

DISSIPACÃO DE FORTES OSCILAÇÕES NUM TUBO EM U

L. Barbanti (MAT-IME-USP)

Consideremos um tubo em U, com líquido oscilando dentro dele, submetido à gravidade (na direção $\vec{g}$) com apenas uma extremidade (A) acessível.

Denotando por x a velocidade do líquido no tubo e considerando que o atrito do líquido na parede é proporcional a x^2 , quando $u = P = 0$, vale (v.[1], p.96) : $a\dot{x} = z \pm bx^2$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Consideremos a perturbação $P(t)$ que proporciona uma aceleração no sistema, do tipo:

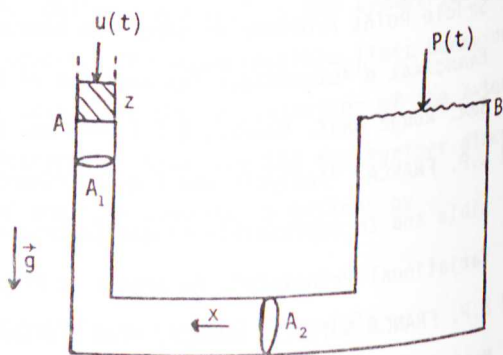
$$(1) \quad a\dot{x} = z \pm bx^2 + cx \quad c \in \mathbb{R}$$

Quando $c \geq 0$ todas as órbitas tendem ao equilíbrio $(x, \dot{x}) = (0, 0)$.

Quando $c < 0$, no entanto, aparece uma órbita periódica não trivial estável, Γ_0 . A origem $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ neste caso é instável.

Este esquema simplificado tem, por exemplo, aplicações na observabilidade de veículos propulsados que mudam bruscamente de meio (tipo: foguete saindo do mar para o ar).

A fim de reutilizar o sistema, há necessidade de se partir do estado $(x, \dot{x}) = (0, 0)$. Então o problema que nos propomos a resolver é conduzir os pontos de Γ_0 à origem em tempo mínimo através da ação da força $u(t)$ na extremidade



Segundo (1) e levando em conta que $\dot{z} \cdot A_1 = A_2 \cdot x$, a equação do sistema controlado é:

$$(S)_K \quad \ddot{x} + (m|x| + c)\dot{x} + x = u(t) \quad (m \in \mathbb{R})$$

com $u \in L_{loc}^\infty$ e $|u(t)| \leq K \quad (K \geq 0)$

Usando resultados de [2], podemos concluir:

- 1) Se um ponto de Γ_0 , ciclo de $(S)_0$, pode ser transferido à origem, segundo $(S)_K$, então pode ser transferido em tempo mínimo através de um u , tipo "relay" (i.e. $|u(t)| = K$ e u tem finitos saltos em cada intervalo de tempo finito).
- 2) Existe $K^* > 0$ tal que: Γ_0 é transferido à origem através de $(S)_K$ se e só se $K > K^*$.

3) Algumas avaliações da "força mínima" K^* podem ser:

$$(i) \quad K^* > -\frac{2+c}{m} \quad ; \quad (ii) \quad K^* \leq -\frac{c}{m} \quad ;$$

(iii) $K^* < x_0$ (onde x_0 é o ponto em que Γ_0 corta o eixo x no plano de fase $(x, \dot{x})$; (iv) $K^* > -\bar{K}$ (onde $\bar{K}$ é tal que

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (m|x| + c)y < \bar{K}\} \neq \emptyset ;$$

(v) $K^* < d$, onde d é a raiz real positiva da equação:

$$F\left(-\frac{m}{c}\right) - F(d) + 2 \left(\left(F\left(-\frac{c}{m}\right) \right)^2 - F\left(-\frac{c}{m}\right) \cdot d \right)^{1/2}$$

com

$$F(y) = \frac{m}{2} y^2 + cy.$$

REFERÊNCIAS

- [1] N.W. Mc Lachlan - "Ordinary non-linear Diff. Eq. in Engineering and Physical Sciences" Oxford Press, 1958 ;
- [2] L. Barbanti - "Liénard equations and control" - LNM - 799, Springer-Verlag, 1980, pp. 1-22.