UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

NOTAS SOBRE O MAPLE V

WAGNER VIEIRA LEITE NUNES

Nº 36

NOTAS DIDÁTICAS

ICMC USP
SÃO CARLOS

São Carlos - SP

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

ISSN 0103-2585

NOTAS SOBRE O MAPLE V

WAGNER VIEIRA LEITE NUNES

Nº 36

NOTAS DIDÁTICAS

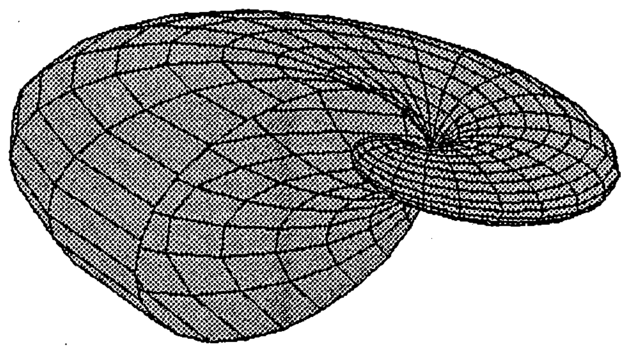
ICMC USP SÃO CARLOS

São Carlos – SP

Mai./1999

Notas Sobre o MAPLE V

Prof. Wagner Vieira Leite Nunes



ICMSC/USP - São Carlos - 1999

Estas notas foram escritas pelo professor Wagner Vieira Leite Nunes com a colaboração de vários professores e alunos do ICMSC-USP . O objetivo é introduzir o software **MAPLE V** aos alunos de graduação. Ele pode ser de grande utilidade na motivação, compreensão e experimentação de diversos tópicos da Matemática. Informações adicionais podem ser encontradas em *First Leaves: A Tutorial Introduction to Maple V, de B. W. Char e outros, Springer-Verlag.*

outubro de 1996

1. Introdução

MAPLE V é um programa que apresenta um conjunto de funções e pacotes voltados à programação que envolve a Matemática e suas aplicações.

Podemos utilizar o **MAPLE V** para:

1. Fazer operações usuais com números ou símbolos.
2. Expandir e/ou fatorar expressões.
3. Encontrar zeros de funções.
4. Calcular limites.
5. Derivar funções de uma ou várias variáveis.
6. Encontrar primitivas ou integrais indefinidas de funções.
7. Calcular integrais definidas.
8. Encontrar soma séries numéricas.
9. Encontrar séries de Taylor ou Fourier de funções.
10. Fazer operações com matrizes.
11. Encontrar autovalores e autovetores de matrizes.
12. Calcular integrais duplas ou triplas.
13. Resolver equações diferenciais ordinárias.
14. Plotar gráficos de funções em duas ou três dimensões.
15. Plotar gráficos de funções dadas por suas equações paramétricas ou implícitas.
16. outros.

Além dessas tarefas o **MAPLE V** pode ser utilizado em muitas outras situações e /ou contextos como por exemplo:

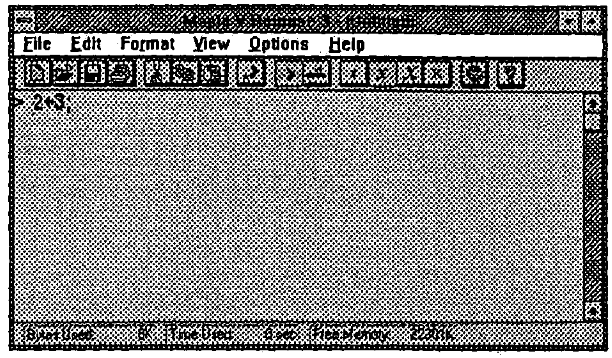
1. Criar programas específicos para nossos próprios fins.
2. Desenvolver programas que combinam texto, animações e sons.

Para iniciar o **MAPLE V** entre no Windows, clique duas vezes no **GRUPO MAPLE V** e a seguir clique duas vezes no ícone **MAPLE V**. Para sair do **MAPLE V** clique no **file** e em seguida clique no **exit**.

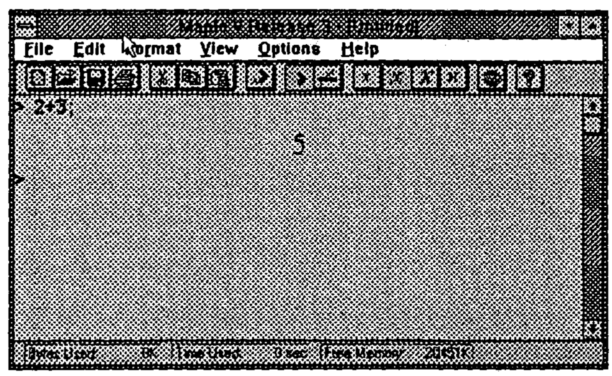
Para, por exemplo, executar a operação $2+3$ digitamos

$$2+3\ ;$$

e teremos a janela ao lado:



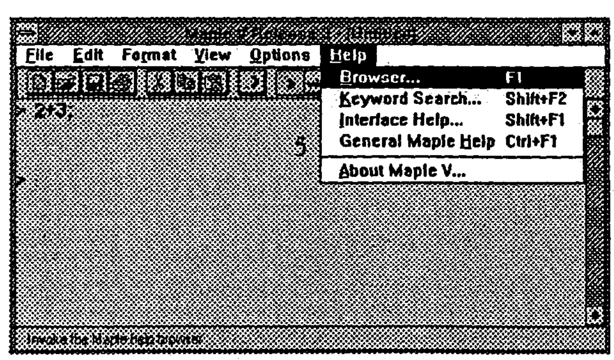
Em seguida teclamos < *Enter* > e surgirá o resultado da operação, como vemos na janela ao lado:



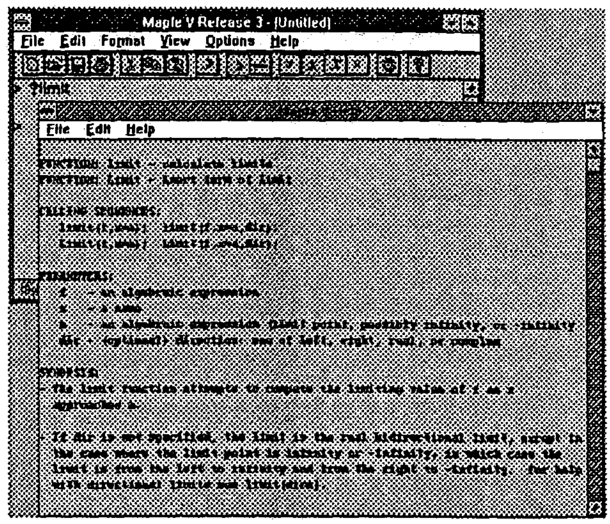
Observação.
Não esqueça do ponto e vírgula (;) no final da sentença. Sem ele a operação e/ou rotina NÃO *será executada.*

2. Help

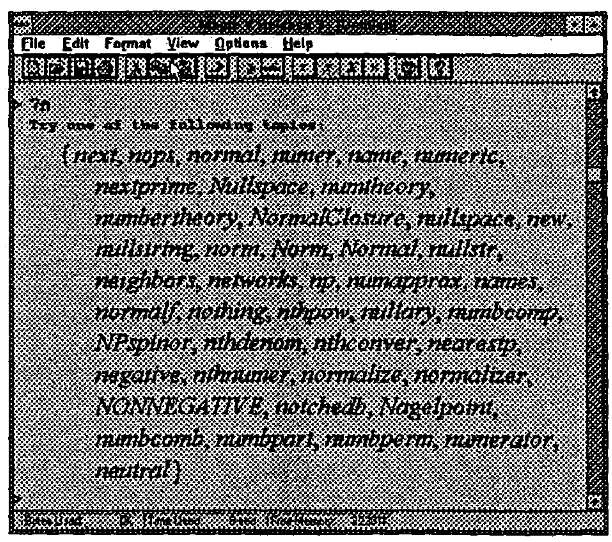
Existem dois modos de se obter ajuda. Um deles é clicar no **HELP** e em seguida escolher entre as opções **Browser**, **Keyword Search**, **Interface Help**, **General Maple Help**, como podemos ver na janela ao lado:



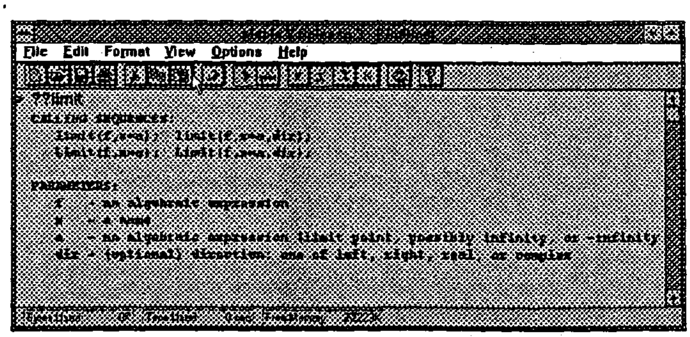
O outro modo é digitar **?nome** e em seguida tecle < *Enter* >, onde **nome** é o nome do comando que voce quer saber todas as informações, inclusive com exemplos. Por exemplo, se digitarmos **?limit** e teclarmos < *Enter* > aparecerá a janela:



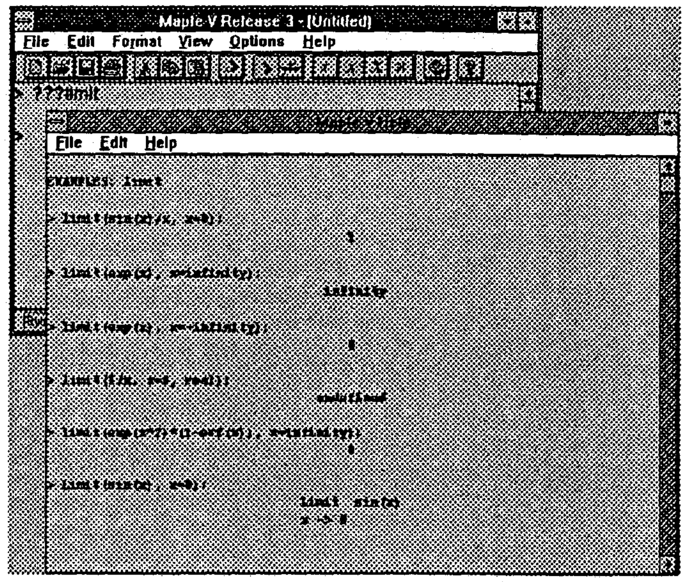
Se digitarmos **?n** e teclarmos < *Enter* > aparecerá uma relação de todos os comandos ou funções que começam com a letra **n**, isto é a janela ao lado:



Para obter informações sobre os parâmetros do comando digite **??nome** e tecle < *Enter* >. No exemplo acima se digitarmos **??limit** e teclarmos < *Enter* > e obteremos a janela ao lado:



Para obter exemplos que usam o comando digite **???nome** e tecle < *Enter* >. Se digitarmos **???limit** e teclarmos < *Enter* > obteremos a janela ao lado:



?nome	nos dá todas as informações sobre o comando **nome**, com exemplos.
??nome	nos dá informações sobre o comando **nome**.
???nome	nos dá exemplos que usam o comando **nome**.

3. Tabela dos Símbolos

$+$	adição.
$-$	subtração.
$*$	multiplicação.
$/$	divisão.
$\wedge$	exponenciação.

4. Operações Aritméticas

4.1. Cálculos Aritméticos.

Com o **Maple V** podemos fazer operações usuais com números como numa calculadora qualquer, como mostram os exemplos a seguir:

Exemplos.

Operação	*Digitação e Resposta*	
1. Soma e/ou subtração números	$> 2.5 + 3.458 - 4.21;$ 1.748	*< Enter >*
2. Divisão e Potenciação	$> 2.4/8.9^2;$ $.03029920465$	*< Enter >*
3. Multiplicação	$> 2.23 * 3.45 * 4.54;$ 34.928490	*< Enter >*
4. Expressões com parênteses	$> (3.1 + 2.4)^3 + 2 * (45.3 - 34.87)^2;$ 383.9448	*< Enter >*

Observação.
Para evitar erros na digitação de fórmulas e/ou comandos, sugere-se que tudo que for aberto deva ser fechado e depois usa-se o retrocesso, <← Backspace >, para escrevermos o que deve ficar entre o que foi aberto e o que foi fechado. Por exemplo:

Queremos digitar	*Digita-se*				
$(a + b)$	$(\ )$	*<← Backspace >*	$a + b$		
$[a + (b + c)]$	$[\ ]$	*<← Backspace >*	$(\ )$	*<← Backspace >*	$b + c$

Exercícios. *Calcular:*

$a)\, 6.3 + 4.2\, 3.4$ $\quad b)\, 3.45^{34.5+3}$ $\quad c)\, (2 + 5.34/23.5)^{2.5/23.4}$ $\quad d)\, (3.45 + 4.22 - 5.2)/(5.1 * 8.56)$

4.2. Resultado Exato ou Aproximado.

Uma calculadora faz os seus cálculos com uma certa aproximação, digamos de 10 casas decimais. Com o **Maple V** podemos obter, frequentemente, resultados *exatos*, como mostram os exemplos abaixo:

Exemplos.

1. Resultado exato de 2^{100}	> 2^100; 1267650600228229401496703205376	*< Enter >*
2. Valor aproximado	> 2.0^100; $.126750600\ 10^{31}$	*< Enter >*
3. Resultado em termos de frações	$> 1/3 + 2/7;$ $\frac{13}{21}$	*< Enter >*
4. Valor numérico aproximado	$> 1.0/3 + 2/7;$ $.6190476190$	*< Enter >*
5. Valor aproximado com 3 digitos	$> evalf(1/3 + 2/7, 3);$ $.619$	*< Enter >*
6. Valor aproximado com 7 digitos	$> evalf(1/3 + 2/7, 7);$ $.6190476$	*< Enter >*

4.3. Cálculo com Precisão Desejada.

Digits:= n	nos dá um valor aproximado com n dígitos.
evalf(*expr*, n**)**	nos dá o valor da expressão *expr* com n dígitos.

Exemplos.

1. Valor de π *com 25 dígitos*	$> evalf(Pi, 25);$ 3.141592653589793238462643	$< Enter >$
2. π^2 *com 5 dígitos*	$> evalf(Pi\^{}2, 5);$ 9.8697	$< Enter >$
3. $\sin(\frac{\pi}{8})$ *com 7 dígitos* *(argumento dado em* **radianos***)*	$> evalf(sin(Pi/8), 7);$ .3826833	$< Enter >$
4. Valor aproximado de $\log_2(256)$	$> evalf(log[2](2697));$ 11.39713981	$< Enter >$

Exercícios.
Calcular a valor aproximado das expressões abaixo com 20 dígitos:

$a) \sqrt{2}$ $\qquad$ $b) e$ $\qquad$ $c) 3/8 + 6/5 + 7/9$ $\qquad$ $d) \pi + e^2$

Observação.

1. *O número de dígitos também pode ser fixado usando-se o comando Digits. Suponhamos que queiramos fixar 3 (três) dígitos. Neste caso agimos como no exemplo abaixo:*

$> Digits := 3;$ $\quad$ *e* $< Enter >$
$Digits := 3$
$> 1.0/3 + 2/7;$ $\quad$ *e* $< Enter >$
.619

2. *O ponto decimal faz com que o* **Maple V** *dê o resultado numérico aproximado da expressão que estamos computando. Por exemplo:*

$> 452/62;$ $\quad$ *e* $< Enter >$
$\frac{226}{31}$
$> 452./62$ $\quad$ *e* $< Enter >$
7.290322582
$> 1. + 452/62;$ $\quad$ *e* $< Enter >$
8.290322582

Exercícios. *Calcular o valor aproximado de cada um dos números abaixo, com duas, cinco e doze casas decimais:*

$a) \frac{5\,1}{6\,9}$ $\qquad$ $b) \sqrt{2}$ $\qquad$ $c) \frac{1}{3}^{\frac{2}{7}}$ $\qquad$ $d) \frac{5}{6} + \frac{1}{9}$

4.4. Números Complexos.

Podemos operar com números complexos no **Maple V** usando a unidade imaginária **I** que é igual a $\sqrt{-1}$.

Exemplos.

1. Para calcular $\sqrt{-4}$ *digitamos* *e obtemos*	$> sqrt(-4);$ $2I$	$< Enter >$
2. Para $\frac{4+3I}{2-I}$ *digitamos* *e obtemos*	$> (4 + 3 * I)/(2 - I);$ $1 + 2I$	$< Enter >$
3. Para $(34 + 5I)(-5.4 + 3I)$ *digitamos* *e obtemos*	$> (34 + 5 * I) * (-5.4 + 3 * I)$ $-198.6 + 75.0I$	$< Enter >$

4. Um valor aproximado de e^{2+9I} *digita-se* $> exp(2.0 + 9 * I);$ $<$ *Enter* $>$
e obteremos $-6.732392619 + 3.045166607I$

Observação.
A seguir temos algumas funções complexas:

*x+ y * I*	*número complexo* $x + i\,y$.
Re(z)	*parte real do número complexo z* $(Re(z))$.
Im(z)	*parte imaginária do número complexo z* $(Im(z))$.
abs(z)	*módulo do número complexo z* $(\vert z\vert)$.
argument(z)	*argumento* θ *do número complexo z* $(\theta = arg(z))$.
conjugate(z)	*conjugado do número complexo z* $(\bar{z})$.
evalc(polar(r, θ))	*passa um número complexo da forma polar para a forma usual* $(z = re^{i\theta})$.
convert(z, polar)	*converte um número complexo na forma usual para a polar* (r, θ) *(onde* $r = \vert z\vert$ *e* $\theta = arg(z)$*).*

5. Funções e Constantes Importantes

5.1. Funções.

exp(x)	exponencial (e^x).
ln(x) ou log(x)	logarítmo natural ($\ln(x)$).
log10(x)	logarítmo na base 10 ($\log_{10}(x)$).
log[b](x)	logarítmo na base b ($\log_b(x)$).
sqrt(x)	raiz quadrada de x ($\sqrt{x}$).
abs(x)	valor absoluto de x ($\vert x\vert$).
evalf(*expr*, *n*)	dá o valor da expressão *expr* com *n* dígitos de precisão.
max(x_1, x_2, $\cdots$, x_n)	máximo de $x_1, x_2, \cdots, x_n$.
min(x_1, x_2, $\cdots$, x_n)	mínimo de $x_1, x_2, \cdots, x_n$.
round(x)	inteiro mais próximo de x.
frac(x)	parte fracionária de x.
sin(x), cos(x), tan(x)	seno, cosseno, tangente de x (x em radianos) .
sec(x), csc(x), cot(x)	secante, cossecante e cotangente de x (x em radianos).
arcsin(x), arccos(x), arctan(x)	arcos seno, cosseno e tangente de x.
arcsec(x), arccsc(x), arccot(x)	arcos secante, cossecante e cotangente de x.
sinh(x), cosh(x), tanh(x)	seno, cosseno e tangente hiperbólicas de x.
sech(x), csch(x), coth(x)	secante, cossecante e cotangente hiperbólicas de x.
arcsinh(x), arccosh(x), arctanh(x)	arcos seno, cosseno e tangente hiperbólicas de x.
arcsech(x), arccsch(x), arccoth(x)	arcos secante, cossecante, cotangente hiperbólicas de x.
n!	n fatorial ($n!$).
binomial(n,m)	coeficiente binomial ($\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$).

Observação.
As funções no **Maple V** *começam com* **letra minúscula.** *Os argumentos de todas estas funções ficam entre* **parênteses.**

5.2. Constantes Importantes.

Pi	π.
E	número de Euler.
I	unidade imaginária $\sqrt{-1}$.
infinity	∞

Exemplos.

1. $2\lvert\sin(-\frac{\pi}{2})\rvert$ *é simplificada automaticamente*	$> 2 * abs(sin(-Pi/2));$	< *Enter* >
	2	
2. $\sqrt{4}$	$> sqrt(4);$	< *Enter* >
	2	
3. 20!	> 20!;	< *Enter* >
	2432902008176640000	

6. Ferramentas do Cálculo

6.1. Utilizando Resultados Anteriores.

Durante os cálculos que estamos fazendo, frequentemente precisamos fazer uso de resultados obtidos anteriormente. No **Maple V** o comando " utiliza o último resultado obtido.

"	o último resultado obtido.
	penúltimo resultado obtido.
"	ante-penúltimo resultado obtido.

Exemplos.

1. Este é o último resultado	$> 77^2;$	< *Enter* >
	5029	
2. Somando 1 ao último resultado	> " + 1;	< *Enter* >
	5030	
3. Utilizando os dois últimos resultados	> 3 * " + "^2+;	< *Enter* >
	35188619	
4. Somando os dois últimos resultados	> "+;	< *Enter* >
	35194549	

6.2. Definindo Variáveis.

Em muitas situações é conveniente definirmos variáveis que podem tornar nossos cálculos mais simples. Por exemplo em cálculos muito extensos podemos dar *nomes* a resultados intermediários. Isto pode ser feito introduzindo *variáveis*, como nos seguintes exemplos:

Exemplos.

1. Para fazer a variável x receber o valor 5 digitamos	$> x := 5;$	$<$ *Enter* $>$
e obtemos	$x := 5$	
2. Logo a operação	$> x^2;$	
nos dá	25	
3. Atribuindo um novo valor para x	$> x := 7 + 4;$	
obtendo-se	$x := 11$	
4. Atribuindo a pi o valor de π com 10 dígitos.	$> pi := evalf(Pi, 10);$	$<$ *Enter* $>$
	$\pi := 3.141592654$	
5. Valor de π^2 com o mesmo número de dígitos.	$> pi\hat{}2;$	$<$ *Enter* $>$
nos dá	9.869604404	
6. A 2.ª lei de Newton	$> F := m * a;$	$<$ *Enter* $>$
	$F := m\ a$	
7. Atribua 3000 a massa	$> m := 3000;$	$<$ *Enter* $>$
obtendo	$m := 3000$	
8. Atribua 9.8 à aceleração	$> a := 9.8;$	$<$ *Enter* $>$
que nos dá	$a := 9.8$	
9. Calculando o valor da força	$> F;$	$<$ *Enter* $>$
obtemos	29400.0	

var:= *valor*	atribui *valor* a *var*.
unassign(' *var* ')	remove o valor atribuído a *var*.

Observação.
As letras **E** *e* **I** *não podem ser usadas para definir novas variáveis pois elas já representam números pré-definidos.*

6.3. Definindo Funções.

Podemos definir funções com o **MapleV**, utilizando os comandos:

nome da função := *var*$-$ > *expr*	define uma função da variável *var* segundo a expressão *expr*.
nome da função := $(var_1, \cdots, var_n)-$ > *exp*	define uma função de n variáveis $var_1, \cdots, var_n$ segundo a expressão *expr*.

Exemplos.

1. Para definir $f(x) = x^2$ usamos	$> f := x- > x\hat{}2;$ $<$ *Enter* $>$
obtendo-se	$f := x \rightarrow x^2$
2. Para $g(x, y, z) = x^2 + y\,\mathrm{sen}(x) cos(z)$	
	$> g := (x, y, z)- > x\hat{}2 + y * \sin(x) * \cos(z);$ $<$ *Enter* $>$
obtendo-se	$g := (x, y, z) \rightarrow x^2 + y \sin(x) \cos(z)$
3. Se quizermos saber o valor de $f(1)$	$> f(1);$ $<$ *Enter* $>$
obtendo-se	1
4. Para $g(\pi/2, 2, -\pi/4)$	$> g(Pi/2, 2, -Pi/4);$ $<$ *Enter* $>$
obtendo-se	$\frac{1}{4}\pi^2 + \sqrt{2}$

5. Podemos fazer a composta $f(\text{sen}(x))$	$> f(\sin(x));\ < Enter >$
obtendo-se	$\sin(x)^2$
6. ou $g(\sqrt{x}, \tan(x), 1/(1+x^2))$	$> g(sqrt(x), \tan(x), 1/(1+x\text{^}2));\ < Enter >$
obtendo-se	$x + \tan(x)\sin(\sqrt{x})\cos(\frac{1}{1+x^2})$
7. Podemos definir $F = M \times a$	$> F := (M,a) - > M * a;\ < Enter >$
obtendo-se	$F := (M,a) \rightarrow M * a$
8. A forca correspondente a uma massa de $10Kg$ *e aceleração de* $20m/s^2$ *é obtida fazendo-se*	$> F(10,20);\ < Enter >$
e obtemos	200
9. Como trabalho, T*, é igual a* $F \times d$ *temos*	$> T := (F,d) - > F * d;\ < Enter >$
e obtemos	$T := (F,d) \rightarrow F\ d$
10. Para o trabalho realizado pela força de um corpo de massa $10kg$ *e aceleração* $20m/s^2$ *para se deslocar* $30m$ *tem-se*	$> T(F(10,20),30);\ < Enter >$
obtendo-se	6000

Exercícios.

1. Definir as seguintes funções :

a) $f(x) = x\cos(x)/\arctan(x)$ *b)* $g(x,y) = 1/(x^2+y^2)\cos(xy)$ *c)* $h(x,y,z,t) = x^2yzt + xy^2zt$

2. Encontrar o valor das funções acima nos seguintes valores, respectivamente:

a) $f(1)$, $f(\pi)$ *b)* $g(0,0)$, $g(1,0)$ *c)* $h(1,1,1,1)$, $h(\sqrt{2},2,-1,4)$

3. Encontrar as seguintes compostas:

a) $f(\text{sen}(x)\cos(x^2))$, $f(f(x))$ *b)* $g(\tan(xy), x\cos(y))$, $g(f(x), f(x)^2)$

c) $h(x, x^2, xyz, x/t^2)$, $h(f(x), g(x,y), h(x,y,z,t,), xy)$

7. Operando com Expressões Algébricas

Podemos escrever expressões algébricas de diferentes modos. Por exemplo, a expressão $(1+x)^2$ pode ser escrita como $1+2x+x^2$. O **Maple V** fornece uma coleção de comandos para conversão entre diferentes formas de se escrever uma mesma expressão algébrica usando-se os seguintes comandos:

expand(*expr*)	expande *expr*. No caso de *expr* ser uma expressão envolvendo somente polinômios obtemos uma expansão em soma de monômios. Porém podemos usá-la para expandir expressões envolvendo, por exemplo funções trigonométricas.
factor(*expr*)	escreve *expr* em um produto de fatores irredutíveis. *expr* é uma expressão envolvendo polinômios.
convert(*expr*, parfrac, *var*)	faz a decomposição de uma uma função racional em frações parciais.

Exemplos.

1. Expandir $(1+x)^2$	$>$ *expand*$((1+x)$^$2)$; < *Enter* >
	$1+2x+x^2$
2. Fator $1+2x+x^2$	$>$ *factor*$(1+2*x+x$^$2)$; < *Enter* >
	$(x+1)^2$
3. Expandir $(1+x+3y)^4$	$>$ *expand*$((1+x+3*y)$^$4)$; < *Enter* >
	$1+12y+4x+36xy+54y^2+36x^2y+108xy^2$
	$+12x^3y+54x^2y^2+108xy^3+6x^2+4x^3+108y^3+x^4+81y^4$
4. Fatorar $x^{10}-1$	$>$ *factor*$(x$^$10-1)$; < *Enter* >
	$(x-1)(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$
5. Decompor em frações parciais $\frac{(x-1)^2(x+2)-1}{(x+1)(x-3)^2}$	$>$ *convert*$((x-1)$^$2*(x+2)-1)/((x+1)*(x-3)$^$2))$; < *Enter* >
	$1+\frac{1}{4}\frac{1}{1+x}+5\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{19}{4}\frac{1}{x-3}$

Exercícios.

1. Fatore as seguintes expressões:

a) x^2+x-2 *b)* x^3+4x^2+x-6 *c)* $x^4-8x^3+18x^2-16x+5$ *d)* $x^4-2x^2y^2+y^4$

2. Expandir as seguintes expressões:

a) $(x-1)(x+2)$ *b)* $(x+1)(x-2)(x+3)$ *c)* $(x-1)^3(x-5)$ *d)* $(x-2y)(x^2-3y)(x-y^3)$

3. Encontrar a decomposição em frações parciais de cada uma das funções racionais:

a) $\dfrac{(x^2+1)^3*(x+2)}{((x^2-1)*(x-3)^2)}$ *b)* $\dfrac{x^5-x^4+x^3+2*x^2-x-2}{x^4-2*x^3+2*x^2-2*x+1}$

c) $\dfrac{2*x^4-3*x^3-2*x^2-x-12}{x^7-5*x^6-x^5+25*x^4-20*x^3+72*x^2-432}$ *d)* $\dfrac{1+2x+x^2}{(1-2x-x^2)(1-x)(1+x)^3}$

8. Resolvendo Equações

Frequentemente nos deparamos com o problema de resolver equações envolvendo uma ou várias variáveis. Para isto usaremos o comando **solve**:

solve(*equ*, *var*)	resolve a equação *equ* na variável *var* .
solve($\{equ_1,\cdots,equ_n\}$, $\{var_1,\cdots,var_m\}$)	resolve as equações $equ_1,\cdots,equ_n$ nas variáveis $var_1,\cdots,var_m$.
roots(*pol*, *K*)	encontra as raízes do polinômio *pol* sobre o corpo *K*.

A seguir daremos alguns exemplos que envolvem este comando:

Exemplos.

1. Encontrar as raízes de $x^2+2x-7=0$	$> solve(x\verb|^|2+2*x-7=0);$ $< Enter >$ $-1+2\sqrt{2}\,,\ -1-2\sqrt{2}$
2. Obter um valor aproximado das raízes	$> evalf(");$ $< Enter >$ $1.828427124\,,\ -3.828427124$
3. Resolver equação que depende de parâmetros	$> solve(\ln(x\verb|^|2-1)=a,x);$ $< Enter >$ $-\sqrt{e^a+1}\,,\ \sqrt{e^a+1}$
4. Outro exemplo é	$> solve(q\verb|^|3=k\verb|^|2,q);$ $< Enter >$ $(k^2)^{1/3},\ -\frac{1}{2}(k^2)^{1/3}+\frac{1}{2}I\sqrt{3}(k^2)^{1/3}$ $-\frac{1}{2}(k^2)^{1/3}-\frac{1}{2}I\sqrt{3}(k^2)^{1/3}$
5. ou	$> solve(q\verb|^|3=k\verb|^|2,k);$ $< Enter >$ $-q^{3/2}\,,\ q^{3/2}$
6. Resolver sistemas lineares	$> solve(\{x+2*y=2,x-3.5*y=1/2\});$ $< Enter >$ $\{x=1.454545455\,,\ y=.2727272728\}$
7. Ou não lineares	$solve(\{x\verb|^|2+3*y\verb|^|3=2,x\verb|^|5-3.5*y=1\});$ $< Enter >$ $\{x=1.236349755\,,\ y=.5396367321\}$

Observação.

1. Observe que nos exemplos 4 e 5 acima podemos resolver as equações em q ou em k dependendo da nossa necessidade.

2. O **MapleV** *resolve equações polinomiais em uma variável quando o grau, em geral, é menor que cinco. As equações para os quais o* **MapleV** *não consegue obter as raízes explícitas ele usa a função* **RootOf**, *como mostra o exemplo a seguir:*

Raízes de $p(x)=2-4x+x^5$	$< solve(2-4*x+x^5,x);$ $< Enter >$ $RootOf(2-4\_Z+\_Z^5)$
Usamos fsolve para obter uma aproximação dos valores das raízes reais	$< fsolve(2-4*x+x^5,x);$ $< Enter >$ $-1.518512153, .5084994847, 1.243596391$
Para encontrar aproximações para todas as raízes, inclusive as complexas.	$< fsolve(2-4*x+x^5,x,complex);$ $< Enter >$ $-1.518512153, -.1167918612-1.438447695I$ $-.1167918612+1.438447695I, .5084994847, 1.2435$

Para informações adicionais use ?solve.

Exercícios.

1) Encontre as soluções, ou aproximações destas, para as seguintes equações:

a) $x^3+3x^2+3x+1=0$ *b)* $x^3-3x^2+3x+1=0$ *c)* $x^5-3x^4+2x^3=1$

d) $e^{3x}=4cos(2x)$ *e)* $\mathrm{sen}(3x)=\log(4x)$ *f)* $2\tan(x)=\sec(3x)$

2) Encontre as soluções dos seguintes sistemas lineares:

$$a)\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-4y=-1 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 3x+2y-3z=-2 \\ 2x-3y+7z=-1 \\ -x+y-z=5 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x-2y+z-w=0 \\ -x+4y+z-2w=1 \\ 7x+3y-9z+w=3 \\ -2x-y-z+w=1 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} x+2y+3z=-2 \\ -2x-4y-6z=4 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$$

3) Encontrar valores aproximados das soluções, se existirem, dos seguintes sistemas não lineares:

$$a)\begin{cases} x^2+2yz+3z=-2 \\ -xy-4y-6zx=1 \\ -x+y-z=0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} \mathrm{sen}(x)+2yxz+3zy=2 \\ -2x-4\cos(y)-6xz=4 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$$

9. Vetores e Matrizes

Usando o **MapleV** podemos fazer todas as operações usuais com matrizes. Primeiramente veremos como definir uma matriz. Para isto consideraremos alguns exemplos.

Exemplos.

1. Um exemplo de matriz 3×3 *é* $> A := array([[1,2,3],[x,x,5],[1/2,4,-1]]);$ *< Enter >*

obtendo-se

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x & 5 \\ \frac{1}{2} & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Uma 2×3 *é* $> B := array([[2,-2,Pi],[0,-1,\sin(x)]]);$ *< Enter >*

obtendo-se

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -2 & \pi \\ 0 & -1 & \sin(x) \end{bmatrix}$$

Em geral temos:

$array([[a_{11},\cdots,a_{1n}],\cdots,[a_{m1},\cdots,a_{mn}]])$	define uma matriz $m\times n$ cujas entradas são a_{ij}, $i=1,\cdots,n$ e $j=1,\cdots m$.
$vetor := array(1..n) : v[1] := v_1 : \cdots v[n] := v_n$	define um vetor com n coordenadas v_i, $i=1,\cdots,n$, isto é, $(v_1,\cdots,v_n)$.

9.1. Operações com matrizes.

Podemos fazer as seguintes operações com matrizes (desde que as ordens destas permitam).

$+$ e $-$	adição e subtração de matrizes ou vetores.
&*	multiplicação de matrizes.
^(−1)	inverter matrizes.
$^\wedge n$	potenciação de matrizes.
$\& * ()$	matriz identidade.
det *	determinante de matrizes.
tr	traço de matrizes.
adj	adjunta de matrizes.
T	transposta de matrizes.
$linsolve(A, b)$	resolve o sistema linear não homogêneo $Ax = b$.
$gausslim(A)$	aplica o método de eliminação de Gauss.
$rref(A)$ ou $gaussjor(A)$	aplica o método de Gauss-Jordan.
$eigenvals(A)$	autovalores de A.
$eigenvects(A)$	autovetores de A.
$charpoly(A)$ *	polinônio característico de A.
$minpoly(A)$ *	polinônio minimal de A.
$exponential(A)$	exponenciação de A.
$jordan(A)$	forma de Jordan de A.
$kernel(A)$ ou $nullspace(A)$ ◇	encontra uma base para o núcleo do operador linear cuja matriz em relação a uma base é A.
$rowspace(A)$ (ou $colspace(A)$) ◇	encontra uma base para o espaço gerado pelos vetores formados pelas colunas (ou linhas) de A.
$GramSchmidt(A)$ ◇	computa um base ortogonal do espaço gerado pelos vetores formados pelas colunas de A.
$basis(S)$ ◇	encontra uma subcoleção do conjunto S que é uma base para o espaço gerado por S.
.	produto interno de vetores.
$\times$ ou $crossprod$	produto vetorial de vetores (só em R^3).

Observação.

1. As operações acima são executadas quando utilizamos o comando **evalm**, *como mostram os exemplos abaixo.*

2. Os comandos marcados com ◇ necessitam do pacote **linalg**. *Para carregá-lo basta digitar* **with(linalg) : ¡Enter¿**.

3. Outras informações podem ser obtidas digitando-se ?array ou ?linalg.

Exemplos.

1. Computando a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & 4 & -1 \end{bmatrix}$ $> Ainv := evalm(A^\wedge(-1));\ < Enter >$

obtemos $$Ainv := \begin{bmatrix} -\frac{11}{4} & \frac{7}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{9}{16} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

2. Para encontrar uma solução do sistema $Ax = b$

onde A é a matriz acima e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$> b := array([[1],[2],[-1]]) : < Enter >$

$> linsolve(A,b); < Enter >$

obtendo-se, assim

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{16} \\ \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

3. Para obtermos o produto vetorial de $v = [1\,,\,-1\,,\,2]$ por $u = [-5\,,\,4\,,\,-2]$ temos

$> v := array([1,-1,2]) : < Enter >$
$> u := array([-5,4,-2]) : < Enter >$
$> crossprod(v,u); < Enter >$

obtendo-se

$$[-6\ -8\ -1]$$

4. Para obter uma base para o espaço gerado pelas colunas de A fazemos

$> with(linalg) : < Enter >$

e depois

$> rowspace(A); < Enter >$

obtendo-se

$$\{[0\,1\,0], [0\,0\,1], [1\,0\,0]\}$$

Exercícios.

Fazer as operações abaixo com as seguintes matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 7 \\ 12 & -4 & 13 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} -11 & 12 & 32 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

a) $A + B$; AB; $det(A)$ *b)* BA; A^{-1}; Ab *c) encontre uma solução de $Ax = b$*

g) autovalores de A *h) autovetores de A* *i)* $\exp(A)$

10. Gráficos de Funções e Curvas Bidimensional

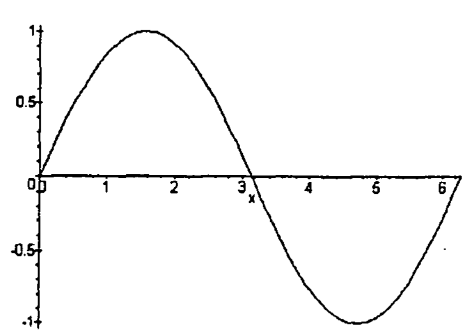
A seguir trataremos de problemas relacionados com gráficos de funções.

10.1. Comandos Básicos.

$plot(func, x = x_{min}..x_{max})$	plota o gráfico da função $func$, como função de x, no intervalo $[x_{min}, x_{max}]$.
$plot(\{func_1, \cdots, func_n\}, x = x_{min}..x_{max})$	plota o gráfico das funções $func_1, \cdots, func_n$ no intervalo $[x_{min}, x_{max}]$.

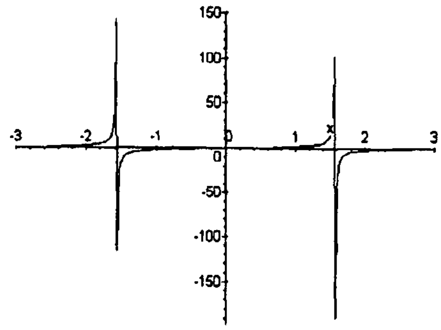
Exemplos.

1. Para plotar o gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$:
$> plot(\sin(x), x = 0..2 * Pi); < Enter >$
e obtemos a figura ao lado.



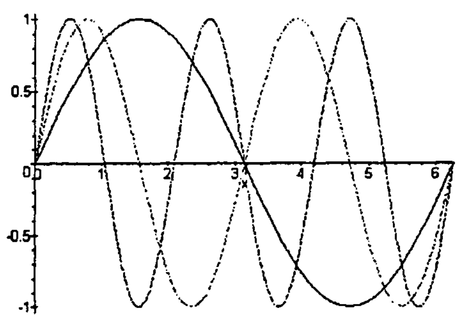
Podemos plotar gráficos de funções que tenham singularidades, isto é, que não estão definidas alguns pontos, como mostra o exemplo a seguir:

2. Plotar o gráfico de $f(x) = \tan(x)$ no intervalo $[-3, 3]$:
$> plot(\tan(x), x = -3..3);$ *< Enter >*
obtendo-se a gráfico ao lado.



Podemos também plotar o gráfico de várias funções simultaneamente, como mostra o exemplo a abaixo:

3. $f_2(x) =$
sen($2\pi]$.
> p
$x =$
FA



Exercícios.
Plote o gráfico das seguintes funções:

a) $\cos(3x)$, $x \in [-3\pi, 4\pi]$	*b)* $\mathrm{cotg}(x)$, $x \in [-3\pi, 4\pi]$
c) $x^3 + 3x^2 - 3$, $x \in [-4, 4]$	*d)* $x^5 + 3x^3 + 20x^2 - 30x - 9$, $x \in [-4, 4]$
e) $1/(x^2 - 1)$, $x \in [-5, 4]$	*f)* $\mathrm{sen}(10x) + 2\log(x)$, $x \in [1/2, 10]$

10.2. **Opções.**

O comando **plot** possui uma série de recursos a fim de melhor apresentar o gráfico de uma, ou várias, funções.

$plot(func, x = x_{min}..x_{max}, ops)$	plota o gráfico da função $func$, como função de x, no intervalo $[x_{min}, x_{max}]$, com os recursos ops.

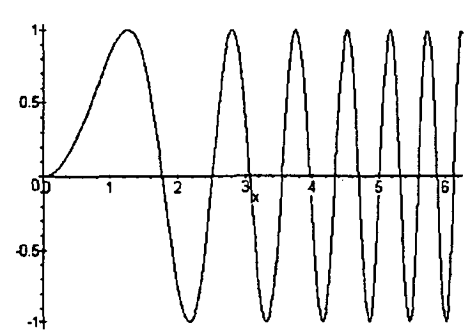
A seguir daremos uma lista das vários recursos que podemos utilizar com o comando **plot**.

opção	valor inicial	tipo de recurso	possibilidades
scaling	UNCONSTRAINED	controla a escala do gráfico	CONSTRAINED ou UNCONSTRAINED.
axes	NORMAL	tipo de eixos	FRAMED, NORMAL, BOXED, NONE.
numpoints	49	número de pontos a ser gerado	$n \in N$.
resolution	220	resolução na horizontal	$n \in N$.
color	BLACK	cor do gráfico a ser plotado	BLUE, GREEN, etc..
xtickmarks	5 ou 6	número de pontos que devem ser indicados no eixo dos $x's$	$n \in N$.
ytickmarks	4 ou 5	número de pontos que devem ser indicados no eixo dos $y's$	$n \in N$.
style	LINE	tipo de traço a ser utilizado no gráfico	LINE, POINT, . PATCH
title	sem título	coloca título no gráfico	se for um a frase colocar esta entre ' ' .
thickness	0	grossura do traço utilizado no gráfico	0, 1, 2 ou 3.
linestyle	0	tipo de traço pontilhado a ser utilizado no gráfico	$n \in N$.
symbol	POINT	tipo de ponto a ser utilizado no gráfico	BOX, CROSS, etc..
titlefont		tipo de caracter a ser utilizado no título	$[f, s, t]$, onde f pode ser TIMES, etc., s é BOLD, etc.. t = tamanho da letra.
axesfont		tipo de caracter a ser utilizado nos eixos	TIMES, etc..
view	curva inteira	mínimo e o máximo a ser mostrado nos eixos	$x = x_{min}..x_{max}$, $y = y_{min}..y_{max}$

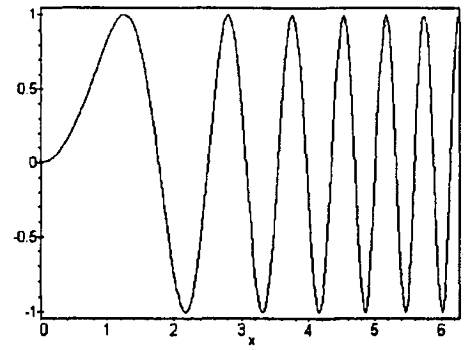
Outras opções podem ser obtidas com ?*plot*[*options*].

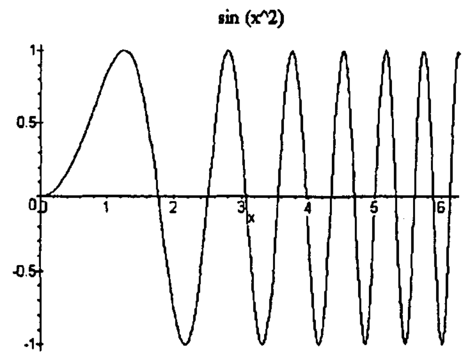
Exemplos.

1. Ao lado temos o gráfico de $f(x)sen(x^2)$ com as opções com o valor inicial (default).
> $plot(\sin(x\char`^2), x = 0..2 * Pi)$; < *Enter* >



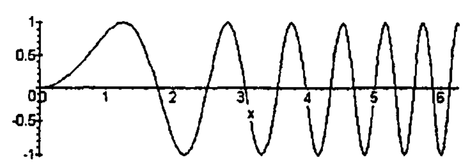
2. *Podemos colocar o gráfico dentro de um retângulo.*
$> plot(\sin(x\text{^}2), x = 0..2 * Pi, axes = BOXED);$ $< Enter >$

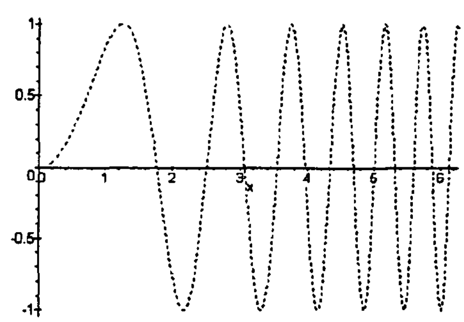




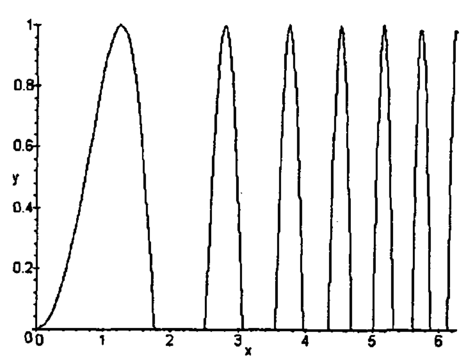
3. *O título* sen$(x\text{^}2)$ *pode ser colocado de seguinte modo:*
$> plot(\sin(x\text{^}2), x = 0..2 * Pi, title = `sen(x\text{^}2)`);$
$< Enter >$

4. *Podemos usar a mesma escala nos eixos dos x's e dos y's da seguinte maneira:*
$> plot(\sin(x\text{^}2), x = 0..2 * Pi, scaling = CONSTRAINED);$ $< Enter >$





5. *Para fazer o gráfico pontilhado temos:*
$> plot(\sin(x\text{^}2), x = 0..2 * Pi, linestyle = 3);$
$< Enter >$

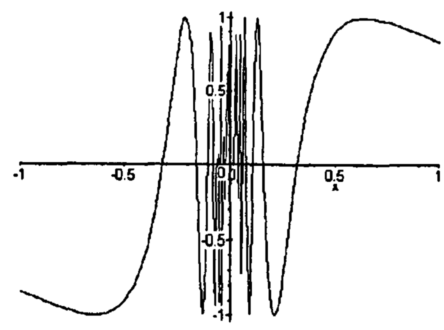


6. *Podemos plotar o gráfico em um intervalo da imagem fixado:*
$> plot(\sin(x\text{^}2), x = 0..2 * Pi, y = 0..1);$
$< Enter >$

Observação.

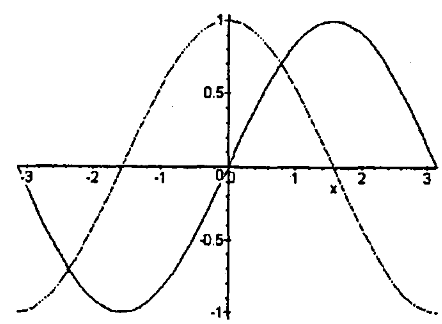
1. O MapleV *sempre tenta plotar gráficos de funções como curvas suaves. Assim em intervalos onde a função oscila muito a tendência é termos mais pontos plotados. Por exemplo, a função* $f(x) = \mathrm{sen}(1/x)$ *oscila muito quando* x *está próximo da origem, como vemos na figura ao lado*

$> plot(\sin(1/x), x = -1..1);$ $< Enter >$



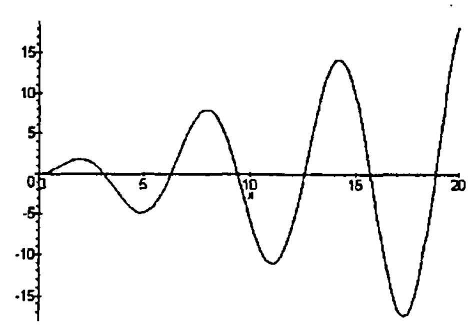
2. Podemos plotar o gráfico das funções $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ *e* $g(x) = \cos(x)$*, para* $x \in [-\pi, \pi]$ *do seguinte modo:*

$> plot(\{\sin(x), \cos(x)\}, x = -Pi..Pi);$
$< Enter >$

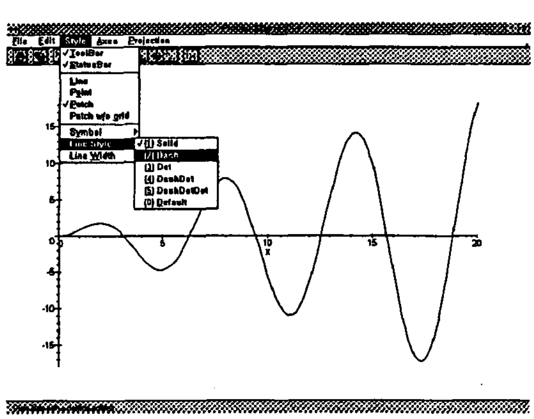


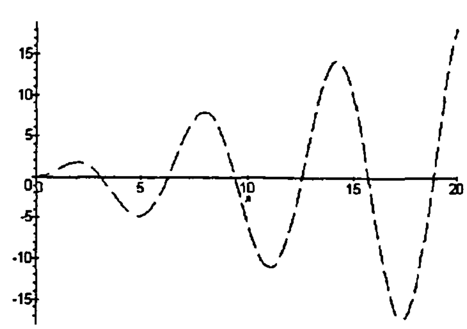
3. Algumas das opções acima podem ser utilizadas sem precisarmos usar os respectivos comandos. Por exemplo, plotando o gráfico de $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)$*,* $x \in [0, 20]$ *obtemos a figura ao lado:*

$> plot(x * \sin(x), x = 0..20);$ $< Enter >$



Podemos mudar, por exemplo, o tipo de linha utilizando a barra de ferrementas, como mostram as figuras abaixo:





4. Podemos utilizar o comando display *para mostrar vários gráficos, que haviam sido plotados separadamente, de uma só vez, como mostra o exemplo abaixo:*

5. O comando **with(plots)** *carrega o pacote plots e sempre deve ser carregado antes de utilizarmos o comando display. O : após os comandos acima servem para não mostrar os resultados obtidos em cada passagem intermediária.*
6. Outras opções podem ser encontradas utilizando-se ?plot[optons],

Exercícios.
Utilize as várias opções de comandos para plotar os gráficos das funções do exercício anterior.

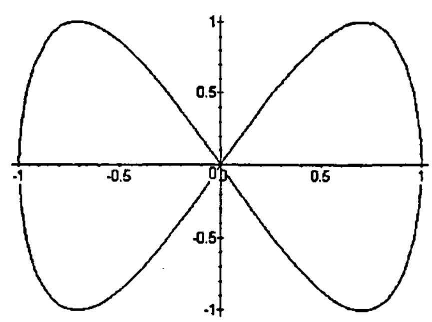
10.3. Gráficos de curvas dadas por equações paramétricas.

Podemos, usando o **MapleV**, plotar curvas dadas através de suas equações paramétricas.

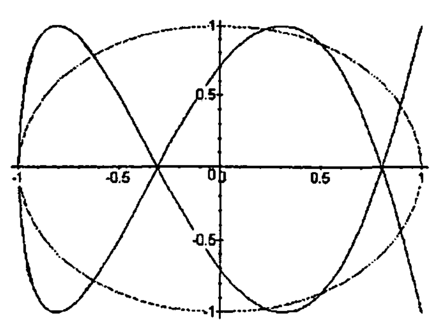
$plot([x(t), y(t), t = t_{min}..t_{max}])$	plota o gráfico da curva dada pelas equações paramétricas $x = x(t)$ e $y = y(t)$, $t \in [t_{min}, t_{max}]$.
$plot(\{[x_1(t), y_1(t), t_1 = t_{1min}..t_{1max}], \cdots, [x_n(t), y_n(t), t_n = t_{nmin}..t_{nmax}]\})$	plota os gráficos das n curvas dadas por suas equações paramétricas.

Exemplos.

1. Para plotar o gráfico da curva $(x(t), y(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, onde $x(t) = \text{sen}(t)$ e $y(t) = \text{sen}(2t)$ temos:
$> plot([\sin(t), \sin(2*t), t = 0..2*Pi]);$ *< Enter >*
obtendo-se a figura ao lado.



2. Para plotar os gráficos das curvas $(x_1(t), y_1(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, onde $x_1(t) = \text{sen}(t)$ e $y_1(t) = \cos(t)$ e $(x_2(t), y_2(t))$, onde $x_2(t) = \cos(2t)$ e $y(t) = \cos(5t)$, $t \in [0, \pi]$ temos:
$> plot(\{[\sin(t), \cos(t), t = 0..2*Pi], [\cos(2*t), \cos(5*t), t = 0..Pi]\});$ *< Enter >*
obtendo-se a figura ao lado.



Exercícios.
Plotar os gráficos das seguintes curvas:

$a)\ 4x^2 + 3y^2 = 12$ $\qquad b)\ 3x^2 - 2y^2 = 1$ $\qquad c)\ x = 2(t - \text{sen}(t))$ *e* $y = 2(1 - \cos(t))$

10.4. Gráficos de Funções Implicitamente.

Podemos utilizar o **MapleV** para traçar gráficos de funções dadas implicitamente, usando o seguinte comando:

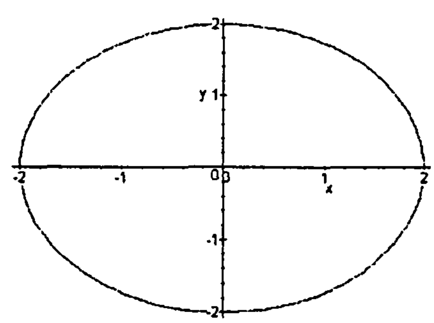
$implicitplot(expr, x = x_{min}..x_{max}, y = y_{min}..y_{max}, op)$	plota o gráfico da função , dada implicitamente, pela expressão *expr*, com $x \in [x_{min}, x_{max}]$ e $y \in [y_{min}, y_{max}]$, com as opções *op*.
$implicitplot(\{expr_1, \cdots, expr_n\}, x = x_{min}..x_{max}, y = y_{min}..y_{max}, op)$	plota os gráficos das funções , dadas implicitamente, pelas expressões $expr_1, \cdots, expr_n$, com $x \in [x_{min}, x_{max}]$ e $y \in [y_{min}, y_{max}]$, com as opções *op*.

Observação.
1. Para utilizar o comando implicitplot precisamos, primeiramente, carregar o pacote **plots**. *Para isto, devemos digitar* **with(plots): ¡Enter¿**.
2. As opções op do comando **implicitplot** *são as mesmas do comando* **plot**.

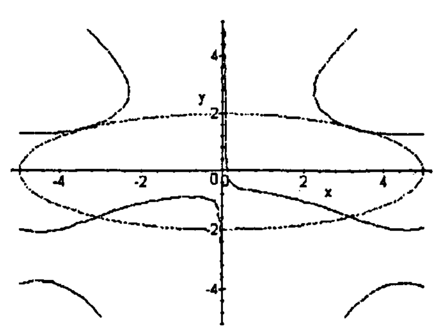
A seguir daremos alguns exemplos

Exemplos.

1. Para plotar o gráfico da função , dada implicitamente, pela equação $x^2 + y^2 = 4$, temos:
$>$ *with(plots)* : $<$ *Enter* $>$
$>$ $implicitplot(x\text{^}2 + y\text{^}2 = 4, x = -2..2, y = -2..2)$; $<$ *Enter* $>$
obtendo-se a figura ao lado.



2. Os gráficos das funções , dadas implicitamente, pelas equações $x\cos(y) + y\,\mathrm{sen}(x) = 0.1$ e $x^2/25 + y^2/4 = 1$ podem ser obtidos do seguinte modo:
$>$ $implicitplot(\{x * \cos(y) + y * \sin(x) = 0.1, x\text{^}2/25 + y\text{^}2/4 = 1\}, x = -5..5, y = -5..5)$;
$<$ *Enter* $>$
obtendo-se a figura ao lado.



Exercícios.

Plote o gráficos das seguintes funções , dadas implicitamente:

$a)\ x^2/100 + y^2/64 = 1 \qquad b)\ x\cos(y) + y\cos(x) = 1 \qquad c)\ x\exp(y) + y\exp(x) = 10$

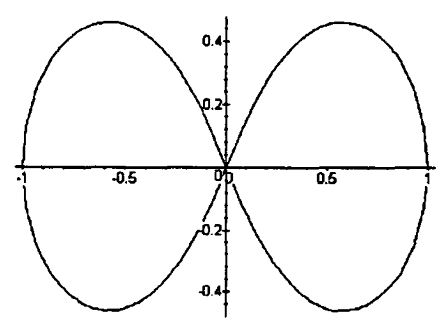
10.5. Gráficos de Curvas Dadas em Coordenadas Polares.

Para traçar o gráfico de uma curva dada em coordenadas polares podemos usar o seguinte procedimento:

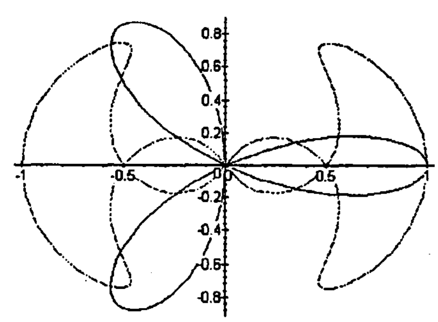
$plot([r(t), \theta(t), t = t_{min}..t_{max}],$ $coords = polar)$	plota o gráfico da curva em coordenadas polares, onde $r = r(t)$ é o raio polar e $\theta = \theta(t)$, é o ângulo e $t \in [t_{min}, t_{max}]$.
$plot(\{[r_1(t), \theta_1(t), t_1 = t_{1min}..t_{1max}], \cdots,$ $[r_n(t), \theta_n(t), t_n = t_{nmin}..t_{nmax}]\},$ $coords = polar)$	plota os gráficos das n curvas dadas em coordenadas polares.

Exemplos.

1. Para plotar o gráfico da curva em coordenadas polares por $r(t) = \operatorname{sen}(t)$ *e* $\theta(t) = \cos(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, *temos:*
$> plot([\sin(t), \cos(t), t = 0..2 * Pi], coords = polar);$ $< Enter >$
obtendo-se a figura ao lado.



2. Para plotar os gráficos das curvas em coordenadas polares por $r_1(t) = \cos(3t)$ *e* $\theta_1(t) = t$, $t \in [0, 2\pi]$, $r_2(t) = \operatorname{sen}(t)$ *e* $\theta_2(t) = \cos(3t)$, $t \in [0, 2\pi]$, *temos:*
$> plot(\{[\cos(3 * t), t, t = 0..2 * Pi], [\sin(t),$
$\cos(3 * t), t = 0..2 * Pi]\}, coords = polar);$
$< Enter >$
obtendo-se a figura ao lado.



11. Gráficos de Curvas e Funções Tridimensionais

Nesta secção introduziremos algumas ferramentas úteis na visualização curvas e gráficos de funções tridimensionals.

Iniciaremos com gráficos de funções de duas varáveis e mais tarde trataremos do problema relacionado com curvas.

11.1. Gráfico de Funções $z = f(x,y)$.

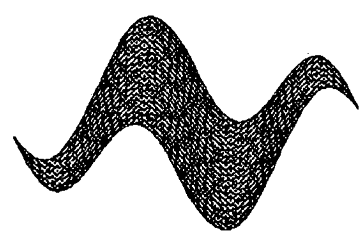
Usaremos o seguinte comando para plotar gráficos de funções de duas variáveis, $z = f(x,y)$:

$plot3d(f(x,y), x = x_{min}..x_{max}, y = y_{min}..y_{max}, ops)$	plota o gráfico da função $z = f(x,y)$, com $x \in [x_{min}, x_{max}]$ e $y \in [y_{min}, y_{max}]$, com as opções *ops*.
$plot3d(\{f_1(x,y), \cdots, f_n(x,y)\}, x = x_{min}..x_{max}, y = y_{min}..y_{max}, ops)$	plota os gráficos das n funções $z_1 = f_1(x,y), \cdots, z_n = f_n(x,y)$, com $x \in [x_{min}, x_{max}]$ e $y \in [y_{min}, y_{max}]$, com as opções *ops*.

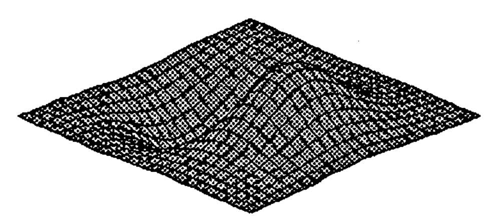
Consideremos alguns exemplos:

Exemplos.

1. Para obter o gráfico de $f(x,y) = \text{sen}(x - y)$, $x, y \in [-3, 3]$, *temos:*
$> plot3d(sin(x - y), x = -3..3, y = -3..3);$
< Enter >
obtendo-se a figura ao lado.



2. O gráfico de $f(x,y) = y\exp(-(x^2 + y^2))$, $x, y \in [-2, 2]$, *é obtido do seguinte modo:*
$> plot3d(y * exp(-(x\char`^2 + y\char`^2)), x = -2..2,$
$y = -2..2);$ *< Enter >*
obtendo-se o gráfico ao lado.



3. O gráfico de $f(x,y) = x^2 - y^2$, $x, y \in [-5, 5]$, *é obtido do seguinte modo:*
$> plot3d(x\char`^2 - y\char`^2, x = -5..5,$
$y = -5..5);$ *< Enter >*
obtendo-se o gráfico ao lado.

4. Os gráficos de $f_1(x,y) = \text{sen}(xy)$, $f_2(x,y) = x^2 + y^2$, $x, y \in [-2, 2]$, *é obtido do seguinte modo:*
$> plot3d(\{\sin(x * y), x\char`^2 + y\char`^2\}, x = -2..2,$
$y = -2..2);$ *< Enter >*
obtendo-se a figura ao lado.

Observação.
1. As opções para o comando plot3d são comandos da forma ops = valor. Temos as seguintes opções para o comando **plot3d***:*

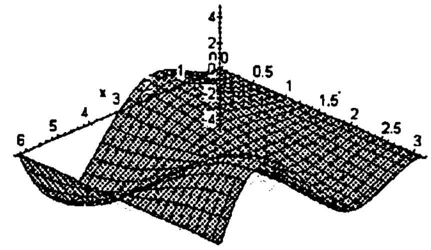
opção	*tipo de recurso*	*possibilidades*
numpoints	*número total de pontos a ser plotado.*	$n^2, n \in N$.
grid	*dimensões do gride retangular onde os pontos serão gerados.*	$[m, n]$, $m, n \in N$
title	*coloca título no gráfico.*	
labels	*rotula os eixos cartesianos com nomes.*	$[x_{nome}, y_{nome}, z_{nome}]$.
axes	*como os eixos devem ser plotados.*	*BOXED, NORMAL, FRAME, NONE.*
style	*como a superfície deve ser plotada.*	*POINT, HIDDEN, PATCH, WIREFRAME, CONTOUR, PATCHNOGRID, LINE, PATCHCONTOUR.*
coords	*tipo de sistema de coordenadas.*	*cartesian, spherical, cylindrical.*
scaling	*escala em que o a superfície será plotada.*	*CONSTRAINED, UNCONSTRAINED .*
projection	*perspectiva que o gráfico será visto.*	$r \in [0, 1]$.
orientation	*ângulos ,com os eixos dos x's e dos y's, do ponto em R^3 do qual a superfície será vista.*	$[\theta, \phi]$, $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$.
view	*máximo e o mínimo das coordenadas do gráfico a serem mostrados.*	$[zmin, zmax]$.
shading	*como a superfície será colorida.*	*XYZ, XY, Z, Z_GREYSCALE, Z_HUE, NONE .*
contours	*valores das curvas de níveis a serem plotados.*	$n \in N$.
color	*cor da superfície.*	*as mesmas do comando plot.*
tickmarks	*número de pontos que devem ser colocados ao longo dos eixos coordenados.*	$[l, m, n]$, $l, m, n \in N$.

2. Outras informações podem ser obtidas usando-se ?plot3d.

Consideraremos a seguir alguns exemplos.

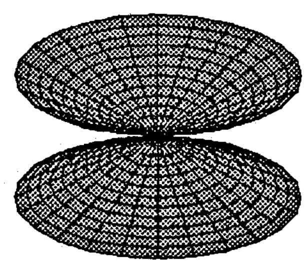
Exemplos.

1. Plotar o gráfico de $f(x,y) = x\,\text{sen}(x)\cos(y)$, $x \in [0, 2\pi]$ *e* $y \in [0, \pi]$, *com os eixos coordenados:*
$> plot3d(x * \sin(x) * \cos(y), x = 0..2 * Pi, y = 0..Pi, axes = NORMAL);$ $< Enter >$
obtendo-se a figura ao lado.



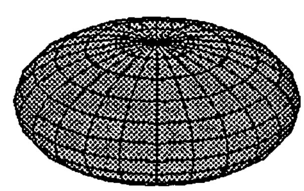
2. O gráfico da função , dada em coordenadas cilíndricas, (z, θ), $z \in [-1, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, *com o título CONE, é obtido do seguinte modo:*
$> plot3d(z, a = 0..2 * Pi, z = -1..1, coords = cylindrical, titte = CONE);$ $< Enter >$
obtendo-se o gráfico ao lado.

CONE



3. O gráfico da função , dada em coordenadas esféricas, $r = 2$, $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$, *com título ESPERA, é obtido do seguinte modo:*
$> plot3d(2, a = 0..2 * Pi, b = 0..2 * Pi, coords = spherical, title = ESFERA);$ $< Enter >$
obtendo-se o gráfico ao lado.

ESFERA

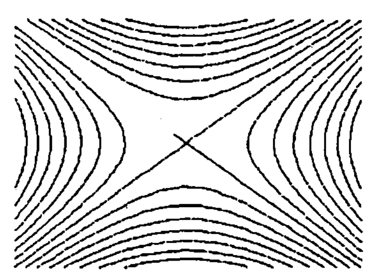


Observação.

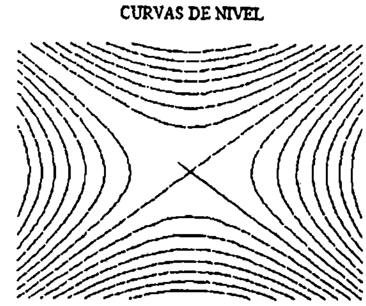
Para plotar as curvas de nível do gráfico de uma função $z = f(x,y)$ *podemos utilizar o comando contourplot, como mostram os exemplos abaixo a seguir:*

Exemplos.

1. Plotar curvas de nível do gráfico de $f(x,y) = x^2 - y^2)$, $x \in [-2, 2]$ *e* $y \in [-2, 2]$.
$> with(plots) : < Enter >$
$> contourplot(x\hat{}2 - y\hat{}2, x = -2..2, y = -2..2);$
$< Enter >$
obtendo-se a figura ao lado.

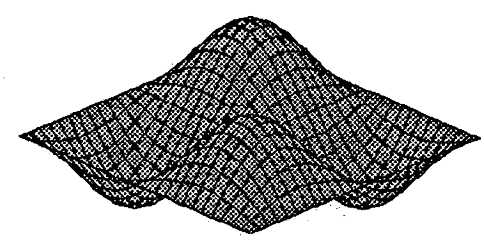


2. Plotar curvas de nível do gráfico de $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $x \in [-1,1]$ *e* $y \in [-1,1]$, *colocando-se o título CURVAS DE NIVEL.*
$>$ *with(plots)* : $<$ *Enter* $>$
$>$ *contourplot*$(x\wedge 2 - y\wedge 2, x = -2..2, y = -2..2,$
title = *'CURVAS DE NIVEL'*); $<$ *Enter* $>$
obtendo-se a figura ao lado.

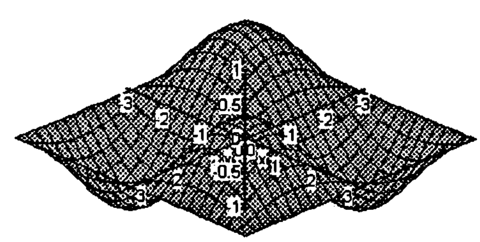


Observação.
1. Antes de executarmos o comando contourplot precisamos carregar o pacote plots, por isso executamos with(plots).

2.Alguns dos recursos acima, do comando plot3d, podem ser executados sem usarmos a opção , mas simplesmente manipulando a barra de ferramentas da janela do gráfico. Por exemplo, ao plotarmos o gráfico de $\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$ *para* $x, y \in [pi, \pi]$.
$<$ *plot3d*$(sin(x) * sin(y), x = -Pi..Pi,$
$y = -Pi..Pi)$; $<$ *Enter* $>$
obtemos a figura ao lado.



3. Se quizermos introduzir os eixos coordenados, escolhemos, na barra de ferramentas, a opção **Axes** *e* **NORMAL**. *Com isto o gráfico desaparecerá e aparecerá uma caixa. Clicando, com o botão da direita do mouse, em qualquer espaço da janela do gráfico obtemos o novo gráfico com a opção que escolhemos, no caso, os eixos coordenados, como mostra a figura ao lado.*



Isto pode ser feito com outros comandos, como por exemplo, **contourplot**, *etc..*

11.2. Gráficos de Superfícies Parametrizadas.

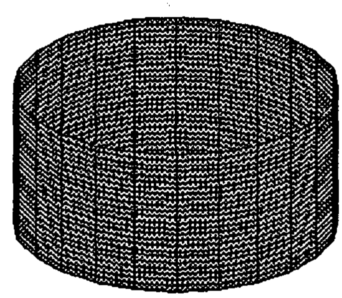
Podemos plotar gráficos de superfícies parametrizadas utilizando-se o comando:

$plot3d([x(t,s), y(t,s), z(t,s)], t = t_0..t_1, s = s_0..s_1)$	plota o gráfico da superfície dada pelas equações paramétricas $x = x(t,s)$, $y = y(t,s)$ e $z = z(t,s)$, $t \in [t_0, t_1]$, $s \in [s_0, s_1]$.
$plot3d(\{[x_1(t,s), y_1(t,s), z_1(t,s)], \cdots, [x_n(t,s), y_n(t,s), z_n(t,s)]\}, t = t_0..t_1, s = s_0..s_1)$	plota os gráficos das superfícies dadas pelas equações paramétricas $x_i = x_i(t,s)$, $y_i = y_i(t,s)$ e $z_i = z_i(t,s)$, $i = 1, \cdots, n$, onde $t \in [t_0, t_1]$, $s \in [s_0, s_1]$.

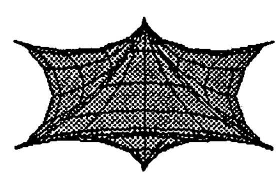
A seguir temos alguns exemplos.

Exemplos.

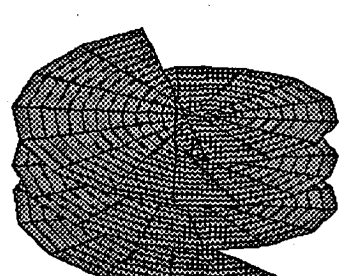
1. O cilindro reto com base o círculo $x^2 + y^2 = 1$ *pode ser plotado utilizando-se as equações paramétricas* $x(t,s) = \cos(t)$, $y(t,s) = \text{sen}(t)$ *e* $z(t,s) = s$, *com* $t \in [0, 2\pi]$ *e* $s \in [-1, 1]$.
$> plot3d([\cos(t), \sin(t), s], t = 0..2 * Pi, s = -1..1);$ < *Enter* >
obtendo-se a figura ao lado.



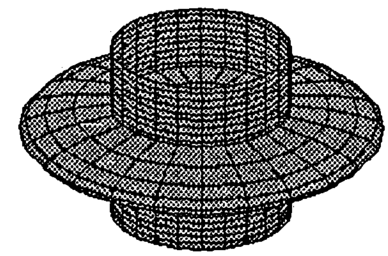
2. Plotar a superfície cujas equações paramétricas são: $x(t,s) = \cos^3(t)\cos^3(s)$, $y(t,s) = \text{sen}^3(t)\cos^3(s)$, $z(t,s) = \text{sen}^3(s)$, $t, s \in [0, 2\pi]$.
$> plot3d([\cos(t)\string^3 * \cos(s)\string^3, \sin(t)\string^3 * \cos(s)\string^3, \sin(s)\string^3], t = 0..2 * Pi, s = 0..2 * Pi);$
< *Enter* >
obtendo-se a figura ao lado.



3. Plotar a superfície cujas equações paramétricas são: $x(t,s) = s\sin(t)$, $y(t,s) = s\cos(t)$, $z(t,s) = t$ *(hélice), onde* $t \in [0, 10]$ *e* $s \in [-2, 2]$.
$> plot3d([s * \sin(t), s * \cos(t), t], t = 0..10, s = -2..2);$ < *Enter* >
obtendo-se a figura ao lado.



4. Plotar as superfícies cujas equações paramétricas são : $x_1(t,s) = 1/2\cos(t)$, $y_1(t,s) = 1/2\,\mathrm{sen}(t)$, $z_1(t,s) = s$) *(cilindro)* e $x_2(t,s) = \cos(t)\,\mathrm{sen}(s)$, $y_2(t,s) = \mathrm{sen}(t)\,\mathrm{sen}(s)$, $z_2(t,s) = \cos(s)$ *(esfera)*, $t, s \in [-\pi, \pi]$.
$> plot3d(\{[1/2 * \cos(t), 1/2 * \sin(t), s], [\cos(t) * \sin(s), \sin(t) * \sin(s), \cos(s)]\}, t = -Pi..Pi, s = -Pi..Pi);$ $< Enter >$
obtendo-se a figura ao lado.



11.3. Superfícies Dadas Implicitamente.

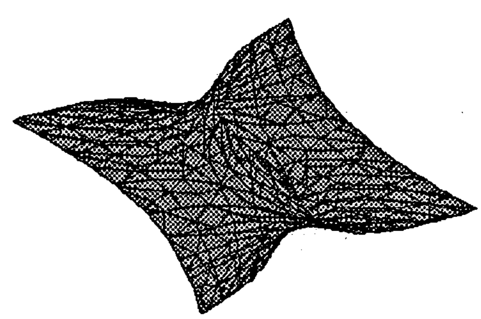
Podemos plotar superfícies dadas implicitamente, usando o seguinte comando:

$implicitplot3d(eq, x = a..b, y = c..d, z = p..q, ops)$	plota o gráfico da superfície dada, implicitamente, pela equação *eq*, com $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, $z \in [p,q]$ com as opções *op*.
$implicitplot3d(\{eq_1, \cdots, eq_n\}, x = a..b, y = c..d, z = p..q, ops)$	plota os gráficos das superfícies dadas, implicitamente, pelas equações eq_i, $i = 1, \cdots, n$, com $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, $z \in [p,q]$ com as opções *op*.

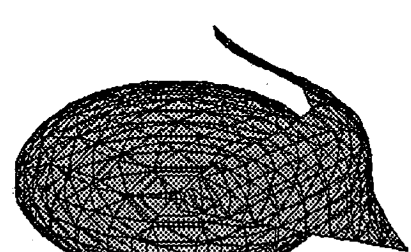
Antes de usar o comando *implicitplo3d* precisamos carregar o pacote **plots**, isto é, digitar **with(plots) : < Enter >**.
Os exemplos abaixo mostram algumas situações possíveis.

Exemplos.

1. Plotar a superfície dada, implicitamente, pela equação $xy + xz - yz = 1$, $x, y, z \in [-2, 2]$.
$> with(plots) : < Enter >$
$> implicitplot3d(x * y + x * z - y * z = 1, x = -2..2, y = -2..2, z = -2..2);$ $< Enter >$
obtendo-se a figura ao lado.



2. Plotar as superfícies dadas, implicitamente, pelas equações $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *(esfera)* e $-2x^3 + 3y^3 + 2z^3 = 3$ $x, y, z \in [-1, 1]$.
$> implicitplot3d(\{x\hat{}2 + y\hat{}2 + z\hat{}2 = 1, -2 * x\hat{}3 + 3 * y\hat{}3 + 2 * z\hat{}3 = 3\}, x = -1..1, y = -1..1, z = -1..1);$ $< Enter >$
obtendo-se a figura ao lado.



12. Curvas no Espaço

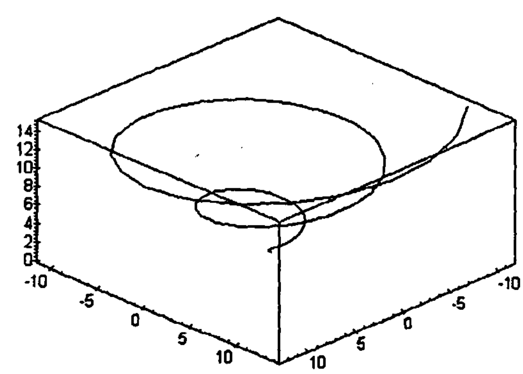
Podemos plotar curvas no espaço utilizando o comando:

$plots[spacecurve]([x(t), y(t), z(t)], t = t_{min}..t_{max}, ops)$	plota o gráfico da curva dada pelas equações paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$, $t \in [t_{min}, t_{max}]$, com as opções *ops*.
$plots[spacecurve](\{[x_1(t), y_1(t), z_1(t)], \cdots, [x_n(t), y_n(t), z_n(t)]\}, t = t_{min}..t_{max}, ops)$	plota os gráficos das curvas dadas pelas equações paramétricas $x_i = x_i(t)$, $y_i = y_i(t)$ e $z_i = z_i(t)$, $i = 1, \cdots, n$, $t \in [t_{min}, t_{max}]$, com as opções *ops*.

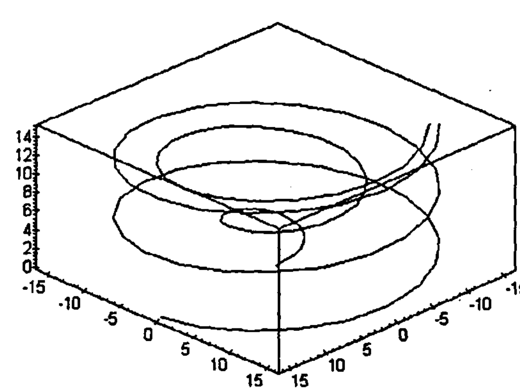
A seguir temos alguns exemplos.

Exemplos.

1. Plotar o gráfico da curva $x(t) = t\cos(t)$, $y(t) = t\,\mathrm{sen}(t)$, $z(t) = t$, onde $t \in [0, 15]$, colocando o mesmo dentro de uma caixa.
$> plots[spacecurve]([t * \cos(t), t * \sin(t), t], t = 0..15, axes = BOXED);$ *< Enter >*
obtendo-se a figura ao lado.



2. Plotar os gráficos das curvas $x_1(t) = 16\cos(t)$, $y_1(t) = 16\,\mathrm{sen}(t)$, $z_1(t) = t$, $x_2(t) = t\cos(t)$, $y_2(t) = t\,\mathrm{sen}(t)$, $z_2(t) = t$ onde $t \in [0, 15]$, colocando o mesmo dentro de uma caixa.
$> plots[spacecurve](\{[16 * \cos(t), 16 * \sin(t), t], [t * \cos(t), t * \sin(t), t]\}, t = 0..15, axes = BOXED);$ *< Enter >*
obtendo-se a figura ao lado.



13. Limites

Para calcular limites de funções de uma variável real usaremos o seguinte comando:

$limit(f, x = a)$	calcula $\lim_{x\to a} f(x)$ onde $a \in R$ ou $a = \pm\infty$.		
$limit(f, x = a, op)$	calcula o limite acima onde op pode ser:	$left$	$\lim_{x\to a^-} f(x)$.
		$right$	$\lim_{x\to a^+} f(x)$.
		$complex$	limite complexo.
		$real$	limite real.

A seguir temos alguns exemplos.

Exemplos.
Calcular os limites abaixo:

1. $lim_{x\to\pi} \tan(x)$ $> limit(\tan(x), x = Pi);$ $< Enter >$
0

2. $lim_{x\to\pi/2^-} \tan(x)$ $> limit(\tan(x), x = Pi/2, left);$ $< Enter >$
∞

3. $lim_{x\to 0} \mathrm{sen}(x)/x$ $> limit(\sin(x)/x, x = 0);$ $< Enter >$
1

4.$lim_{x\to\infty} \arctan(x)$ $> limit(\arctan(x), x = infinity);$ $< Enter >$
$\frac{1}{2}\pi$

Exercícios.
Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1 - \cos(x))/x$ *b)* $\lim\limits_{x\to 3}(x^2 - 9)/(x - 3)$ *c)* $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2 - 2x - 1)/(x^4 - 3x^3 + x^2)$

d) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})/x$ *e)* $\lim\limits_{h\to 0}((x+h)^n - x^n)/h$ *f)* $\lim\limits_{x\to\infty}(1 + 1/x)^x$

14. Derivada

Com o **MapleV** podemos calcular a derivada de função usando o comando:

$diff(expr, var)$	calcula a derivada da expressão $expr$ com relação a variável var.
$diff(expr, var\$n)$	calcula a derivada, de ordem n, da expressão $expr$ com relação a variável var.

Consideremos os seguintes exemplos abaixo:

Exemplos.
Calcular :

1. $f'(x)$, *onde* $f(x) = x^n$ $> diff(x\wedge n, x);$ $< Enter >$
$\frac{x^n n}{x}$

2.$f'(x)$, *onde* $f(x) = \arctan(x)$ $> diff(\arctan(x), x);$ $< Enter >$
$\frac{1}{1+x^2}$

3. $f'''(x)$, *onde* $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ $> diff(\sin(x), x\$3);$ $< Enter >$
$-\cos(x)$

Exercícios.

Calcular :

a) $f'(x)$, *onde* $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 3x - 2$ *b)* $f'(x)$, *onde* $f(x) = x/x(1+x^2)$

c) $f''(x)$, *onde* $f(x) = \mathrm{sen}(x^2 + 3x - 1)$

d) $f''(x)$, *onde* $f(x) = e^(- x^2 - 5xx + 1) + 4\ln(x) + \cos(3x)$

Observação.

Podemos utilizar o comando **diff** *para encontrar as derivadas parciais de uma função de várias varáveis, como mostram os exemplos abaixo:*

Encontrar as derivadas parciais $\frac{\partial}{\partial_x}$, $\frac{\partial}{\partial_y}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ *da função* $f(x,y) = x^2\cos(y) + \mathrm{sen}(xy) - x\ln(y^2)$.

Usando o comando diff, temos: $> diff(x\wedge * 2\cos(y) + \sin(x*y) - x*\ln(y\wedge 2), x);$ $< Enter >$

$2x\cos(x) + \cos(xy)y - \ln(y^2)$

$> diff(x\wedge * 2\cos(y) + \sin(x*y) - x*\ln(y\wedge 2), y);$ $< Enter >$

$-x^2\sin(y) + \cos(xy)x - 2\frac{x}{y}$

$> diff(x\wedge * 2\cos(y) + \sin(x*y) - x*\ln(y\wedge 2), x\$2);$ $< Enter >$

$2\cos(x) - \sin(xy)y^2$

$> diff(x\wedge * 2\cos(y) + \sin(x*y) - x*\ln(y\wedge 2), x, y);$ $< Enter >$

$2x\cos(x) + \cos(xy)y - \ln(y^2)$

Caso desejemos calcular $\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^n \partial y^m}$ *basta usarmos* $diff(f, x\$n, y\$m)$, *como por exemplo, para calcular* $\frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3}$ *da função acima temos:*

$> diff(x\wedge * 2\cos(y) + \sin(x*y) - x*\ln(y\wedge 2), x\$2, y\$3);$ $< Enter >$

obtendo-se

$$2\sin(x) + \cos(xy)x^3y^2 + 6\sin(xy)x^2y - 6\cos(xy)x$$

15. Integração

Com o **MapleV** podemos calcular integrais indefinidas, definidas e impróprias.

$int(f, var)$	calcula uma primitiva de f na variável var.
$int(f, var = a..b)$	calcula a integral definida de f, na variável var de a até b.

Consideremos os seguintes exemplos:

Exemplos.

a) Para encontrar uma primitiva de x^n $> int(x\wedge n, x);$ $< Enter >$

$\frac{x^{(n+1)}}{n+1}$

b) Para $1/(x^4 - a^4)$ *temos* $> int(1/(x\wedge 4 - a\wedge 4), x);$ $< Enter >$

$\frac{1}{4}\frac{\ln(a-x)}{a^3} - \frac{1}{4}\frac{\ln(a+x)}{a^3} - \frac{1}{2}\frac{\arctan(\frac{x}{\sqrt{a^2}})}{a^2\sqrt{a^2}}$

c) Para $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ $> int(x^2/sqrt(1-x^2), x);$ $< Enter >$

$-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x)$

d) Para calcular a $\int_0^1 1/(1+x^2)\,dx$ $> int(1/(1+x\wedge 2), x = 0..1);$ $< Enter >$

$\frac{1}{4}\pi$

e) A $\int_0^1 1/(x+\exp(x))\,dx$ *não é obtida em uma forma fechada.*

> $int(1/(x+exp(x), x=0..1);$ < *Enter* >

$\int_0^1 \frac{1}{x+\exp(x)}\,dx$

Podemos usar evalf para obter uma aproximação do valor da integral.

> $eval('');$ < *Enter* >

.5163007634

f) Podemos calcular o valor de integrais impróprias, como $\int_0^\infty 1/(1+x^2)\,dx$

> $int(1/(1+x\char`^2), x=0..infinity);$ < *Enter* >

$\frac{1}{2}\pi$

g) Para $\int_0^\infty (x+1)/(x^2+x+1)\,dx$

> $int((x+1)/(x\char`^2+x+1), x=0..infinity);$ < *En*

∞

Observação.

Podemos trabalhar com integrais duplas, triplas, etc.., como mostram os exemplos abaixo:

1. Para calcular $\int\int (x^2+y^2)\,dx\,dy$

fazemos

> $int(int(x\char`^2+y\char`^2, x), y);$ < *Enter* >

obtendo-se

$\frac{1}{3}x^3y+\frac{1}{3}y^3x$

2. Para $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x)+x\,\mathrm{sen}(y)\,dx\,dy$

temos

> $int(int(\cos(x)+x*\sin(y), y=0..2*Pi),$
> $x=0..Pi/2);$ < *Enter* >

obtendo-se

2π

3 . Para $\int\int\int (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$

temos

> $int(int(int(x\char`^2+y\char`^2+z\char`^2, x), y), z);$ < *Enter* >

obtendo-se

$\frac{1}{3}x^3yz+\frac{1}{3}y^3xz+\frac{1}{3}z^3xy$

4. Para $\int_0^1\int_{-1}^2\int_{-1}^1 (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$

> $int(int(int(x\char`^2+y\char`^2+z\char`^2, x=-1..1), y=-1..2),$
> $z=0..1);$ < *Enter* >

obtendo-se

10

Exercícios.

Calcular:

a) $\int (x^3+x^2-4x-7)\,dx$ *b)* $\int_{-1}^2 (1/3x^3-x^2+x-5)\,dx$ *c)* $\int 1/(3x-4)\,dx$

d) $\int_1^3 1/(4+x^4)\,dx$ *e)* $\int (6x^2+3x-2)/((x-1)(x^2+3)^2)\,dx$ *f)* $\int_0^1 (x+1)/(x^3+1)\,dx$

16. Séries Numéricas e de Funções

Podemos trabalhar com séries numéricas ou de funções usando o **MapleV**, utilizando os comandos:

$sum(f(i), i=i_0..i_n)$	calcula $\sum_{i_0}^{i_n} f(i)$.
$series(f(x), x=x_0, n)$	expande $f=f(x)$ em série de potêcias de $(x-x_0)$ até a potência n.

Exemplos.

1. Para encontrar $\sum_{i=2}^{8}(i+1)/(i^3+i-1)$ *temos*

$> sum((i+1)/(i\hat{}3+i-1), i=2..8);$ < *Enter* >

obtendo-se

$\frac{2221862630258}{3344462376099}$

2. Para encontrar $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i^2$ *temos*

$> sum(1/i\hat{}2, i=1..infinity);$ < *Enter* >

obtendo-se

$\frac{1}{6}\pi^2$

3. Para expandir $f(x)=\mathrm{sen}(x)$ *em série de potência de* x *até a ordem* 10 *basta*

$> series(\sin(x), x=0,10);$ < *Enter* >

obtendo-se

$x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+\frac{1}{362880}x^7+O(x^{10})$

4. Para expandir $f(x)=\cos(x)$ *em série de potencias de* $(x-1)$ *até a ordem* 3, *temos*

$> series(\cos(x), x=1,3);$ < *Enter* >

$\cos(1)-\sin(1)(x-1)-\frac{1}{2}\cos(1)(x-1)^2+O((x-1)^3)$

5. Para obtermos uma aproximação dos coeficientes usamos $evalf$

$> evalf(");$ < *Enter* >

obtendo-se

$.5403023059-.8414709848(x-1.)-.2701511530(x-1.)^2+0((x-1.)^3)$

Observação.

Podemos encontrar a série de Laurent de uma função utilizando o comando series, como mostra o exemplo abaixo:

A serie de Laurent de $f(x)=\cos(x)/x^2$, *até a potência* 10, *pode ser obtida do seguinte modo:*

$> series(\cos(x)/x\hat{}2, x=0,10);$ < *Enter* >

$x^{-2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}x^2-\frac{1}{720}x^4+\frac{1}{40320}x^6+O(x^8)$

Exercícios.

1. Encontrar a soma das seguintes séries numéricas:

$a)\ \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i} \qquad b)\ \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{r^i} \qquad c)\ \sum_{-\infty}^{\infty}(i+1)/(i^4+1)$

2. Expandir em série de potências de $(x-x_0)$, *até a ordem* 6 *as seguintes funções :*

$a)\ (1-\cos(x))/x,\ x_0=0 \qquad b)\ \mathrm{sen}(x)/x,\ x_0=0 \qquad c)\ x\,\mathrm{sen}(x)+x^2cos(x),\ x_0=\pi$

FIM