

S B A

29º

SEMINÁRIO BRASILEIRO

DE

ANÁLISE

TRABALHOS APRESENTADOS



0563489

A. H. H.

1922

SEMINARIO BRASILEIRO

DE

ARTE

ESCALA DE PREÇOS



SOBRE EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS DA EQUAÇÃO

$$\ddot{x} + \alpha x^{2n+1} \dot{x} + x^{4n+3} = 0$$

Hamilton Luiz Guidorizzi

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo

Resumo

Provamos, neste artigo, que se $|\alpha| < 2\sqrt{2(n+1)}$ então todas as soluções da equação

$$\ddot{x} + \alpha x^{2n+1} \dot{x} + x^{4n+3} = 0$$

serão periódicas. Se $|\alpha| \geq 2\sqrt{2(n+1)}$ toda solução diferente da trivial será não-periódica. (α real e n natural são dados).

1. Preliminares

No plano de fase, a equação

$$(1) \quad \ddot{x} + \alpha x^{2n+1} \dot{x} + x^{4n+3} = 0$$

é equivalente ao sistema

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha x^{2n+1} y - x^{4n+3} \end{cases}$$

Seja $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida positiva dada por

$$V(x, y) = \frac{x^{4n+4}}{4n+4} + \frac{y^2}{2}.$$

A derivada de V em relação ao sistema (2) é

$$(3) \quad \dot{V}(x, y) = -\alpha x^{2n+1} y^2.$$

Suponhamos $\alpha > 0$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ a solução de (2) que parte do ponto $(0, y_0)$, com $y_0 > 0$. Tendo em vista (3), segue que $\gamma(t)$ não pode deixar o conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } V(x, y) \leq V(0, y_1)\} \quad (y_1 > y_0)$$

através do arco

$$x \geq 0 \text{ e } V(x, y) = V(0, y_1).$$

Observando que $\dot{y} < 0$ quando $\gamma(t)$ permanece no quadrante $x > 0$ e $y > 0$, segue que ou $\gamma(t)$ tenderá para a origem quando $t \rightarrow +\infty$ ou $\gamma(t)$ interceptará o eixo Oy em algum ponto $(0, y_2)$ com $y_2 < 0$. Se ocorrer o segundo caso, γ será periódica. (Isto decorre do fato das funções αx^{2n+1} e x^{4n+3} serem ímpares.)

O caso $\alpha < 0$ recai no caso acima descrito, fazendo em (1) a mudança de variável

$$u(t) = x(-t).$$

2. Condições sobre α para não existência de soluções periódicas

Consideremos a equação

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = -\alpha x^{2n+1} - \frac{x^{4n+3}}{y}.$$

Vejamos que condições α deve satisfazer para que (4) admita solução da forma

$$y = \beta x^{2n+2}, \quad x \neq 0. \quad (\beta \text{ real.})$$

Substituindo (5) em (4) vem

$$(2n+2)\beta x^{2n+1} = -\alpha x^{2n+1} - \frac{x^{2n+1}}{\beta}$$

e, portanto,

$$(2n+2)\beta^2 + \alpha\beta + 1 = 0.$$

Logo, (4) admitirá solução da forma (5) se, e somente se,

$$\alpha^2 - 8(n+1) \geq 0.$$

É de imediata verificação que se (5) for solução de (4) então o conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \beta x^{2n+2}\}$$

será invariante para o sistema (2); além disso, se $\gamma(t)$ for solução de (2) com $\gamma(0) \in A$, então, $\gamma(t)$ tenderá a $(0,0)$ quando $t \rightarrow +\infty$. Observando, ainda, que $(0,0)$ é o único ponto de equilíbrio de (2) resulta o seguinte

Teorema. Seja $|\alpha| \geq 2\sqrt{2(n+1)}$. Então toda solução $x = x(t)$ da equação

$$\ddot{x} + \alpha x^{2n+1} \dot{x} + x^{4n+3} = 0$$

com $x = x(t)$ diferente da solução trivial, será não-periódica.

3. Condições sobre α para existência de soluções periódicas

Suponhamos $|\alpha| < 2\sqrt{2(n+1)}$. Segue que

$$(2n+2)v^2 + \alpha v + 1 > 0$$

para todo v .

A mudança de variável

$$y = vx^{2n+2}$$

transforma a equação

$$\frac{dy}{dx} = -\alpha x^{2n+1} - \frac{x^{4n+3}}{y}$$

na de variáveis separáveis

$$\frac{dx}{x} + \frac{v}{(2n+2)v^2 + \alpha v + 1} dv = 0.$$

Supondo $x > 0$ e integrando obtemos

$$\ln x + \int_0^v \frac{s}{(2n+2)s^2 + \alpha s + 1} ds = c.$$

Seja

$$W(x, y) = \ln x + \int_0^v \frac{s}{(2n+2)s^2 + \alpha s + 1} ds$$

onde $v = \frac{y}{x^{2n+2}}$ e $x > 0$.

Suponhamos que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, seja solução do sistema (2) e tal que, para todo t no intervalo I , $x(t) > 0$. É de imediata verificação que existe uma constante k tal que

$$W(\gamma(t)) = k, \quad t \in I.$$

Vamos, agora, estudar a curva de nível de $W(x, y)$ que passa pelo ponto $(0, x_0)$, $x_0 > 0$. Temos

$$W(x, y) = \ln x_0.$$

Dáí

$$x = x_0 e^{\int_0^v \frac{s}{(2n+2)s^2 + \alpha s + 1} ds}$$

Temos

$$\lim_{|v| \rightarrow +\infty} x = 0.$$

Vamos, agora, calcular $\lim_{|v| \rightarrow +\infty} y$. Temos

$$y = vx_0^{2n+2} e^{-\int_0^v \frac{(2n+2)s}{(2n+2)s^2 + \alpha s + 1} ds}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_0^v \frac{(2n+2)s}{(2n+2)s^2 + \alpha s + 1} ds &= \frac{1}{2} \int_0^v \frac{(4n+4)s + \alpha - \alpha}{(2n+2)s^2 + \alpha s + 1} ds = \\ &= \frac{1}{2} \ln[(2n+2)v^2 + \alpha v + 1] - \frac{1}{2} \int_0^v \frac{\alpha}{(2n+2)s^2 + \alpha s + 1} ds. \end{aligned}$$

Portanto,

$$y = \frac{vx_o^{2n+2}}{\sqrt{(2n+2)v^2 + \alpha v + 1}} e^{\frac{1}{2} \int_0^v \frac{\alpha}{(2n+2)s^2 + \alpha s + 1} ds}$$

Daí

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} y = \frac{x_o^{2n+2}}{\sqrt{2n+2}} e^{\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{(2n+2)s^2 + \alpha s + 1} ds}$$

e

$$\lim_{v \rightarrow -\infty} y = -\frac{x_o^{2n+2}}{\sqrt{2n+2}} e^{\frac{1}{2} \int_0^{-\infty} \frac{\alpha}{(2n+2)s^2 + \alpha s + 1} ds}$$

Temos, então, o seguinte

Teorema. Se $|\alpha| < 2\sqrt{2n+2}$, então todas as soluções da equação

$$\ddot{x} + \alpha x^{2n+1} \dot{x} + x^{4n+3} = 0$$

serão periódicas.

Referências

- [1] H.L. GUIDORIZZI (1988). *Sobre existência de solução periódica para equação de Liénard*. 28º Seminário Brasileiro de Análise, 147-153.
- [2] H.L. GUIDORIZZI (1988). *Contribuições ao Estudo das Equações Diferenciais Ordinárias de 2a. Ordem*. Tese de Doutorado - IME-USP.
- [3] G. VILLARI (1982). *Periodic solution of Liénard solution*. J.Math.Anal.Appl. 86, 379-386.
- [4] G. VILLARI (1983). *On the existence of periodic solutions for Liénard equation*. Non linear Anal., 7, 71-78.
- [5] G. VILLARI (1987). *On the qualitative behavior of solutions of Liénard equation*. J. of Differential Equations, 67, 269-277.

