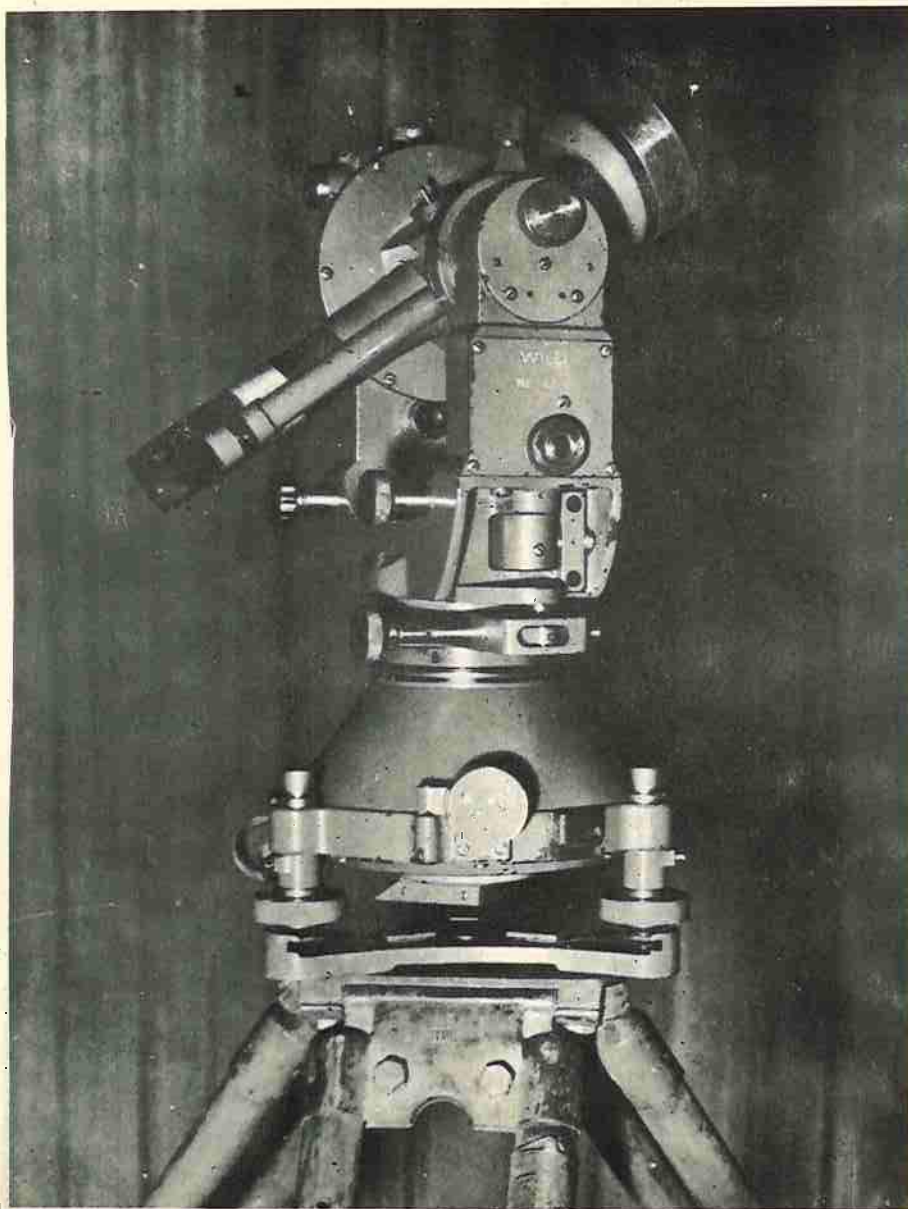
$$\varphi_A = \varphi_G = - 19^\circ 50' 15.14''$$

onde φ_A e φ_G são, respectivamente, a latitude astronômica e a latitude geodésica do vértice Córrego Alegre, estamos impondo que o eixo do elipsóide de referência faça, com a vertical do vértice Córrego Alegre, o seguinte ângulo:

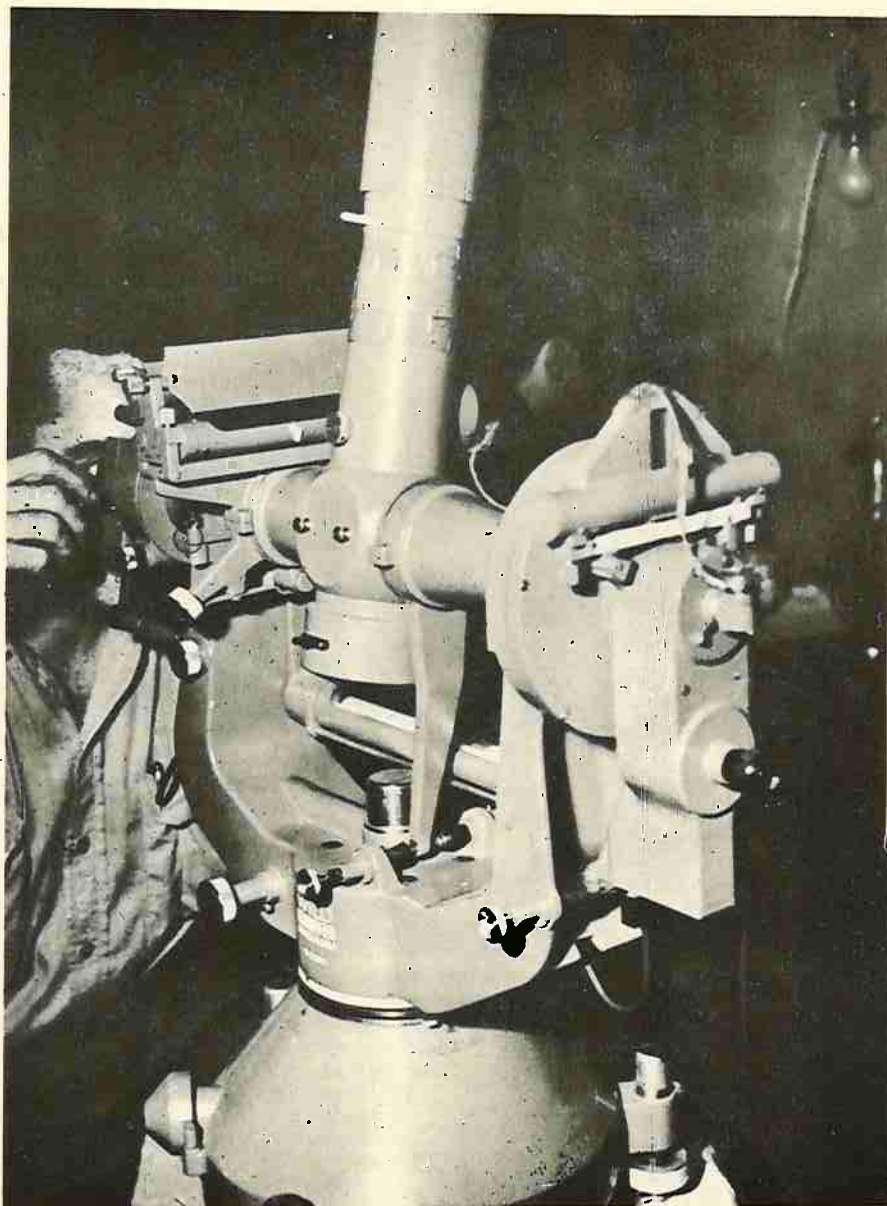
$$70^\circ 09' 44.86'' \quad (69)$$

Esta vertical, convém lembrar, pode ser facilmente materializada com o auxílio de prumos ou níveis, de que são dotados os instrumentos astronômicos utilizados na determinação das coordenadas, e os geodésicos, utilizados nas operações de transporte das mesmas. (Vide ilustrações).

Isto posto, quanto à latitude, o lugar geomé-



Teodolito Geodésico Wild T-3



Teodolito Astronômico Wild T-4

trico das retas que satisfazem essa condição (69) é uma família de superfícies cônicas, com o eixo em coincidência com a vertical do vértice Córrego Alegre. A condição relativa à latitude não é, portanto, suficiente; impõem-se outras que levanten a indeterminação.

A condição relativa à longitude não contribue diretamente para definir a posição do elipsóide, mas sim indiretamente, pela sua relação com o azimute, expressa pela clássica fórmula de Laplace:

$$\alpha_G = \alpha_A + (\lambda_A - \lambda_G) \operatorname{sen} \varphi$$

onde α_G e α_A são o azimute geodésico e astronômico, respectivamente. De acôrdo com esta fórmula, quando:

$$\lambda_A - \lambda_G = 0$$

A correção de Laplace, ao azimute observado, é também nula. O azimute geodésico do plano vertical em Córrego Alegre que contém o vértice Chapada das Areias, deve então ser igual ao azimute observado astronômicamente:

$$128^{\circ} 21' 48.96''$$

Definimos assim a posição do plano meridiano que é, dentre todos os planos verticais em Córrego Alegre, aquele que forma o ângulo acima com o plano vertical que contém Chapada das Areias. Considerando que o eixo do elipsóide deve estar contido no plano meridiano, a intercessão dêste com as superfícies cônicas acima referidas determina uma família de retas, que são agora o lugar geométrico do eixo do elipsóide. Resta determinar o comprimento.

do segmento da vertical compreendido entre o ponto de observação (na superfície do terreno) e o ponto de intersecção da vertical com o eixo do elipsóide. Esse segmento é representado por $\overline{EV'}$ na Figura 6, à vista da qual podemos escrever:

$$\overline{EV'} = \overline{EV_0} + \overline{V_0V} + \overline{VV'}$$

No segmento $\overline{EV_0}$ reconhecemos a grande normal (raio de curvatura da secção normal segundo o plano do primeiro vertical), que podemos exprimir em função dos parâmetros do elipsóide, de acordo com a fórmula clássica:

$$\overline{EV_0} = a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

onde:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \simeq 2f^2$$

Na segunda parcela, temos um segmento aproximadamente igual à cota do geóide, à qual chamamos N (seguindo a nomenclatura usual), na fórmula (30). De fato, a Figura 6 nos permite escrever:

$$\overline{V_0V} = N \cos(\varphi - \psi)$$

onde φ é a latitude geográfica e ψ a latitude geocêntrica.

Sabemos que:

$$\varphi - \psi < 00^{\circ}12'$$

Podemos escrever:

$$\overline{V_0V} = N \leq 0.00001 N$$

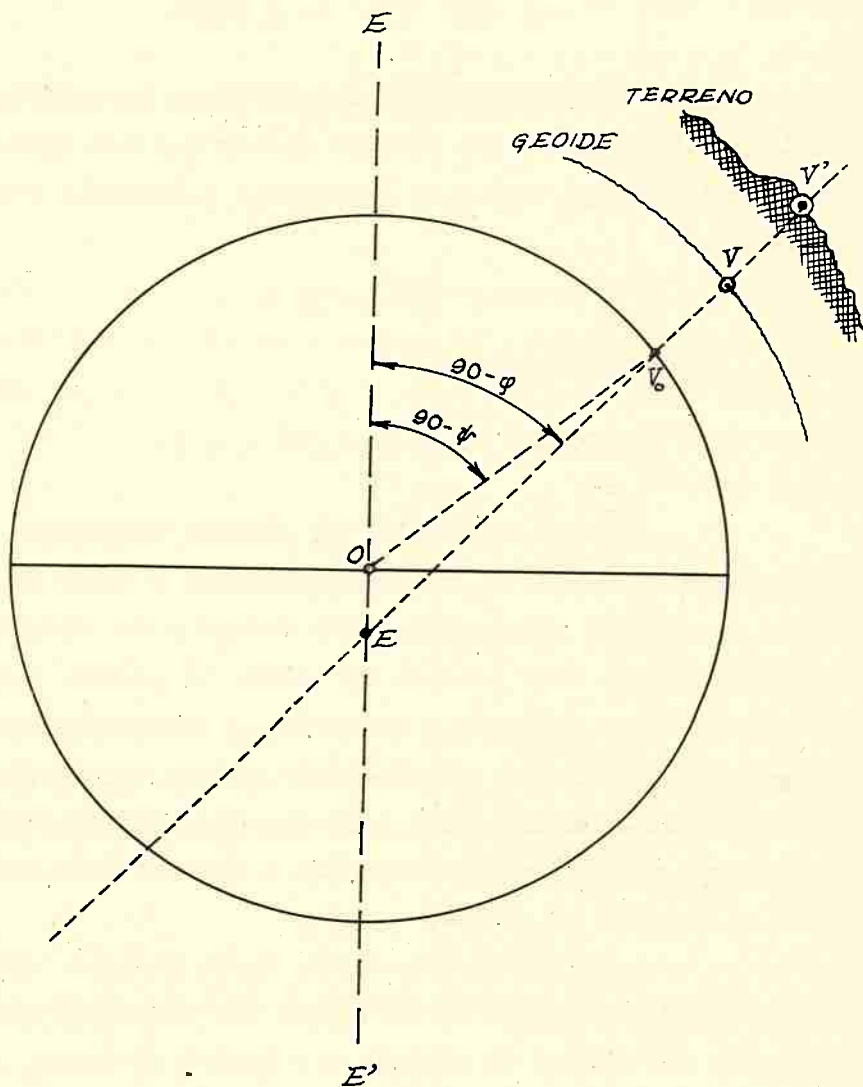


Figura 6

Visto que:

$$\cos 00^{\circ} 12' = 0.99999$$

O segmento $\overline{VV'}$ é a altitude topográfica do ponto de observação, que podemos determinar sem dificuldade, pelos métodos usuais em Topografia e Geodésia Prática, ou seja:

$$\overline{VV'} = h$$

Donde, por substituição,

$$\overline{EV'} = a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} + N + h \quad (70)$$

Nestas condições, só podemos determinar completamente a posição do elipsóide fixando o valor de N (cota do geóide) que é justamente o objeto de nossa investigação. Nesta fase inicial do estudo do geóide, somos então obrigados a arbitrar o valor de N correspondente à origem Córrego Alegre, vértice este que se transforma assim em um Datum arbitrário, pois sua escolha importa em fixarmos uma posição arbitrária para o elipsóide de referência, em relação ao geóide.

Convém observar que, nessa posição arbitrária, o eixo e o centro do elipsóide não coincidem necessariamente com o eixo de rotação e o centro da Terra, respectivamente. Nestas condições, não se aplicam algumas simplificações que introduzimos ao tratarmos da fórmula geral do geóide, porém isto não exclue a utilidade e necessidade de um Datum arbitrário, para um estudo preliminar, como passamos a ver.

À falta de melhor critério, adotemos, no Datum

$$N = 0$$

completando assim, o nosso Datum arbitrário:

$$a = 6.378.388$$

$$f = 1/297$$

$$\varphi_0 = -19^{\circ} 50' 15.14''$$

$$\lambda_0 = 48^{\circ} 57' 42.75''$$

$$Z_0 = 128^{\circ} 21' 48.96'' \quad (\text{para Chapada das Areias})$$

$$N_0 = 0$$

A partir dessa origem, podemos então calcular as coordenadas geodésicas dos vértices da triangulação, por qualquer das fórmulas usuais. Obtemos dessa forma, para os pontos de Laplace, as coordenadas geodésicas que constam do Quadro II.

Comparando as coordenadas geodésicas com as astronômicas, obtemos os desvios de vertical relacionados no Quadro III. Esses desvios, não devemos esquecer, são baseados no Datum arbitrário acima definido.

Para obtermos as cotas do geóide, precisamos agora aplicar sucessivamente a fórmula (68) a cada um dos trechos compreendidos entre dois pontos de Laplace consecutivos. Antes, porém, precisamos calcular as distâncias e os azimutes geodésicos entre esses pontos, dados por suas coordenadas. Trata-se aqui do problema clássico de "cálculo inverso", sobre cujos detalhes não vamos insistir mas exemplificamos, e cuja solução nos fornece os resultados constantes do Quadro IV, no qual incluímos desde logo o cá

culo dos coeficientes da fórmula (68):

$$\begin{aligned} & L \cos A \operatorname{sen} 1'' \\ \text{E} & \\ & L \operatorname{sen} A \operatorname{sen} 1'' \end{aligned}$$

Introduzindo estes resultados, juntamente com os dados antes disponíveis (Quadro III), na fórmula (68), obtemos os resultados consignados no Quadro V (Nivelamento Astronômico).

Podemos assim, obter o relêvo do geóide, por pontos, em relação à posição do elipsóide correspondente ao Datum escolhido.

Vem a propósito, agora, investigar a precisão alcançada nessa determinação. Diferenciando a fórmula (67), vamos encontrar:

$$\begin{aligned} d(N_B - N_A) &= \frac{\operatorname{sen} 1''}{2} \left[(\eta_A + \eta_B) \cos A + (\xi_A + \xi_B) \operatorname{sen} A \right] dL + \\ &+ \frac{L \operatorname{sen} 1''}{2} \left[-(\eta_A + \eta_B) \operatorname{sen} A + (\xi_A + \xi_B) \cos A \right] dA + \quad (71) \\ &+ \frac{L \operatorname{sen} 1''}{2} \left[\cos A \cdot d(\eta_A + \eta_B) + \operatorname{sen} A \cdot d(\xi_A + \xi_B) \right] \end{aligned}$$

Quanto ao azimuth, a condição mais desfavorável é, evidentemente, aquela em que:

$$\cos A = \operatorname{sen} A = 0,707$$

QUADRO II

(Coordenadas Geodésicas)

Vértices	Latitude			Longitude		
<u>Meridiano de 49°</u>	(°)	(')	(")	(°)	(')	(")
Córrego Alegre	- 19	50	15.14	48	57	42.75
Ribeiro dos Santos	- 20	38	20.70	48	55	16.51
Areão	- 21	52	19.93	49	04	50.37
Agudos	- 22	29	39.10	48	57	59.01
Avare	- 23	04	45.97	48	53	29.27
Itararé	- 24	07	48.70	49	16	25.13
Portão	- 25	29	19.48	49	17	33.03
Jativoca	- 26	22	19.90	48	51	56.12
<u>Paralelo de 20°</u>						
Córrego Alegre	- 19	50	15.14	48	57	42.75
Uberaba	- 19	45	54.55	47	57	39.41
Araxá	- 19	35	42.33	46	54	20.08
Luz	- 19	47	35.19	45	36	48.87
Rola Moça	- 20	02	42.03	43	59	43.78
Raul Soares	- 20	04	10.12	42	26	20.23
Vitória	- 20	09	49.42	40	11	46.33

QUADRO III

(Desvios de Vertical)

Vértices	$\eta = \varphi_A - \varphi_G$	$\lambda_A - \lambda_G$	$\cos \varphi$	ξ
<u>Meridiano de 49°</u>				
Córrego Alegre	0.00"	0.00"	-	0.00"
Ribeiro dos Santos	- 0.45"	- 0.03"	.9358	- 0.03"
Areão	- 0.74"	- 1.02"	.9280	- 0.95"
Agudos	- 0.98"	- 1.54"	.9239	- 1.42"
Avaré	- 1.17"	- 1.39"	.9199	- 1.28"
Itararé	- 10.70"	- 0.09"	.9126	- 0.08"
Portão	- 4.65"	- 1.97"	.9027	- 1.78"
Jativoca	- 6.14"	- 7.39"	.8960	- 6.62"
<u>Paralelo de 20°</u>				
Córrego Alegre	0.00"	0.00"	-	0.00"
Uberaba	- 0.19"	- 10.11"	.9411	- 9.51"
Araxá	- 5.57"	- 4.13"	.9422	- 3.89"
Luz	- 3.13"	- 2.29"	.9410	- 2.15"
Rola Moça	- 10.31"	- 7.62"	.9395	- 7.16"
Raul Soares	- 6.75"	- 15.03"	.9393	- 14.12"
Vitória	- 4.54"	- 2.54"	.9387	- 2.38"

CÁLCULO INVERSO DE POSIÇÕES GEODÉSICAS

NOME DA ESTAÇÃO					
1. φ	19° 50' 15"	Córrego Alegre	λ	48° 57' 43"	
2. φ'	20° 38' 21"	Ribeiro dos Santos	λ'	48° 55' 17"	
$\Delta\varphi = (\varphi' - \varphi)$	- 48' 06"		$\Delta\lambda = (\lambda' - \lambda)$	- 02' 26"	
$\frac{\Delta\varphi}{2}$	- 24' 03"		$\frac{\Delta\lambda}{2}$	- 01' 13"	
$\varphi_m = (\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2})$	20° 14' 18"				
$\Delta\varphi$ (segs.)	- 2886"		$\Delta\lambda$ (segs.)	- 146"	
$\log \Delta\varphi$	3.4602963		$\log \Delta\lambda$	2.1643529	
CORR. arco-sen	- 36		CORR. arco-sen		
$\log \Delta\varphi_1$	3.4602927		$\log \Delta\lambda_1$	2.1643529	
$\log \cos \frac{\Delta\lambda}{2}$			$\log \cos \varphi_m$	9.9723240	
$\text{colog } B_m$	1.4878517		$\text{colog } A_m$	1.4904494	
$\log \{a \cos(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})\}$	4.9481444		$\log \{a \sin(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})\}$	3.6271263	
			$\log \{a \cos(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})\}$	4.9481444	
$\log \Delta\lambda$	2.1643529	$5 \log \Delta\lambda$	$\log \tan(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})$	8.6789819	
$\log \sin \varphi_m$	9.5389832	$\log F$	$\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2}$	2° 44' 01".86	
$\log \sec \frac{\Delta\varphi}{2}$	0.0000106	$\log b$	$\log \sin(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})$	8.6784872	
$\log a$	1.7033467		$\log \cos(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})$	9.9995054	
a	+ 50.50		$\log B_1$	4.9486391	
b			CORR. arco-sen	+ 34	
$-\Delta\alpha$ (segs.)	+ 50° 50'		$\log b$	4.9486425	
$-\frac{\Delta\varphi}{2}$	+ 25° 25'		b	88846.94	
	+ 25° 25'				
$\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2}$	357° 15' 58".14				
α (1 para 2)	357° 16' 23".39				
$\Delta\alpha$	- 50° 50'				
α' (2 para 1)	177° 15' 32".89				

CÁLCULO INVERSO DE POSIÇÕES GEODÉSICAS

NOME DA ESTAÇÃO			
1. φ	20° 38' 21"	Ribeiro dos Santos	λ 48° 55' 17"
2. φ'	21° 52' 20"	Areão	λ' 49° 04' 51"
$\Delta\varphi = (\varphi' - \varphi)$	- 1° 13' 59"	$\Delta\lambda = (\lambda' - \lambda)$	+ 09' 34"
$\frac{\Delta\varphi}{2}$	- 36' 59"	$\frac{\Delta\lambda}{2}$	+ 04' 47"
$\varphi_m = (\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2})$	21° 15' 20"		
$\Delta\varphi$ (segs.)	- 4439"	$\Delta\lambda$ (segs.)	+ 574"
$\log \Delta\varphi$	3.6472851	$\log \Delta\lambda$	2.7589119
CORR. arco-sen	- 84	CORR. arco-sen	- 1
$\log \Delta\varphi_1$	3.6472767	$\log \Delta\lambda_1$	2.7589118
$\log \cos \frac{\Delta\lambda}{2}$	9.9999996	$\log \cos \varphi_m$	9.9694032
$\text{colog } B_m$	1.4879036	$\text{colog } A_m$	1.4904667
$\log \{ \frac{1}{2} \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}) \}$	5.1351799	$\log \{ \frac{1}{2} \sin(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}) \}$	4.2187817
$\log \Delta\lambda$	2.7589119	$\log \{ \frac{1}{2} \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}) \}$	5.1351799
$\log \sin \varphi_m$	9.5593420	$\log \tan(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	9.0836018
$\log \sec \frac{\Delta\varphi}{2}$	0.0000252	$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$	6° 54' 43".58
$\log a$	2.3182791	$\log \sin(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	9.0804338
a	- 208.10	$\log \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	9.9968320
b		$\log S_1$	5.1383479
$-\Delta\alpha$ (segs.)	- 208".10	CORR. arco-sen	+ 84
$-\frac{\Delta\alpha}{2}$	- 104".05	$\log S$	5.1383563
	- 1' 44".05	S	137516.96
$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$	6° 54' 43".58		
α (1 para 2)	6° 52' 59".53		
$\Delta\alpha$	+ 3' 28".10		
α' (2 para 1)	186° 56' 27".63		

CÁLCULO INVERSO DE POSIÇÕES GEODÉSICAS

NOME DA ESTACÃO				
1. φ	21° 52' 20"	Areão	λ	49° 04' 51"
2. φ'	22° 29' 39"	Agudos	λ'	48° 57' 59"
$\Delta\varphi = (\varphi' - \varphi)$	- 37' 19"	$\Delta\lambda = (\lambda' - \lambda)$	-	06' 52"
$\frac{\Delta\varphi}{2}$	- 18' 39"	$\frac{\Delta\lambda}{2}$	-	03' 26"
$\varphi_m = (\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2})$	22° 10' 59"			
$\Delta\varphi$ (segs.)	- 2239"	$\Delta\lambda$ (segs.)	-	412"
$\log \Delta\varphi$	3.3500541	$\log \Delta\lambda$		2.6148972
CORR. arco-sen	- 21	CORR. arco-sen		
$\log \Delta\varphi_1$	3.3500520	$\log \Delta\lambda_1$		2.6148972
$\log \cos \frac{\Delta\lambda}{2}$	9.9999998	$\log \cos \varphi_m$		9.9666027
$\text{colog } B_m$	1.4879528	$\text{colog } A_m$		1.4904831
$\log \{ \frac{1}{2} \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}) \}$	4.8380046	$\log \{ \frac{1}{2} \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}) \}$		4.0719830
		$\log \{ \frac{1}{2} \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}) \}$		4.8380046
$\log \Delta\lambda$	2.6148972	$3 \log \Delta\lambda$		7.8446916
$\log \sin \varphi_m$	9.5769939	$\log F$		9.2339784
$\log \sec \frac{\Delta\varphi}{2}$	0.0000063	$\log b$		9.2339784
$\log a$	2.1918974	$\log \tan(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$		9.2339784
a	+ 155.55	$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$		9° 43' 31".00
b		$\log \sin(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$		9.2276920
$-\Delta\alpha$ (segs.)	+ 155".55	$\log \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$		9.9937135
$-\frac{\Delta\alpha}{2}$	+ 77".77	$\log \beta_1$		4.8442910
	+ 1' 17".77	CORR. arco-sen		+ 22
$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$	350° 16' 29".00	$\log \beta$		4.8442932
α (1 para 2)	350° 17' 46".77	β		69870.40
$\Delta\alpha$	- 2' 35".54			
α' (2 para 1)	170° 15' 11".23			

CÁLCULO INVERSO DE POSIÇÕES GEODÉSICAS

NOME DA ESTAÇÃO				
1. φ	22° 29' 39"	Agudos	λ	48° 57' 59"
2. φ'	23° 04' 46"	Avarié	λ'	48° 53' 29"
$\Delta\varphi = (\varphi' - \varphi)$	- 35' 07"	$\Delta\lambda = (\lambda' - \lambda)$		- 04' 30"
$\frac{\Delta\varphi}{2}$	- 17' 33"	$\frac{\Delta\lambda}{2}$		- 02' 15"
$\varphi_m = (\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2})$	22° 47' 12"			
$\Delta\varphi$ (segs.)	- 2107"	$\Delta\lambda$ (segs.)		- 270"
$\log \Delta\varphi$	3.3236645	$\log \Delta\lambda$		2.4313638
CORR. arco-sen	- 19	CORR. arco-sen		
$\log \Delta\varphi_1$	3.3236624	$\log \Delta\lambda_1$		2.4313638
$\log \cos \frac{\Delta\lambda}{2}$	9.9999999	$\log \cos \varphi_m$		9.9647089
$\text{colog } B_m$	1.4879856	$\text{colog } A_m$		1.4904941
$\log \{s \cos(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})\}$	4.8116479	$\log \{s \cos(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})\}$		3.8865668
		$\log \{s \cos(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})\}$		4.8116479
$\log \Delta\lambda$	2.4313638	$3 \log \Delta\lambda$	$\log \tan(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})$	9.0749189
$\log \sin \varphi_m$	9.5880486	$\log F$	$\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2}$	6° 46' 35".65
$\log \sec \frac{\Delta\varphi}{2}$	0.0000056	$\log b$	$\log \sin(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})$	9.0718742
$\log a$	2.0194180	$\log \cos(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})$		9.9969553
a	+ 104.57	$\log B_1$		4.8146926
b		CORR. arco-sen		+ 19
$-\Delta\alpha$ (segs.)	+ 104".57	$\log B$		4.8146945
$-\frac{\Delta\varphi}{2}$	+ 52".28	S		65267.12
	+ 52".28			
$\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2}$	353° 13' 24".35			
α (1 para 2)	353° 14' 16".63			
$\Delta\alpha$	- 1' 44".56			
α (2 para 1)	173° 12' 32".07			

CÁLCULO INVERSO DE POSIÇÕES GEODÉSICAS

NOME DA ESTAÇÃO				
1. φ	23° 04' 46"	Avaré	λ	48° 53' 29"
2. φ'	24° 07' 49"	Itararé	λ'	49° 16' 25"
$\Delta\varphi = (\varphi' - \varphi)$	- 1° 03' 03"	$\Delta\lambda = (\lambda' - \lambda)$	+	22' 56"
$\frac{\Delta\varphi}{2}$	- 31' 31"	$\frac{\Delta\lambda}{2}$	+	11' 28"
$\varphi_m = (\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2})$	23° 36' 17"			
$\Delta\varphi$ (segs.)	- 3783"	$\Delta\lambda$ (segs.)	+	1376"
$\log \Delta\varphi$	3.5778363	$\log \Delta\lambda$		3.1386184
CORR. arco-sen	- 61	CORR. arco-sen	-	10
$\log \Delta\varphi_1$	3.5778302	$\log \Delta\lambda_1$		3.1386174
$\log \cos \frac{\Delta\lambda}{2}$	9.9999976	$\log \cos \varphi_m$		9.9620518
$\text{colog } B_m$	1.4880313	$\text{colog } A_m$		1.4905092
$\log \{s \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})\}$	5.0658591	$\log \{s_1 \sin(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})\}$		4.5911784
		$\log \{s \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})\}$		5.0658591
$\log \Delta\lambda$	3.1386184	$\log \tan(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$		9.5253193
$\log \sin \varphi_m$	9.6025207	$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$		18° 31' 54".33
$\log \sec \frac{\Delta\varphi}{2}$	0.0000182	$\log \sin(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$		9.5021952
$\log a$	2.7411573	$\log \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$		9.9768760
a	- 551.00	$\log S_1$		5.0889832
b		CORR. arco-sen	+	46
$-\Delta\alpha$ (segs.)	- 551".00	$\log S$		5.0889878
$-\frac{\Delta\alpha}{2}$	- 275".50	S		122740.48
	- 4' 35".50			
$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$	18° 31' 54".33			
α (1 para 2)	18° 27' 18".83			
$\Delta\alpha$	+ 9' 11".00			
α (2 para 1)	198° 36' 29".83			

CÁLCULO INVERSO DE POSIÇÕES GEODÉSICAS

NOME DA ESTAÇÃO			
1. φ	24° 07' 49"	Itararé	λ 49° 16' 25"
2. φ'	25° 29' 20"	Portão	λ' 49° 17' 33"
$\Delta\varphi = (\varphi' - \varphi)$	- 1° 21' 31"	$\Delta\lambda = (\lambda' - \lambda)$	+ 01' 08"
$\frac{\Delta\varphi}{2}$	- 40' 45"	$\frac{\Delta\lambda}{2}$	+ 34"
$\varphi_m = (\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2})$	24° 48' 34"		
$\Delta\varphi$ (segs.)	- 4891	$\Delta\lambda$ (segs.)	+ 68"
$\log \Delta\varphi$	3.6893977	$\log \Delta\lambda$	1.8325089
CORR. arco-sen	- 102	CORR. arco-sen	
$\log \Delta\varphi_1$	3.6893875	$\log \Delta\lambda_1$	1.8325089
$\log \cos \frac{\Delta\lambda}{2}$		$\log \cos \varphi_m$	9.9579463
$\text{colog } B_m$	1.4881006	$\text{colog } A_m$	1.4905324
$\log \{s_1 \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})\}$	5.1774881	$\log \{s_1 \sin(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})\}$	4.2809876
		$\log \{s_1 \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})\}$	5.1774881
$\log \Delta\lambda$	1.8325089	$\log \tan(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	9.1034995
$\log \sin \varphi_m$	9.6228372	$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$	7° 13' 58".09
$\log \sec \frac{\Delta\varphi}{2}$	0.0000305	$\log \sin(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	9.1000299
$\log a$	1.4553766	$\log \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	9.9965304
a	- 28.53	$\log s_1$	5.1809577
b		CORR. arco-sen	+ 102
$-\Delta\alpha$ (segs.)	- 28".53	$\log s$	5.1809679
$-\frac{\Delta\alpha}{2}$	- 14".26	s	151693.81
	- 14".26		
$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$	7° 13' 58".09		
α (1 para 2)	7° 13' 43".83		
$\Delta\alpha$	+ 28".52		
α' (2 para 1)	187° 14' 12".35		

CÁLCULO INVERSO DE POSIÇÕES GEODÉSICAS

NOME DA ESTAÇÃO				
1. φ	25° 29' 20"	Pertão	λ	49° 17' 33"
2. φ'	26° 22' 20"	Jativoca	λ'	48° 51' 56"
$\Delta\varphi = (\varphi' - \varphi)$	- 53' 00"		$\Delta\lambda = (\lambda' - \lambda)$	- 25' 37"
$\frac{\Delta\varphi}{2}$	- 26' 30"		$\frac{\Delta\lambda}{2}$	- 12' 48"
$\varphi_m = (\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2})$	25° 55' 50"			
$\Delta\varphi$ (segs.)	- 3180"		$\Delta\lambda$ (segs.)	- 1537"
$\log \Delta\varphi$	3.5024271		$\log \Delta\lambda$	3.1866739
CORR. arco-sen	- 43		CORR. arco-sen	- 10
$\log \Delta\varphi_1$	3.5024228		$\log \Delta\lambda_1$	3.1866729
$\log \cos \frac{\Delta\lambda}{2}$	9.9999970		$\log \cos \varphi_m$	9.9539165
$\text{colog } B_m$	1.4881675		$\text{colog } A_m$	1.4905547
$\log \{a \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})\}$	4.9905873		$\log \{a \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})\}$	4.6311441
			$\log \{a \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})\}$	4.9905873
$\log \Delta\lambda$	3.1866739	$3 \log \Delta\lambda$	$\log \tan(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	9.6405568
$\log \sec \varphi_m$	9.6407611	$\log F$	$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$	23° 36' 32".32
$\log \sec \frac{\Delta\varphi}{2}$	0.0000129	$\log b$	$\log \sec(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	9.6025945
$\log a$	2.8274479		$\log \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	9.9620377
a	+ 672.12		$\log S_1$	5.0285496
b			CORR. arco-sen	+ 51
$-\Delta\alpha$ (segs.)	+ 672".12		$\log \delta$	5.0285547
$-\frac{\Delta\alpha}{2}$	+ 336".06		δ	106795.92
	+ 5' 36".06			
$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$	336° 23' 27".68			
α (1 para 2)	336° 29' 03".74			
$\Delta\alpha$	-11' 12".12			
α' (2 para 1)	156° 17' 51".62			

CÁLCULO INVERSO DE POSIÇÕES GEODÉSICAS

NOME DA ESTAÇÃO			
1. φ	19° 50' 15"	Córrego Alegre	λ 48° 57' 43"
2. φ'	19° 45' 55"	Uberaba	λ' 47° 57' 40"
$\Delta\varphi = (\varphi' - \varphi)$	+ 04' 20"	$\Delta\lambda = (\lambda' - \lambda)$	- 1° 00' 03"
$\frac{\Delta\varphi}{2}$	+ 02' 10"	$\frac{\Delta\lambda}{2}$	- 30' 01"
$\varphi_m = (\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2})$	19° 52' 25"		
$\Delta\varphi$ (segs.)	+ 260"	$\Delta\lambda$ (segs.)	- 3603"
$\log \Delta\varphi$	2.4149733	$\log \Delta\lambda$	3.5566643
CORR. arco-sen		CORR. arco-sen	- 55
$\log \Delta\varphi_1$	2.4149733	$\log \Delta\lambda_1$	3.5566588
$\log \cos \frac{\Delta\lambda}{2}$	9.9999835	$\log \cos \varphi_m$	9.9733333
$\text{colog } B_m$	1.4878336	$\text{colog } A_m$	1.4904433
$\log \{s \cos(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})\}$	3.9017904	$\log \{s \cos(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})\}$	5.0204354
$\log \Delta\lambda$	3.5566643	$\log \tan(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})$	3.9017904
$\log \sin \varphi_m$	9.5314105	$\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2}$	85° 38' 54".51
$\log \sec \frac{\Delta\varphi}{2}$	0.0000001	$\log \sin(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})$	9.9987462
$\log a$	3.0880749	$\log \cos(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})$	8.8801012
a	+ 1224.82	$\log S_1$	5.0216892
b		CORR. arco-sen	+ 49
$-\Delta\alpha$ (segs.)	+ 1224".82	$\log S$	5.0216941
$-\frac{\Delta\alpha}{2}$	+ 612".41	S	105122.11
	+ 10' 12".41		
$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$	265° 38' 54".51		
α (1 para 2)	265° 49' 06".92		
$\Delta\alpha$	-20' 24".82		
α' (2 para 1)	85° 28' 42".10		

CÁLCULO INVERSO DE POSIÇÕES GEODÉSICAS

NOME DA ESTAÇÃO			
1. φ	19° 45' 55"	Uberaba	λ 47° 57' 40"
2. φ'	19° 35' 42"	Araxá	λ' 46° 54' 20"
$\Delta\varphi = (\varphi' - \varphi)$	+ 10' 13"	$\Delta\lambda = (\lambda' - \lambda)$	- 1° 03' 20"
$\frac{\Delta\varphi}{2}$	+ 05' 06"	$\frac{\Delta\lambda}{2}$	- 31' 40"
$\varphi_m = (\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2})$	19° 50' 01"		
$\Delta\varphi$ (segs.)	+ 613"	$\Delta\lambda$ (segs.)	- 3800"
$\log \Delta\varphi$	2.7874605	$\log \Delta\lambda$	3.5797836
CORR. arco-sen	- 2	CORR. arco-sen	- 62
$\log \Delta\varphi_1$	2.7874603	$\log \Delta\lambda_1$	3.5797774
$\log \cos \frac{\Delta\lambda}{2}$	9.9999816	$\log \cos \varphi_m$	9.9734428
$\text{colog } B_m$	1.4878316	$\text{colog } A_m$	1.4904427
$\log \{ \frac{1}{2} \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}) \}$	4.2752735	$\log \{ \frac{1}{2} \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}) \}$	5.0436629
		$\log \{ \frac{1}{2} \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}) \}$	4.2752735
$\log \Delta\lambda$	3.5797836	$\log \tan(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	0.7683894
$\log \sin \varphi_m$	9.5305708	$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$	80° 19' 35".76
$\log \sec \frac{\Delta\varphi}{2}$	0.0000005	$\log \sin(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	9.9937807
$\log a$	3.1103549	$\log \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	9.2253914
a	+ 1289.30	$\log S_1$	5.0498822
b		CORR. arco-sen	+ 56
$-\Delta\alpha$ (segs.)	+ 1289".30	$\log S$	5.0498878
$-\frac{\Delta\alpha}{2}$	+ 644".65	S	112172.87
	+ 10' 44".65		
$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$	260° 19' 35".76		
α (1 para 2)	260° 30' 20".41		
$\Delta\alpha$	-21' 29".30		
α' (2 para 1)	80° 08' 51".11		

CÁLCULO INVERSO DE POSIÇÕES GEODÉSICAS

NOME DA ESTAÇÃO					
1. φ	19° 35' 42"	Araxá	λ	46° 54' 20"	
2. φ'	19° 47' 35"	Luz	λ'	45° 36' 49"	
$\Delta\varphi = (\varphi' - \varphi)$	- 11' 53"		$\Delta\lambda = (\lambda' - \lambda)$	- 1° 17' 31"	
$\frac{\Delta\varphi}{2}$	- 05' 56"		$\frac{\Delta\lambda}{2}$	- 38' 45"	
$\varphi_m = (\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2})$	19° 41' 38"				
$\Delta\varphi$ (segs)	- 713"		$\Delta\lambda$ (segs)	- 4651"	
$\log \Delta\varphi$	2.8530895		$\log \Delta\lambda$	3.6675463	
CORR. arco-sen	- 2		CORR. arco-sen	- 91	
$\log \Delta\varphi_1$	2.8530893		$\log \Delta\lambda_1$	3.6675372	
$\log \cos \frac{\Delta\lambda}{2}$	9.9999724		$\log \cos \varphi_m$	9.9738233	
$\text{colog } B_m$	1.4878248		$\text{colog } A_m$	1.4904404	
$\log \{a \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})\}$	4.3408865		$\log \{a \sin(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})\}$	5.1318009	
			$\log \{a \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})\}$	4.3408865	
$\log \Delta\lambda$	3.6675463	$3 \log \Delta\lambda$	$\log \tan(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	0.7909144	
$\log \sin \varphi_m$	9.5276232	$\log F$	$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$	80° 48' 25".08	
$\log \sec \frac{\Delta\varphi}{2}$	0.0000007	$\log b$	$\log \sin(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	9.9943856	
$\log a$	3.1951702		$\log \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	9.2034712	
a	+ 1567.36		$\log B_1$	5.1374153	
b			CORR. arco-sen	+ 83	
$-\Delta\alpha$ (segs)	+ 1567".36		$\log B$	5.1374236	
$-\frac{\Delta\alpha}{2}$	+ 783".68		B	137221.95	
	+13' 03".68				
$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$	279° 11' 34".92				
α (1 para 2)	279° 24' 38".60				
$\Delta\alpha$	-26' 07".36				
α (2 para 1)	98° 58' 31".24				

CÁLCULO INVERSO DE POSIÇÕES GEODÉSICAS

NOME DA ESTAÇÃO					
1. φ	19° 47' 35"	Luz		λ	45° 36' 49"
2. φ'	20° 02' 42"	Rola Moça		λ'	43° 59' 44"
$\Delta\varphi = (\varphi' - \varphi)$	- 15' 07"	$\Delta\lambda = (\lambda' - \lambda)$			- 1° 37' 05"
$\frac{\Delta\varphi}{2}$	- 07' 33"	$\frac{\Delta\lambda}{2}$			- 48' 32"
$\varphi_m = (\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2})$	19° 55' 08"				
$\Delta\varphi$ (segs.)	- 907"	$\Delta\lambda$ (segs.)			- 5825"
$\log \Delta\varphi$	2.9576073	$\log \Delta\lambda$			3.7652959
CORR. arco-sen	- 4	CORR. arco-sen			- 144
$\log \Delta\varphi_1$	2.9576069	$\log \Delta\lambda_1$			3.7652815
$\log \cos \frac{\Delta\lambda}{2}$	9.9999568	$\log \cos \varphi_m$			9.9732091
$\text{colog } B_m$	1.4878358	$\text{colog } A_m$			1.4904441
$\log \{a, \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})\}$	4.4443995	$\log \{a, \sin(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})\}$			5.2289347
		$\log \{a, \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})\}$			4.4443995
$\log \Delta\lambda$	3.7652959	$3 \log \Delta\lambda$		$\log \tan(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	0.7845352
$\log \sin \varphi_m$	9.5323588	$\log F$		$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$	80° 40' 23".91
$\log \sec \frac{\Delta\varphi}{2}$	0.0000010	$\log b$		$\log \sin(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	9.9942205
$\log a$	3.2976557			$\log \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	9.2096853
a	+ 1984.52			$\log B_1$	5.2347142
b				CORR. arco-sen	+ 130
$-\Delta\alpha$ (segs.)	+ 1984".52			$\log \delta$	5.2347272
$-\frac{\Delta\alpha}{2}$	+ 992".26			δ	171682.96
	+ 16' 32".26				
$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$	279° 19' 36".09				
α (1 para 2)	279° 36' 08".35				
$\Delta\alpha$	-33' 04".52				
α' (2 para 1)	99° 03' 03".83				

CÁLCULO INVERSO DE POSIÇÕES GEODÉSICAS

NOME DA ESTAÇÃO				
1. φ	20° 02' 42"	Rola Meça	λ	43° 59' 44"
2. φ'	20° 04' 10"	Raul Soares	λ'	42° 46' 20"
$\Delta\varphi = (\varphi' - \varphi)$	- 01' 28"	$\Delta\lambda = (\lambda' - \lambda)$	- 1° 13' 24"	
$\frac{\Delta\varphi}{2}$	- 44"	$\frac{\Delta\lambda}{2}$	- 36' 42"	
$\varphi_m = (\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2})$	20° 03' 26"			
$\Delta\varphi$ (segs.)	- 88"	$\Delta\lambda$ (segs.)	- 4404"	
$\log \Delta\varphi$	1.9444827	$\log \Delta\lambda$	3.6438473	
CORR. arco-sen		CORR. arco-sen	- 82	
$\log \Delta\varphi_1$	1.9444827	$\log \Delta\lambda_1$	3.6438391	
$\log \cos \frac{\Delta\lambda}{2}$	9.9999753	$\log \cos \varphi_m$	9.9728277	
$\text{colog } B_m$	1.4878427	$\text{colog } A_m$	1.4904464	
$\log \{s \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})\}$	3.4323007	$\log \{s \sin(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})\}$	5.1071132	
		$\log \{s \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})\}$	3.4323007	
$\log \Delta\lambda$	3.6438473	$\log \tan(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	1.6748125	
$\log \sin \varphi_m$	9.5352415	$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$	88° 47' 19".38	
$\log \sec \frac{\Delta\varphi}{2}$		$\log \sin(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	9.9999030	
$\log a$	3.1790888	$\log \cos(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2})$	8.3250907	
a	+ 1510.38	$\log \vartheta_1$	5.1072102	
b		CORR. arco-sen	+ 72	
$-\Delta\alpha$ (segs.)	+ 1510".38	$\log \vartheta$	5.1072174	
$-\frac{\Delta\alpha}{2}$	+ 755".19	ϑ	128002.18	
	+ 12' 35".19			
$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$	271° 12' 40".62			
α (1 para 2)	271° 25' 15".81			
$\Delta\alpha$	-25' 10".38			
α (2 para 1)	91° 00' 05".43			

CÁLCULO INVERSO DE POSIÇÕES GEODÉSICAS

NOME DA ESTAÇÃO				
1. φ	20° 04' 10"	Raul Soares	λ	42° 26' 20"
2. φ'	20° 09' 49"	Vitória	λ'	40° 11' 46"
$\Delta\varphi = (\varphi' - \varphi)$	- 05' 39"	$\Delta\lambda = (\lambda' - \lambda)$	- 2° 14' 34"	
$\frac{\Delta\varphi}{2}$	- 02' 49"	$\frac{\Delta\lambda}{2}$	- 1° 07' 17"	
$\varphi_m = (\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2})$	20° 06' 59"			
$\Delta\varphi$ (segs.)	- 339"	$\Delta\lambda$ (segs.)	- 8074"	
$\log \Delta\varphi$	2.5301997	$\log \Delta\lambda$	3.9070887	
CORR. arco-sen		CORR. arco-sen	- 277	
$\log \Delta\varphi_1$	2.5301997	$\log \Delta\lambda_1$	3.9070610	
$\log \cos \frac{\Delta\lambda}{2}$	9.9999168	$\log \cos \varphi_m$	9.9726637	
$\text{colog } B_m$	1.4878456	$\text{colog } A_m$	1.4904474	
$\log \{s, \cos(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})\}$	4.0179611	$\log \{s, \cos(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})\}$	5.3701721	
		$\log \{s, \cos(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})\}$	4.0179611	
$\log \Delta\lambda$	3.9070887	$\log \tan(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})$	1.3522110	
$\log \sin \varphi_m$	9.5364679	$\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2}$	87° 27' 19".30	
$\log \sec \frac{\Delta\varphi}{2}$	0.0000002	$\log \sin(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})$	9.9995715	
$\log a$	3.4435568	$\log \cos(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2})$	8.6473607	
a	+ 2776.88	$\log g_1$	5.3706006	
b		CORR. arco-sen	+ 244	
$-\Delta\alpha$ (segs.)	+ 2776".88	$\log S$	5.3706250	
$-\frac{\Delta\alpha}{2}$	+ 1388".44	S	234760.49	
	+ 23' 08".44			
$\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}$	272° 32' 40".60			
α (1 para 2)	272° 55' 49".04			
$\Delta\alpha$	-46' 16".88			
α (2 para 1)	92° 09' 32".16			

QUADRO IV
(Distâncias e Azimutes)

Do Vértice	Ao Vértice	A		L (km)	cos A	sen A	L cos A sen 1 ^a (m)	L sen A sen 1 ^a (m)	
Corrego Alegre Ribeiro dos Santos Areão Aguios Avaí Itaerê Portão	Ribeiro dos Santos	357	16	23	88.847	+ .99886761	- .04757619	+ 0.430	- 0.020
	Areão	6	53	00	137.517	+ .99279225	+ .11984805	+ 0.662	+ 0.080
	Aguios	350	17	47	69.870	+ .98569285	- .16855150	+ 0.334	- 0.057
	Avaí	353	14	17	65.267	+ .99304393	- .11774442	+ 0.314	- 0.037
	Itaerê	18	27	19	122.740	+ .94857104	+ .31656435	+ 0.565	+ 0.188
Itaerê Portão	Portão	7	13	44	151.694	+ .99205138	+ .12583345	+ 0.730	+ 0.093
	Jatiroca	336	29	04	106.796	+ .91695178	- .39899803	+ 0.475	- 0.207
Corrego Alegre Uberaba Avaí Itaerê Rola Moga Raul Soares Vitória	Uberaba	265	49	07	105.122	- .07291424	- .99733821	- 0.037	- 0.508
	Avaí	260	30	20	112.173	- .16595197	- .98630160	- 0.090	- 0.537
	Itaerê	279	24	39	137.222	+ .16351250	- .98651126	+ 0.109	- 0.657
	Rola Moga	279	36	08	171.683	+ .16680699	- .98598957	+ 0.139	- 0.821
	Raul Soares	271	25	16	128.002	+ .02480052	- .99969242	+ 0.015	- 0.621
	Vitória	272	55	49	234.760	+ .05112070	- .99869248	+ 0.058	- 1.137

Q U A D R O V

(Nivelamento Astronômico)

⁽¹⁾ V e r t i c a l	⁽²⁾ L c o s s e n t	⁽³⁾ L s e n d e n t	⁽⁴⁾ η	⁽⁵⁾ $\eta_A + \eta_B$	⁽⁶⁾ ξ	⁽⁷⁾ $\xi_A + \xi_B$	⁽⁸⁾ $-[(2) \times (5)]$	⁽⁹⁾ $-[(3) \times (7)]$	⁽¹⁰⁾ $(8) - (9)$	⁽¹¹⁾ H
Córrego Alegre	-	-	0,00	-	0,00	-	-	-	-	-
Ribeiro dos Santos	+ 0,430	- 0,020	+ 0,45	+ 0,45	- 0,03	- 0,03	+ 0,097	+ 0,000	+ 0,10	+ 0,10
Aracão	+ 0,662	+ 0,080	+ 0,74	+ 1,19	+ 0,95	+ 0,92	+ 0,394	+ 0,037	+ 0,36	+ 0,46
Aguios	+ 0,334	- 0,057	+ 0,98	+ 1,72	+ 1,42	+ 2,37	+ 0,287	- 0,067	+ 0,35	+ 0,81
Avare	+ 0,314	- 0,037	+ 1,17	+ 2,15	+ 1,28	+ 2,70	+ 0,337	- 0,050	+ 0,39	+ 1,20
Itararé	+ 0,565	+ 0,188	+ 10,70	+ 11,87	+ 0,08	+ 1,36	+ 3,353	+ 0,128	+ 3,22	+ 4,42
Portão	+ 0,730	+ 0,093	- 4,65	+ 6,05	- 1,78	- 1,70	+ 2,208	- 0,079	+ 2,29	+ 6,71
Jativoca	+ 0,475	- 0,207	- 6,14	- 10,79	- 6,62	- 8,40	- 2,563	+ 0,869	- 3,43	+ 3,28
Córrego Alegre	-	-	0,00	-	0,00	-	-	-	-	-
Uberaba	- 0,037	- 0,508	+ 0,19	+ 0,19	+ 9,51	+ 9,51	- 0,003	- 2,415	+ 2,41	+ 2,41
Araxá	- 0,090	- 0,537	+ 5,57	+ 5,76	+ 3,89	+ 13,40	- 0,259	- 3,598	+ 3,34	+ 5,75
Iam	+ 0,109	- 0,657	+ 3,13	+ 8,70	+ 2,15	+ 6,04	+ 0,474	- 1,984	+ 2,46	+ 8,21
Rola Moça	+ 0,139	- 0,821	+ 10,31	+ 13,44	+ 7,16	+ 9,31	+ 0,934	- 3,822	+ 4,76	+ 12,97
Raul Soares	+ 0,015	- 0,621	+ 6,75	+ 17,06	+ 14,12	+ 21,28	+ 0,128	- 6,607	+ 6,73	+ 19,70
Viçória	+ 0,058	- 1,137	+ 4,54	+ 11,29	+ 2,38	+ 16,50	+ 0,327	- 9,380	+ 9,71	+ 29,41

Quanto ao erro do azimuth, adotamos até agora a aproximação de $1''$, embora o azimuth geodésico seja obtido com mais precisão. Vamos portanto, manter:

$$dA = 5 \times 10^{-6} \text{ radianos}$$

Quanto à distância, temos nos contentado com a aproximação de $1m$, de modo que vamos escrever:

$$dL = 1 m$$

Adotando para L o valor de 200 Km , próximo do máximo observado, e substituindo, temos:

$$\begin{aligned} d(N_B - N_A) = & 2,5 \times 0,707 \left[(\eta_A + \eta_B) + (\xi_A + \xi_B) \right] \times 10^{-6} + \\ & + 2,5 \times 0,707 \left[(\eta_A + \eta_B) + (\xi_A + \xi_B) \right] \times 10^{-6} + \\ & + 0,5 \times 0,707 \left[d(\eta_A + \eta_B) + d(\xi_A + \xi_B) \right] \end{aligned} \quad (72)$$

Como seria de esperar, esta fórmula nos mostra que, mesmo para os valores máximos observados dos desvios de vertical, as componentes do erro devidos ao azimuth e à distância, são desprezíveis em face do terceiro termo, devido ao erro dos desvios de vertical. Podemos então escrever:

$$d(N_B - N_A) = \frac{L \sin A}{2} \left[\cos A \cdot d(\eta_A + \eta_B) + \sin A \cdot d(\xi_A + \xi_B) \right] \quad (73)$$

Raciocinemos, portanto, em torno do erro dos desvios de vertical, retomando as fórmulas (65) e (66). Se admitirmos para as coordenadas geodésicas um erro comparável com o das astronômicas, e desprezarmos o coeficiente ... $\cos \varphi$, em face da maior probabilidade de erro nas determinações de longitude, podemos escrever:

$$d\eta = d\varphi \sqrt{2}$$

$$d\xi = d\lambda \sqrt{2}$$

donde:

$$d(\eta_A + \eta_B) = d\eta \sqrt{2} = 2 d\varphi$$

$$d(\xi_A + \xi_B) = d\xi \sqrt{2} = 2 d\lambda$$

Ora, como já vimos,

$$d\varphi = d\lambda = 0.1''$$

donde:

$$d(\eta_A + \eta_B) = d(\xi_A + \xi_B) = 0.2''$$

De uma forma aproximada, em um arco de meridiano teremos:

$$\cos A \approx 1$$

$$\sin A \approx 0$$

Da mesma forma, em um arco de paralelo:

$$\cos A \approx 0$$

$$\sin A \approx 1$$

Para os dois casos, que são os do nosso exem

plo:

$$d(N_B - N_A) = 0.1'' L \text{ sen } 1'' \quad (74)$$

Ou seja, para valores de L da ordem de grandeza dos encontrados no exemplo:

L	$d(N_B - N_A)$
50 Km	0.024 m
100 Km	0.048 m
150 Km	0.073 m
200 Km	0.097 m
250 Km	0.121 m

De acôrdo com êste critério, podemos avaliar os erros das cotas calculadas, pela forma exposta no Quadro VI.

Êstes são os valores teóricos dos erros prováveis, que resultam da aplicação da fórmula (68). Mas esta, por sua vez, é uma fórmula aproximada, de modo que heverá, forçosamente, uma outra componente do erro, representada pelos termos superiores ao primeiro gráu, da variação dos desvios de vertical entre cada dois pontos de Laplace, ou seja, para arcos de meridiano:

$$d_1(\eta_A + \eta_B) - (\eta_A + \eta_B) - \frac{2}{L} \int_A^B \eta dL$$

E para arcos de paralelo:

$$d_1(\xi_A + \xi_B) - (\xi_A + \xi_B) - \frac{2}{L} \int_A^B \xi dL$$

A dificuldade, quanto a estas componentes, é que sua avaliação só experimentalmente pode ser realizada,

QUADRO VI
(Erros Prováveis)

V é r t i c e	Distância (Km)	$\alpha(N_B - N_A)$	$\left[\alpha(N_B - N_A)\right]^2$	SOMA	$(SOMA)^{\frac{1}{2}}$
Corrego Alegre	-	-	-	-	-
Ribeiro dos Santos	88.8	0.043	0.0018	0.0018	0.04
Areão	137.5	0.067	0.0045	0.0063	0.08
Agudos	69.9	0.034	0.0012	0.0075	0.09
Avaré	65.3	0.032	0.0010	0.0085	0.09
Itararé	122.7	0.059	0.0035	0.0120	0.11
Portão	151.7	0.074	0.0055	0.0175	0.13
Jativoca	106.8	0.052	0.0027	0.0202	0.14
Corrego Alegre	-	-	-	-	-
Uberaba	105.1	0.051	0.0026	0.0026	0.05
Araxá	112.2	0.054	0.0029	0.0055	0.07
Luz	137.2	0.067	0.0045	0.0100	0.10
Rola Moça	171.7	0.083	0.0069	0.0169	0.13
Raul Soares	128.0	0.062	0.0038	0.0207	0.14
Vitória	234.8	0.114	0.0130	0.0337	0.18

pois como vimos antes não é conhecida a lei de variação das coordenadas astronômicas entre dois pontos de observação. No caso contrário, empregariamos a fórmula (64), em vez da (68).

Apresenta, assim, um interesse muito acentuado a verificação e distribuição dos erros de fechamento de circuitos, a exemplo dos processos adotados nos trabalhos de nivelamento comum. Esta é, portanto, uma precaução que deixamos como sugestão indispensável aqueles que se dispuserem a uma aplicação sistemática do método ao conjunto da rede de triangulação. Infelizmente, não havendo ainda um cálculo completo, nem um ajustamento de conjunto das triangulações já executadas em nosso País, faltam-nos elementos de suficiente confiança para nos dedicarmos a trabalho dessa natureza, onde a coerência e a prudência impõem que o ajustamento planimétrico preceda o altimétrico.

Passando, agora, a outro ponto de vista, vamos lembrar que a posição do elipsóide é arbitrária, de modo que são também arbitrárias as cotas (N) obtidas. Toda e qualquer variação do Datum trará uma variação correspondente das cotas do geóide, muito embora se possa demonstrar que pequenas variações do Datum não chegam a introduzir alteração sensível na forma dos perfis obtidos.

Nestas condições, deve haver uma posição de ótima adaptação do elipsóide ao geóide na região em estudo; será aquela em que as cotas do geóide forem mínimas, quando consideradas em seu conjunto, ou sendo N_1 a cota correspondente a um ponto qualquer, quando satisfeita a condição:

$$\sum N_i^2 = \text{Mínimo}$$

Para examinar este ponto, vamos completar a fórmula (68), escrevendo-a sob a seguinte forma:

$$N = N_0 + \frac{1}{2} \sum L \cos A (\eta_A + \eta_B) \operatorname{sen} i'' - \frac{1}{2} \sum L \operatorname{sen} A (\xi_A + \xi_B) \operatorname{sen} i''$$

Se admitirmos, agora, que a cota N_0 e a direção da vertical no Datum sofram pequenas alterações ΔN_0 , $\Delta \eta_0$ e $\Delta \xi_0$, estas propagar-se-ão de forma sensivelmente uniforme, para nossos fins, a todos os outros vértices da triangulação, permitindo-nos escrever para um ponto qualquer, com a ressalva dos termos de segunda ordem e ordens inferiores:

$$\Delta \eta_A = \Delta \eta_B = \Delta \eta_0$$

$$\Delta \xi_A = \Delta \xi_B = \Delta \xi_0$$

E:

$$\Delta N = \Delta N_0 + \frac{1}{\rho''} (\sum L \cos A) \Delta \eta_0 - \frac{1}{\rho''} (\sum L \operatorname{sen} A) \Delta \xi_0$$

A condição ideal seria evidentemente aquela em que todas as cotas se reduzissem a zero, isto é:

$$N + \Delta N = 0$$

donde:

$$\Delta N = -N$$

Substituindo, temos:

$$\Delta N_0 + \frac{1}{\rho''} (\sum L \cos A) \Delta \eta_0 - \frac{1}{\rho''} (\sum L \operatorname{sen} A) \Delta \xi_0 + N = 0$$

Para cada um dos pontos incluídos no cálculo, surge uma equação desta forma, de modo que, em uma análise de conjunto, o número de equações excederá o de incógnitas. Aplicando, então, o método dos mínimos quadrados, devemos encontrar as correções ao Datum que nos proporcionem a melhor adaptação do elipsóide ao geóide, na região em estudo.

Para simplificar, chamemos a e b os coeficientes de $\Delta\eta_0$ e $\Delta\xi_0$ na fórmula anterior, ou seja:

$$a = \frac{1}{\rho''} (\sum L \cos A)$$

$$b = -\frac{1}{\rho''} (\sum L \sin A)$$

Seja ainda n o número total de pontos observados. As equações normais tomam a forma:

$$\eta \Delta N_0 + \sum a \Delta \eta_0 + \sum b \Delta \xi_0 + \sum N = 0$$

$$\sum a \Delta N_0 + \sum a a \Delta \eta_0 + \sum a \cdot b \Delta \xi_0 + \sum a N = 0$$

$$\sum b \Delta N_0 + \sum a b \Delta \eta_0 + \sum b b \Delta \xi_0 + \sum b N = 0$$

Cuja resolução conduz à determinação do Datum relativo, a qual não podemos deixar de sugerir, enquanto não chegam a termo os laboriosos levantamentos necessários à determinação do Datum absoluto.

VI - CONSIDERAÇÕES FINAIS

No capítulo anterior, foi estudado e exemplificado o processo de levantamento de perfis do geóide, com o auxílio da observação astronômica da direção da vertical, o que vale dizer, da direção da força da gravidade, em determinados pontos ligados entre si pelo levantamento geodésico.

Como vimos em outra oportunidade, a solução do problema é possível também através de observações da intensidade da gravidade, de modo que não devemos desprezar as possibilidades de aplicação deste método nas áreas em que não dispomos de levantamentos geodésicos ou topográficos e astronômicos.

Passemos então a considerar a fórmula de Stokes em sua forma adequada à integração numérica:

$$N = \frac{a}{G} \sum \Delta g_m \int_{\psi_1}^{\psi_2} F \sin \psi \, d\psi$$

Onde, como já vimos:

a é o raio médio da Terra

G é o valor médio da gravidade

$$F = \frac{1}{2} \left[\operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 1 - 6 \sin \frac{\psi}{2} - 5 \cos \psi - \right. \\ \left. - 3 \cos \psi \log_e \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \right]$$

ψ é o ângulo sob o qual seria vista, do centro da Terra, a distância do ponto considerado ao elemento de superfície ds no qual temos a anomalia Δg_m da gravidade.

Em nosso caso, Δg_m é a anomalia da gravidade na zona circular compreendida entre os dois círculos de raios ψ_1 e ψ_2 , tendo como centro o ponto de observação.

Ora, em primeiro lugar, só poderemos cogitar de uma aplicação prática deste método quando dispuzermos de cartas gravimétricas nas quais possamos ler as anomalias. Satisfeito este requisito, os raios ψ_1 e ψ_2 , para cada zona, podem ser fixados à nossa vontade, de forma que torne mais fácil a leitura das cartas gravimétricas, e o cálculo de N .

Consideremos, pois, a Figura 7, e chamemos Δg a anomalia média em cada um dos compartimentos como ABCD.

A anomalia média na zona compreendida entre os raios ψ_1 e ψ_2 será, evidentemente:

$$\Delta g_m = \frac{\Delta \alpha}{2\pi} \sum \Delta g$$

Substituindo na fórmula anterior, encontramos:

$$N = \frac{a}{2\pi G} \sum \Delta \alpha \Delta g \int_{\psi_1}^{\psi_2} F \sin \psi d\psi$$

De acôrdo com esta fórmula, é possível projetar uma divisão em zonas e compartimentos que torne aritmético e o mais simples possível o cálculo de N .

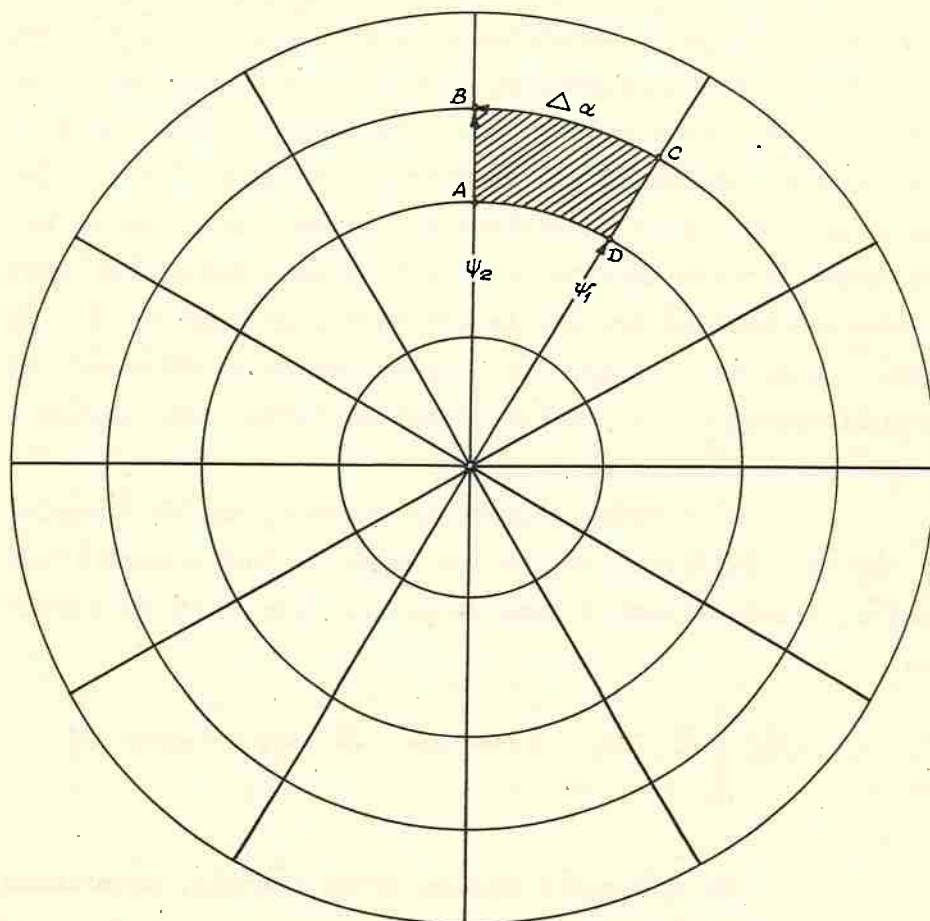


Figura 7

Ao mesmo tempo, porém, devemos lembrar-nos que a construção das cartas gravimétricas depende do trabalho árduo e laborioso do levantamento gravimétrico, e que este consiste não só na determinação da gravidade como também do levantamento, ainda mais difícil, do apóio altimétrico e planimétrico indispensável ao cálculo das anomalias e à localização dos pontos de observação. Além disto, não existem ainda particularmente no Brasil, planos definidos para a extensão sistemática dos levantamentos gravimétricos às áreas oceânicas. Assim, não podemos pensar na extensão da fórmula anterior à superfície total da Terra, como indica o somatório na fórmula de Stokes.

Só podemos pensar, no momento, em utilizá-la em regiões limitadas, com vistas ainda ao levantamento de perfís, transportando a cota do geóide pela seguinte fórmula:

$$N_B - N_A = \frac{a \Delta g}{2\pi G} \left[\sum_B \Delta g \int_{\psi_1}^{\psi_2} F \sin \psi d\psi - \sum_A \Delta g \int_{\psi_1}^{\psi_2} F \sin \psi d\psi \right]$$

Na aplicação prática desta fórmula, deveríamos limitar a extensão de cada perfil, apoiar seus extremos em pontos nos quais o valor de N fosse pré-determinado, e confiar na variação uniforme das funções de Stokes, ao longo de cada perfil, para a distribuição do erro total apurado, entre os pontos extremos.

Ora, a possibilidade, que mostramos antes, do levantamento imediato e simples de perfís do geóide, ao longo dos arcos de triangulação (nos termos da Resolução adota

da pela Associação Internacional de Geodésia, em sua reunião de Oslo, em 1948), torna evidente que podemos pensar também em termos do levantamento em área, por interpolação, desde que os perfis sejam convenientemente dispostos e razoavelmente próximos entre si.

Esta condição depende, por um lado, do adensamento do levantamento geodésico ou topográfico, e este, como sabemos, é uma necessidade urgente para o levantamento cartográfico do País. Além disto, com o desenvolvimento recente dos instrumentos eletrônicos de medição de distâncias, particularmente o Telurômetro, é lícito prever que se possa em grande parte substituir a complexidade e o custo relativamente alto das triangulações, pela maior simplicidade, rapidez e economia das poligonações, não só no levantamento de grandes linhas, tais como as vias de comunicação, como também no adensamento puro e simples do controle geodésico.

O satisfatório adensamento do controle geodésico e topográfico não é, portanto, uma possibilidade tão longínqua quanto se pode supôr à primeira vista. Por outro lado, precisamos dispôr das coordenadas astronômicas, sem as quais não é possível o cálculo dos desvios de vertical.

Nestas condições, o processo mais imediato de levantamento de geóide ainda se resume na determinação de coordenadas astronômicas nos vértices das triangulações e poligonações, cujo levantamento se imponha para o levantamento cartográfico.

Não é essencial, finalmente, que essas coordenadas astronômicas sejam determinadas com precisão de primeira ordem, tal como se procede nos pontos de Laplace. As coordenadas de segunda ordem podem ser igualmente utilizadas, como vimos antes, desde que condicionemos o seu espaçamento à precisão almejada no levantamento dos perfis, sem perder de vista que a diferença de complexidade e custo entre êsses dois tipos de coordenadas astronômicas, pode tornar mais econômica a determinação de várias de segunda ordem que uma de primeira.

Nestas condições, parece-nos que o método astronômico, ainda durante algum tempo, continuará prestando-se melhor que o gravimétrico ao estudo do geóide nas áreas continentais, principalmente em nosso País, em face do estado incipiente dos levantamentos gravimétricos em terra e mais ainda no mar.

Resta ponderar a conveniência de que o relevo assim determinado seja absoluto, isto é, referido a um Datum absoluto.

O método astronômico, tal como já vimos, conduz naturalmente à determinação de um Datum relativo, mas evidentemente não permite a determinação de um Datum absoluto.

Parece-nos, assim, que inicialmente devemos concentrar nossos esforços, no que diz respeito ao levantamento gravimétrico, na determinação do Datum, enquanto procedemos ao levantamento do geóide, pelo método astronômico, referido a um Datum provisório, arbitrário ou relativo, já que as fórmulas anteriormente vistas nos mostram como é

relativamente simples passar de um a outro valor do Datum.

Isto no que diz respeito à planimetria, ou seja, à latitude e à longitude.

Quanto a um valor absoluto de N_0 , não podemos ter muita esperança de vê-lo determinado, em curto prazo, pelo método gravimétrico, mas sim pelas observações de paralaxe lunar, pelo Método de Markowitz, que se encontram em curso no Observatório de São Paulo.

Outra possibilidade que se apresenta, ainda no campo do método paralático, com o recente desenvolvimento de projéteis de longo alcance, é a fotografia noturna de clarões emitidos por projéteis lançados a grandes altitudes, segundo o programa de Atkinson.

Esta é a visão geral do problema e estes são os pontos de vista que submetemos à apreciação dos mestres e entendidos na matéria.

VII - BIBLIOGRAFIA

- HAROLD JEFFREYS - The Earth - Cambridge - University Press
- 1952.
- G. BOMFORD - Geodesy - Oxford - 1952.
- ALLYRIO H. DE MATTOS - Curso Especial de Geodésia - Universidade de São Paulo - 1955.
- W. A. HEISKANEN - Size and Shape of the Earth - Columbus
- 1957.
- PIERRE TARDI • GEORGES LACLAVERE - Traité de Geodésie
Paris - 1955.
- PIERRE LEJAY - Developpements Modernes de la Gravimétrie - Paris - 1947.
- WALTER LAMBERT • FREDERIC DARLING - Tables for Determining
the form of the Geoid and its Indirect
Effect on Gravity - Washington - 1936.
- J. DE GRAAF HUNTER - Tactics of Progressive Geodesy Bulletin Géodésique - 1958.
- REGINALD DALY - Strenght and Structure of the Earth's
Crust - Prentice Hall - 1940.
- JOHN F. HAYFORD - The Figure of the Earth and Isostasy
from Measurements in the United States
- Washington - 1909.
- HEIGH C. MITCHELL - Definitions of Terms Used in Geodetic
and Other Surveys - Washington - 1948.
- M. DUPUY - Étude des Surfaces de Reference en Geo-

- désie et Principe de Leur Determination.
- M. DUPUY - Déterminations Modernes de L'Ellipsoïde
Terrestre.
- LYSANDRO V. RODRIGUEZ - Coordenadas Astronômicas nos Pon-
tos de Laplace - Rio de Janeiro - 1952.
- LLOYD A. BROWN - The Story of Maps - Boston - 1949.
- ALBERT J. HOSKINSON • J. A. DUERKSEN - Manual of Geodetic
Astronomy - Washington - 1947.
- LANSING G. SIMMONS - How Accurate is First Order Triangula-
tion - The Journal of the Coast and Geo-
detic Survey - Washington - 1950.
- JOHN F. HAYFORD - Supplementary Investigation in 1909 of
the Figure of the Earth and Isostasy -
Washington - 1910.
- LYSANDRO V. RODRIGUEZ - O problema do Datum Geodésico -
São Paulo - 1957.

* * *

ÍNDICE

	pg.
I - Introdução	1
II - O geóide	6
III - Coordenadas geográficas	15
IV - Superfícies de referência	31
V - O nivelamento astronômico	57
VI - Considerações finais	99
VII - Bibliografia	106

* * *

ERRATA

<u>Pag. e linha</u>	<u>Onde se lê</u>	<u>Leia-se</u>
6 , 7	subendente-se	subentende-se
10 , 12	na superfície	na superfície e no interior
14 , entre 18 e 19		Quando $A_0 = 1$
29 , 19	$\geq$	$\leq$
29 , 21 e 22	$=$	$\leq$
33 , 11	dados	em dados
39 , 14	suas	seis
44 , 15	ferere	refere
52 , 13	para	por
62 , 3 e 5	- 01.7 e - 08.5	+ 01.7 e + 08.5
98 , 13	η	n

<u>Pag. e linha</u>	<u>Onde se lê</u>	<u>Leia-se</u>
7 , 2	o eixo <u>v</u> coincidirá então	e que o eixo <u>v</u> coincida
7 , 5	na superfície temos:	na superfície e passando pela <u>o</u> rigem, temos, nes <u>se</u> ponto:

