

ALGUNS ASPECTOS SOBRE FILTRAGENS EM FILAS $M/M^{ij}/1/N$ COM "FEEDBACK"

Maria Cristina Catarino Werkema
 ICEx- Depto. de Estatística
 Universidade Fed. de Minas Gerais
 Caixa Postal 702
 30161, Belo Horizonte, MG, Brasil

Nelson Ithiro Tanaka
 IME -
 Universidade de São Paulo
 Caixa Postal 20570
 01498, São Paulo, SP.

1 - Introdução

Na fila que consideramos neste estudo as chegadas são governadas por um Processo de Poisson com taxa λ , há um único servidor, e os tempos de serviço têm distribuição exponencial com parâmetro μ_{ij} que depende do tipo do freguês anterior (i) e do tipo de freguês atual (j). É feita a suposição de que imediatamente antes de um cliente entrar em serviço, seu tipo é escolhido através de uma Cadeia de Markov, suposta irredutível, aperiódica e finita, com matriz de transição R . Isto é, se o freguês anterior é do tipo i , o próximo freguês será do tipo j com probabilidade $r(i,j) = r_{ij}$, $i, j \in E = \{1, 2, \dots, m\}$, $m < \infty$. Cada freguês, após ter sido atendido, é instantaneamente readmitido no sistema com probabilidade p ($0 \leq p < 1$) ou abandona o sistema com probabilidade $q = 1 - p$. Além disso, estamos considerando que o sistema tem a capacidade para N clientes e os fregueses que chegam quando o sistema está cheio são recusados. A disciplina é definida pelo serviço seguir a ordem de chegada. No desenvolvimento deste trabalho assumiremos que N é finito.

Na nossa modelagem da fila $M/M^{ij}/1/N$ com "feedback" definimos as seguintes variáveis:

- $X(t)$ = número de fregueses no sistema no instante t .
 - $Z(t)$ = tipo do último cliente cujo serviço foi completado antes ou exatamente no instante t .
 - $T_n^{(a)}$ = tempo de ocorrência da n -ésima chegada ao sistema.
 - $T_n^{(d)}$ = tempo de ocorrência da n -ésima partida do sistema.
 - $T_n^{(f)}$ = tempo de ocorrência do n -ésimo "feedback" no sistema.
 - $T_n^{(t)}$ = tempo de ocorrência da n -ésima entrada sistema.
- $$\{T_n^{(t)}\} = \{T_n^{(a)}\} \cup \{T_n^{(f)}\}.$$

$T_n^{(o)}$

- tempo de ocorrência da n-ésima saída do sistema:
 $\{T_n^{(o)}\} = \{T_n^{(d)}\} \cup \{T_n^{(f)}\}.$

 $T_n^{(e)}$

- tempo de ocorrência da n-ésima transição externa no sistema:
 $\{T_n^{(e)}\} = \{T_n^{(a)}\} \cup \{T_n^{(d)}\}.$

 T_n

- tempo de ocorrência da n-ésima transição no sistema:
 $\{T_n\} = \{T_n^{(a)}\} \cup \{T_n^{(d)}\} \cup \{T_n^{(f)}\}.$

 $X_n = X(T_n)$

- número de clientes no sistema imediatamente após a n-ésima transição.

 $X_n^{(\theta)} = X(T_n^{(\theta)})$

- número de clientes no sistema imediatamente após a n-ésima transição do tipo θ , $\theta = a, d, f, i, o, e.$

 $Z_n = Z(T_n)$

- tipo do último cliente cujo serviço foi completado antes de T_n ou exatamente em T_n .

 $Z_n^{(\theta)} = Z(T_n^{(\theta)})$

- tipo do último cliente cujo serviço foi completado antes de $T_n^{(\theta)}$ ou exatamente em $T_n^{(\theta)}$, $\theta = a, d, f, i, o, e.$

2 - Processos de Renovação Markovianos em Filas M/M^{ij}/1/N com "Feedback"

De acordo com a caracterização do sistema e das variáveis envolvidas apresentada na seção anterior, temos que $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$ é um Processo de Renovação Markoviano com núcleo $Q(t)$, cujo $((i, w), (j, z))$ -ésimo elemento é dado por:

$$Q((i, w), (j, z), t) =$$

$$P\{X_{n+1} = j, Z_{n+1} = z, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_0, X_1, \dots, X_n = i,$$

$$Z_0, Z_1, \dots, Z_n = w, T_0, T_1, \dots, T_n\}$$

$$P\{X_{n+1} = j, Z_{n+1} = z, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_n = i, Z_n = w\} \quad (2.1)$$

Como estamos considerando que cada chegada corresponde à admissão de um único freguês no sistema e que no máximo um freguês pode sair do sistema em qualquer instante de tempo, como uma partida ou "feedback", os únicos elementos do núcleo diferentes de zero são:

$$Q((i, w), (i+1, z), t), \quad 0 \leq i \leq N-1; w = z \in E;$$

$$Q((i, w), (i, z), t), \quad 1 \leq i \leq N; w, z \in E;$$

$$Q((i, w), (i-1, z), t), \quad 1 \leq i \leq N; w, z \in E.$$

Portanto, o núcleo do processo $\langle\langle X_n, Z_n, T_n \rangle\rangle$ é uma matriz $m(N+1) \times m(N+1)$ dada por:

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & G(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ D(t) & F(t) & G(t) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D(t) & F(t) & G(t) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & F(t) & G(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & D(t) & F(t) & G(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & K(t) & L(t) \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

onde 0 é a matriz nula $m \times m$ e $C(t)$, $D(t)$, $F(t)$, $G(t)$, $K(t)$ e $L(t)$ são matrizes $m \times m$ definidas por:

$$C(t) = (1 - e^{-\lambda t})I, \quad \text{sendo } I \text{ a matriz identidade}; \quad (2.3)$$

$$D(t) = [qr_{vz} v_{vz} H_{vz}(t)], \quad w, z \in E; \quad (2.4)$$

$$F(t) = [pr_{vz} v_{vz} H_{vz}(t)], \quad w, z \in E; \quad (2.5)$$

$$G(t) = \text{Diag} \left[\sum_{z \in E} r_{vz} u_{vz} H_{vz}(t) \right], \quad w \in E; \quad (2.6)$$

$$K(t) = [qr_{vz} J_{vz}(t)], \quad w, z \in E; \quad (2.7)$$

$$L(t) = [pr_{vz} J_{vz}(t)], \quad w, z \in E; \quad (2.8)$$

sendo v_{vz} , u_{vz} , $H_{vz}(t)$ e $J_{vz}(t)$ dados por:

$$v_{vz} = \frac{\mu_{vz}}{\lambda + \mu_{vz}}, \quad w, z \in E; \quad (2.9)$$

$$u_{vz} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu_{vz}}, \quad w, z \in E; \quad (2.10)$$

$$H_{vz}(t) = 1 - \exp[-(\lambda + \mu_{vz})t], \quad w, z \in E; \quad (2.11)$$

$$J_{vz}(t) = 1 - \exp(-\mu_{vz}t), \quad w, z \in E. \quad (2.12)$$

É importante ressaltar que como $N < \infty$, a Cadeia de Markov imersa $\langle\langle X_n, Z_n \rangle\rangle$ é irredutível, aperiódica e recorrente positiva, o que garante automaticamente que $\langle\langle X_n, Z_n, T_n \rangle\rangle$ é irredutível e recorrente positivo. Analisando as expressões para $Q((i,v),(j,z),t)$ concluímos que $\langle\langle X_n, Z_n, T_n \rangle\rangle$ também é aperiódico.

Vejam os seguintes processos de Renovação Markovianos Imersos. O núcleo do processo $\langle\langle X_n, Z_n, T_n \rangle\rangle$ é tal que $Q((i,w),(j,z),t) = 0$ para $j \neq i-1, i, i+1$. Portanto, $Q(t)$ pode ser dividido em três componentes

$Q_A(t)$, $Q_F(t)$ e $Q_D(t)$, que governam, respectivamente, as chegadas, os "feedbacks" e as partidas. Então,

$$Q(t) = Q_A(t) + Q_F(t) + Q_D(t), \quad (2.13)$$

onde

$$Q_A((i,v),(j,z),t) = \begin{cases} Q((i,v),(i+1,z),t), & \text{se } j=i+1, v,z \in E, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad (2.14)$$

$$Q_F((i,v),(j,z),t) = \begin{cases} Q((i,v),(i,z),t), & \text{se } j=i, v,z \in E, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad (2.15)$$

$$Q_D((i,v),(j,z),t) = \begin{cases} Q((i,v),(i-1,z),t), & \text{se } j=i-1, v,z \in E, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.16)$$

O teorema a seguir é extensão do Teorema 2 em Hunter [3]. São utilizadas as convenções usuais para a representação de convoluções.

Teorema 2.1 $\{(X_n^{(\theta)}, Z_n^{(\theta)}, T_n^{(\theta)})\}$ é um Processo de Renovação Markoviano com núcleo

$$Q^{(\theta)} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} Q_{\theta}^{(k)} \right] (Q - Q_{\theta}),$$

onde

$$\begin{aligned} Q_a &= Q_F + Q_D, & Q_d &= Q_A + Q_F, & Q_f &= Q_A + Q_D, \\ Q_o &= Q_A, & Q_i &= Q_D, & Q_{\bullet} &= Q_F. \end{aligned}$$

Prova: Similar à prova do Teorema 2 em Hunter [3].

As cadeias de Markov imersas são o nosso próximo passo. A matriz de transição da Cadeia de Markov associada ao Processo de Renovação Markoviano $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$ é dada por $P = [Q((i,w),(j,z),\omega)] = Q(\omega)$. Definido $P_A = Q_A(\omega)$, $P_F = Q_F(\omega)$ e $P_D = Q_D(\omega)$ a matriz P pode ser expressa como $P = P_A + P_D + P_F$. Esta decomposição possibilita a determinação de expressões para as matrizes de transição das Cadeias de Markov associadas aos Processos de Renovação Markovianos imersos apresentados anteriormente. Aos interessados referimos [6] p. 16-29.

3 - Processos Semi-Markovianos Imersos em Filas $M/M^{ij}/1/N$ com "Feedback"

Como $\sup T_n = \infty$ temos, de acordo com Çinlar [2], que fazendo

$$X(t) = X_n, \quad T_n \leq t < T_{n+1}$$

$$Z(t) = Z_n, \quad T_n \leq t < T_{n+1},$$

$\{(X(t), Z(t)), t \geq 0\}$ é o Processo Semi-Markoviano mínimo associado ao Processo de Renovação Markoviano $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$. De modo similar temos

com

$$X^{(\theta)}(t) = X_n^{(\theta)}, \quad T_n^{(\theta)} \leq t < T_{n+1}^{(\theta)}$$

e

$$Z^{(\theta)}(t) = Z_n^{(\theta)}, \quad T_n^{(\theta)} \leq t < T_{n+1}^{(\theta)}$$

que $\{(X^{(\theta)}(t), Z^{(\theta)}(t)), t \geq 0\}$ é o Processo Semi-Markoviano mínimo associado ao Processo de Renovação Markoviano $\{(X_n^{(\theta)}, Z_n^{(\theta)}, T_n^{(\theta)})\}$, $\theta = a, d, f, i, o, e$.

Sabemos que o processo $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$ é irredutível e recorrente positivo e $Q((i,w),(j,z),t)$ não são funções escada. Portanto, podemos concluir, a partir de [2], que $\{(X(t), Z(t))\}$ tem uma distribuição estacionária $\{p_{i,v}\}$, $(i,v) \in \mathcal{L} \times E$ onde $\mathcal{L} = \{0, 1, \dots, N\}$, que também é a distribuição limite. Também é possível concluir que $\{(X^{(\theta)}(t), Z^{(\theta)}(t))\}$ tem distribuição limite $\{p_{i,v}^{(\theta)}\}$, $(i,v) \in \mathcal{L}^{(\theta)} \times E$, onde $\mathcal{L}^{(\theta)} \times E$ é o sub-espaco irredutível para o Processo de Renovação Markoviano $\{(X_n^{(\theta)}, Z_n^{(\theta)}, T_n^{(\theta)})\}$ e sua respectiva Cadeia de Markov, $\theta = a, d, f, i, o, e$.

De acordo com Çinlar [2] podemos escrever:

$$p_{i,v} = \frac{\pi_{i,v} \eta_{i,v}}{\sum_{j \in \mathcal{L}} \sum_{z \in E} \pi_{j,z} \eta_{j,z}}, \quad i \in \mathcal{L}, w \in E; \quad (3.1)$$

onde $\{\pi_{i,v}\}$ é a distribuição estacionária da Cadeia de Markov imersa $\{(X_n, Z_n)\}$ e $\eta_{i,v}$ é o tempo médio de permanência no estado (i,w) .

Analogamente,

$$p_{i,v}^{(\theta)} = \frac{\pi_{i,v}^{(\theta)} \eta_{i,v}^{(\theta)}}{\sum_{j \in \mathcal{L}} \sum_{z \in E} \pi_{j,z}^{(\theta)} \eta_{j,z}^{(\theta)}}, \quad i \in \mathcal{L}^{(\theta)}, w \in E, \theta = a, d, f, i, o, e; \quad (3.2)$$

onde $\{\pi_{i,v}^{(\theta)}\}$ é a distribuição estacionária da Cadeia de Markov $\{(X_n^{(\theta)}, Z_n^{(\theta)})\}$ e $\eta_{i,v}^{(\theta)}$ é o tempo médio de permanência no estado (i,w) no Processo de Renovação Markoviano $\{(X_n^{(\theta)}, Z_n^{(\theta)}, T_n^{(\theta)})\}$.

A distribuição estacionária $\pi = \{\pi_{i,v}\}$, $i \in \mathcal{L}$, $w \in E$, pode ser calculada por meio de métodos numéricos a partir das equações (2.37) a (2.42) de Werkema [6], enquanto $\pi^{(\theta)} = \{\pi_{i,v}^{(\theta)}\}$, $i \in \mathcal{L}^{(\theta)}$, $w \in E$, $\theta = a, d, f, i, o, e$, pode ser obtida a partir de π através da aplicação dos resultados do Teorema 2.7 apresentado em [6]. Portanto, para que as equações (3.1) e (3.2) possam ser utilizadas é necessário que sejam estabelecidas expressões para $\eta_{i,v}$ e $\eta_{i,v}^{(\theta)}$.

Utilizando a igualdade

$$\eta_{iv} = \sum_{z \in E} \sum_{j \in \mathcal{L}} \int_0^t Q((i,w),(j,z), dt)$$

e as equações (2-4) a (2-8) obtemos as expressões para η_{iv} :

$$\eta_{ov} = \frac{1}{\lambda}, w \in E; \quad (3.3)$$

$$\eta_{iv} = \sum_{z \in E} \frac{r_{vz}}{\lambda + \mu_{vz}}, 1 \leq i \leq N-1; w \in E; \quad (3.4)$$

$$\eta_{Nv} = \sum_{z \in E} \frac{r_{vz}}{\mu_{vz}}, w \in E. \quad (3.5)$$

Estabeleceremos a seguir as expressões para $\eta_{iv}^{(\theta)}$.

Teorema 3.1 Se $N < \infty$, $\eta' = (\eta'_0, \eta'_1, \dots, \eta'_N)$, $\eta'_i = (\eta_{i1}, \eta_{i2}, \dots, \eta_{im})$ para $i = 0, 1, \dots, N$, $\eta^{(\theta)'} = (\eta_0^{(\theta)'}, \eta_1^{(\theta)'}, \dots, \eta_N^{(\theta)'})$ e $\eta_i^{(\theta)'} = (\eta_{i1}^{(\theta)'}, \eta_{i2}^{(\theta)'}, \dots, \eta_{im}^{(\theta)'})$ para $i = 0, 1, \dots, N$ então, para $\theta = a, d, f, i, o, e$,

$$(I - P_\theta) \eta^{(\theta)} = \eta, \quad (3.6)$$

onde

$$P_a = P_F + P_D, P_d = P_A + P_F, P_f = P_A + P_D, P_i = P_D, P_o = P_A, P_e = P_F.$$

Prova: A prova é simples e pode ser encontrada em Werkema [6].

Através da aplicação do Teorema 3.1 a cada um dos Processos Semi-Markovianos imersos são obtidos sistemas de equações lineares cujas soluções fornecem os valores de $\eta_i^{(\theta)}$, $\theta = a, d, f, o, i, e$.

O leitor deve observar que já possuímos agora todos os elementos necessários à utilização das equações (3.1) e (3.2) para o cálculo das distribuições estacionárias dos Processos Semi-Markovianos.

Bibliografia

- [1] Çinlar, E. (1969) Markov renewal theory. *Adv. Appl. Prob.* 1, 123-187.
- [2] Çinlar, E. (1975) *Introduction to stochastic processes*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [3] Hunter, J. J. (1983) Filtering of Markov renewal queues, I: Feedback queues. *Adv. Appl. Prob.* 15, 349-375.
- [4] Hunter, J. J. (1983) Filtering of Markov renewal queues, II: Birth-death queues. *Adv. Appl. Prob.* 15, 376-391.
- [5] Hunter, J. J. (1984) Filtering of Markov renewal queues, III: Semi-Markov processes embedded in feedback queues. *Adv. Appl. Prob.* 16, 422-436.
- [6] Werkema, M. C. G. (1991) Filtragens em filas $M/M^{ij}/1/N$ com "feedback". Tese de Mestrado, IME-USP, São Paulo.