O PRODUTO DE MATRIZES

Claudio Possani
IME - USP

Há pouco tempo um aluno, o Bruno, me perguntou o porquê da multiplicação de matrizes ser efetuada do modo como é usual. Este artigo é uma tentativa de responder a esta pergunta.

Vamos ver quando e como o produto matricial foi "criado" ("descoberto" ?; "inventado" ?). Se alguém, em algum momento da História, começou a multiplicar matrizes fazendo o produto das linhas pelas colunas, esta pessoa deve ter tido um bom motivo para fazê-lo.

Tradicionalmente ensinamos Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares nesta ordem, o que é razoável do ponto de vista lógico, mas é bom observar que historicamente as coisas não se passaram assim. Creio não ser exagero dizer que o estudo de Sistemas de Equações, lineares ou não, se perde na História e é impossível estabelecer um "início" para a teoria. Determinantes foram aparecendo aqui e acolá, inicialmente associados à resolução de sistemas (já na China antiga!).

Cramer publicou um trabalho em 1750 no qual aparece a regra que hoje tem seu nome, embora esta regra já fosse conhecida.

O nome "determinante" foi utilizado pela primeira vez por Cauchy em 1812, e por essa ocasião determinantes também apareciam na Geometria.

As matrizes aparecem mais tarde! Até então não se falava em

$$\text{determinante da matriz} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mas em

$$\text{determinante do sistema} \quad \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

O conceito de matriz aparece em 1858 num trabalho de Cayley sobre transformações do plano, e a operação matricial envolvida é justamente o produto. Cayley considerava transformações (lineares) do plano $\mathbb{R}^2$ em si próprio do tipo

$$T(x;y) = (ax + by\,;\; cx + dy)$$

Se não quisermos pensar em transformações, podemos considerar mudanças de variáveis.

$$T: \quad \begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases}$$

Suponhamos duas mudanças de variáveis:

$$T_1: \quad \begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases} \qquad T_2: \quad \begin{cases} r = Au + Bv \\ s = Cu + Dv \end{cases}$$

Como podemos expressar r e s em termos de x e y?

Substituindo as expressões de T_1 em T_2 obtemos:

$$\begin{cases} r = A(ax + by) + B(cx + dy) = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ s = C(ax + by) + D(cx + dy) = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{cases}$$

Cayley chamou de "matriz de T_1" a tabela $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e observou que para obtermos a matriz que fornece r e s em termos de x e y bastava colocar as matrizes de T_2 e T_1 lado a lado e "multiplicá-las" da maneira como fazemos até hoje:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{pmatrix}$$

Em linguagem de transformações, a matriz da direita é a matriz da transformação composta $T_2 \circ T_1$. Lembrando que a composição de duas funções não é comutativa, isto é, em geral $f \circ g \neq g \circ f$, vemos como é natural que o produto matricial não comute.

As operações de adição matricial e multiplicação por escalar vieram depois! A segunda metade do século XIX foi um período muito rico para o desenvolvimento da Álgebra, e a idéia de se estudarem estruturas algébricas abstratas ganhava força nessa época. O próprio Cayley (além de B. Peierce e C. S. Peierce), considerando estas operações e o produto matricial, criou o que hoje chamamos de "Álgebra das Matrizes", que fornece um dos primeiros exemplos de estrutura algébrica com uma operação não comutativa.

A partir daí a Teoria de Matrizes não parou de ganhar importância dentro e fora da Matemática; vejamos duas aplicações simples do produto matricial:

Exemplo 1

Um sistema $m \times n$ de equações lineares

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

pode ser escrito, de maneira concisa, como

$$A \cdot X = B$$

onde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Se $m = n$ o sistema será *determinado* se, e somente se, A for inversível ($\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$) e sua solução pode ser obtida como:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Exemplo 2

Imaginemos a seguinte situação: uma empresa compra "matéria-prima" (peças, componentes, etc.) e os utiliza para fabricar "produtos". Vamos indicar numa matriz P (Produção) a quantidade de matéria-prima utilizada na produção de cada produto.

$$(P): \quad \begin{array}{c|cccccc} P \diagdown M & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & \dots & M_m \\ \hline P_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1m} \\ P_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2m} \\ P_3 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{3m} \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ P_n & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{nm} \end{array}$$

Nesta matriz a_{ij} é a quantidade de matéria-prima M_j utilizada na produção do produto P_i.

Vamos representar numa matriz de "custos" C o preço de cada matéria em condições diferentes de compra (preço à vista, a prazo, para pequenas ou grandes compras, etc.):

$$(C): \quad \begin{array}{c|ccccc} M \diagdown C & C_1 & C_2 & C_3 & \dots & C_p \\ \hline M_1 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ M_2 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ M_3 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3p} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ M_m & \dots & \dots & \dots & \dots & b_{mp} \end{array}$$

Nesta matriz o elemento b_{ij} é o preço da matéria-prima M_i comprada nas condições C_j.

O produto $P \cdot C$ é uma matriz $(n \times p)$ formada por elementos c_{ij} que representam o custo de se produzir o produto P_i, comprando a matéria-prima nas condições C_j, já que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + \dots + a_{im} b_{mj}. \blacksquare$$

Para finalizar, duas observações: em primeiro lugar, gostaria de destacar a importância de se entender o contexto em que as idéias e teorias matemáticas são desenvolvidas. O produto matricial, que à primeira vista é um tanto artificial, fica natural quando percebemos qual é seu significado geométrico e qual foi a motivação de quem o criou. Acredito que sempre que estudamos ou ensinamos um determinado tópico, deveríamos ter esta preocupação em mente.

Em segundo lugar, a *Teoria das Matrizes* é um ótimo exemplo de como uma teoria científica vai adquirindo importância e tendo aplicações que transcendem o objetivo inicial com que foi criada. É muito difícil julgar o valor de uma idéia no momento em que ela nasce. O tempo é o grande juiz, que decide quais descobertas científicas são, de fato, relevantes.

Referências Bibliográficas

As referências históricas são tiradas de

[1] Boyer, Carl B. *História da Matemática.* Editora Edgard Blücher, são Paulo, 1974.

[2] Milies, Cesar Polcino. *Breve Introdução à História da Álgebra* . XI Escola de Álgebra. São Paulo, 1990.

Aplicações como a do exemplo 2) acima e aplicações à teoria de probabilidade podem ser encontradas no capítulo 1 do livro abaixo, redigidas de maneira bastante acessível.

[3] Boldrini, J. L., Costa, S. R., Ribeiro, V. L. F. F., Wetzler, H. G. *Álgebra Linear.* Harbra, São Paulo, 1978.

CONFIRMAÇÃO DE INTERESSE E AMIGOS 92

A **RPM** recebeu, desde o lançamento da **RPM 20**, cerca de 10.000 confirmações de interesse de seus leitores. A estes foi enviada a **RPM 21**. Os demais leitores receberam uma carta pedindo que confirmassem o interesse, para não terem seu nome retirado do cadastro. Dado o volume de respostas recebidas, é bem possível que um ou outro engano tenha sido cometido. Assim que um leitor, prejudicado por algum engano, nos escrever, receberá a **RPM 21** e, de antemão, nosso pedido de desculpas.

O que dissemos acima vale também para os **Amigos da RPM** que em 1992 mandaram a sua contribuição para o grupo. A eles será remetido, em setembro, o *Caderno 3 da RPM*, contendo cerca de 50 problemas, com resoluções, todos enviados por leitores. Se algum **AMIGO-92** não receber o Caderno 3, por favor, escreva-nos, mencionando, se possível, o número do cheque, banco, data e se o cheque foi descontado.