



ANÁLISE NUMÉRICA DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS MECÂNICAS EM UMA VIGA METÁLICA DO TIPO EULER-BERNOULLI

Vinicius Pereira Pedro, Departamento de Engenharia Mecânica, EESC/USP, vinicius.pedro@usp.br

Jaime Alberto Mosquera Sánchez, Departamento de Engenharia Mecânica, EESC/USP, jamosquera@usp.br

Resumo. Este trabalho apresenta um estudo numérico da propagação de ondas mecânicas em uma viga metálica tipo Euler-Bernoulli, submetida a excitações harmônicas e do tipo wavepacket, incluindo amortecimento viscoso proporcional. A modelagem foi realizada via Método dos Elementos Finitos (MEF) em Python, considerando uma viga engastada-livre com aplicação de força concentrada na extremidade livre. As curvas de dispersão foram obtidas para os casos com e sem amortecimento, evidenciando seu impacto na velocidade de propagação das perturbações mecânicas, principalmente aquelas de altas frequências. A propagação transiente do pulso no domínio do tempo foi monitorada em pontos estratégicos, permitindo a análise da dispersão e atenuação espectral. Os resultados demonstram a capacidade do modelo em capturar os efeitos dinâmicos e dispersivos relevantes para a propagação de ondas em estruturas metálicas esbeltas do tipo viga.

Palavras-chave: Propagação de Ondas. Viga Euler-Bernoulli. Amortecimento de Rayleigh. Método dos Elementos Finitos. Análise de Dispersão.

RESUMO EXPANDIDO

Este trabalho apresenta um estudo numérico da propagação de ondas em uma viga metálica submetida a excitações harmônicas e transientes, considerando a influência de amortecimento viscoso.

Considerou-se uma viga esbelta de aço estrutural, com seção transversal retangular constante e dimensões compatíveis com a teoria de Euler-Bernoulli, incluindo efeitos do amortecimento proporcional (modelo de Rayleigh). A viga foi engastada em uma das suas extremidades e submetida a uma força concentrada, aplicada na extremidade livre. Duas excitações com características tempo-frequência diferentes foram testadas, como se segue: (i) excitação harmônica senoidal e (ii) pulso seno-gaussiano (excitação transiente). A discretização do modelo numérico da viga foi realizada por meio do MEF com elementos de viga de Euler-Bernoulli. Realizado o refinamento de malha com tolerância igual a 0,1 Hz, a viga foi discretizada em 60 elementos finitos unidimensionais com interpolação clássica de viga. As principais propriedades da viga estão sumarizadas na Tab. (1).

Tabela 1: Propriedades da viga.

Propriedade	Símbolo	Valor
Módulo de Young	E	210×10^9 Pa
Densidade	ρ	7850 kg/m ³
Comprimento	L	1,0 m
Largura	b	0,02 m
Espessura	h	0,01 m

O diagrama de dispersão $\omega(k)$ descreve a relação entre a frequência angular ω e o número de onda k (DOYLE, 2020). Essa relação é essencial para compreender o comportamento dispersivo das ondas flexionais em vigas, em que diferentes componentes de frequência propagam-se a velocidades distintas. Simulando uma fonte de excitação harmônica, foram gerados os diagramas de dispersão para os casos sem amortecimento e com amortecimento de Rayleigh, permitindo avaliar os efeitos da dissipação de energia na propagação de ondas, bem como observar a alteração das frequências naturais com a inclusão de amortecimento. A Equação (1) é a equação transcendental clássica para uma viga *cantilever*, a partir da qual os valores admissíveis do número de onda k_n , correspondentes aos modos de vibração natural da viga, podem ser obtidos (RAO, 2011). Cada solução β_n desta equação está associada a um modo de flexão específico, que define tanto o padrão de deslocamento ao longo da viga quanto a frequência natural de cada modo.

$$\cos(\beta_n L) \cdot \cosh(\beta_n L) = -1, \quad (1)$$

em que $\beta_n = k_n$, onde $k_n = \omega/c$ é o número de onda para um modo n , com ω a frequência da excitação externa e c a velocidade de propagação da onda de flexão na viga, e L representa o comprimento da viga.

A propagação transiente de ondas na viga foi simulada por meio da aplicação de um pulso (força concentrada) do tipo

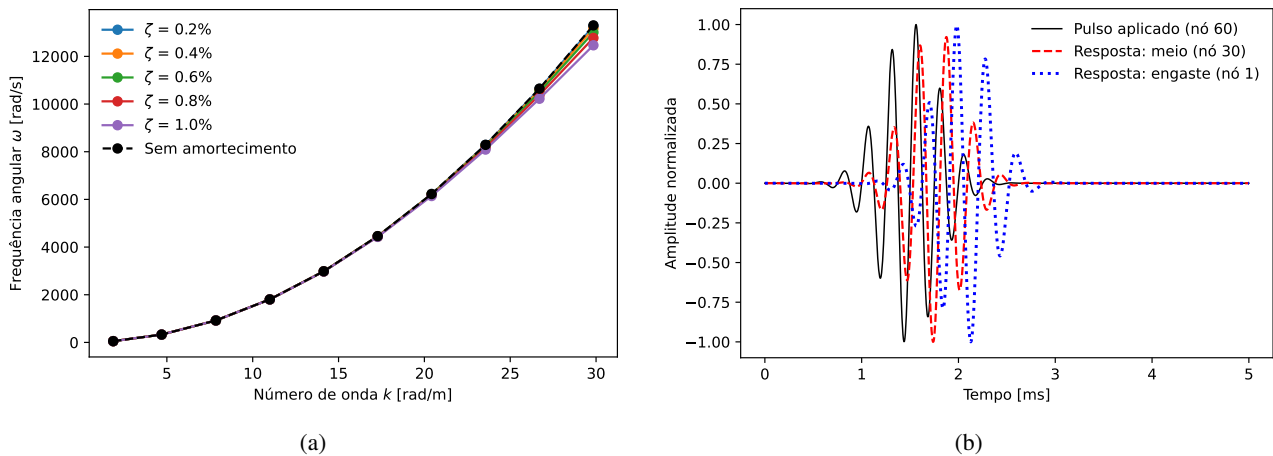


Figura 1: (a) Diagramas de dispersão da viga sob um conjunto de coeficientes de amortecimento proporcional; (b) respostas temporais do pacote de onda nas posições monitoradas da viga (com $\zeta = 1\%$ do amortecimento crítico).

seno-gaussiano na extremidade livre na direção transversal, conforme a Eq. (2):

$$f(t) = \sin[2\pi f_0(t - t_0)] \cdot \exp\left(-\frac{(t - t_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2)$$

em que f_0 é a frequência central do pulso; t_0 é o instante de pico da excitação e σ define a largura temporal do pulso.

A propagação do pulso foi monitorada em três posições ao longo da viga: extremidade livre, centro da viga e próximo ao engaste. As respostas temporal e espectral nestes pontos permitiram observar a chegada da frente de onda e a dispersão progressiva do pacote de onda ao longo da estrutura. A Figura (1) mostra os diagramas de dispersão da viga, considerando $h = 0,01$ m, bem como a propagação do pacote de onda monitorado no tempo.

O diagrama de dispersão construído a partir das frequências naturais e seus respectivos números de onda confirmou o comportamento dispersivo da propagação de ondas mecânicas na viga estudada. O efeito do amortecimento viscoso foi evidenciado nas altas frequências, principalmente acima de $8 \text{ krad}\cdot\text{s}^{-1}$, em que a velocidade de propagação dessas frequências é menor à medida que o coeficiente do amortecimento viscoso aumenta. Por outro lado, a análise temporal e espectral nos diferentes pontos da viga demonstrou que as componentes de alta frequência se atenuam mais rapidamente, reduzindo a velocidade efetiva da frente de onda e promovendo o espalhamento espectral da perturbação de entrada.

Futuras direções a serem investigadas incluem a consideração de não-linearidades em vigas esbeltas por grandes deformações (MANKTELOW et al., 2014), inclusão de elementos piezelétricos, periodicamente arranjados sobre a viga esbelta (MOSQUERA-SÁNCHEZ and DE MARQUI JR., 2024), bem como o estudo da interação entre a não-linearidade global da viga (estrutura hospedeira) e as não-linearidades induzidas via osciladores piezelétricos não-lineares.

REFERÊNCIAS

- DOYLE, J. F. (2020). *Wave Propagation in Structures*. Mechanical Engineering Series. Springer Nature Switzerland AG, Cham, 3 edition.
- MANKTELOW, K. L., LEAMY, M. J., and RUZZENE, M. (2014). Analysis and experimental estimation of nonlinear dispersion in a periodic string. *Journal of Vibration and Acoustics*, 136(3):031016. Paper No: VIB-13-1292.
- MOSQUERA-SÁNCHEZ, J. A. and DE MARQUI JR., C. (2024). Broadband and multimode attenuation in duffing- and nes-type piezoelectric metastructures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 270:109084.
- RAO, S. S. (2011). *Mechanical Vibrations*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 5 edition.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), por meio da bolsa 130187/2025-9.

RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.