

PCD 2965912
UNIDADE 772
ACERVO BCNP 06

APLICAÇÃO DAS FUNÇÕES LOGARITMO E EXPONENCIAL GENERALIZADAS EM SISTEMAS COMPLEXOS

Alexandre Souto Martinez

DF/FFCLRP/USP

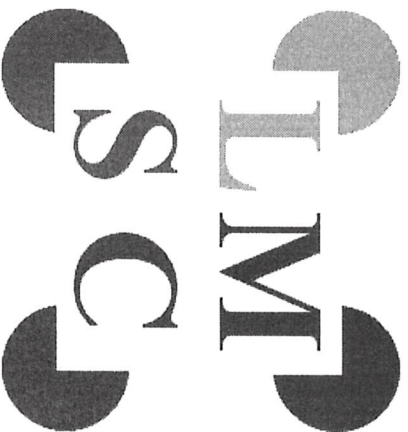
Ribeirão Preto, 18 de julho de 2018

A. S. MARTINEZ (DF/FFCLRP/USP)

$\ln q(x)$ e $q_2(x)$

/ 34

LABORATÓRIO DE MODELAGEM EM SISTEMAS COMPLEXOS



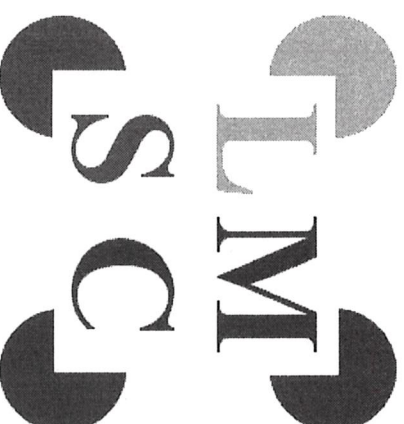
"Eu mergulho por paixão e sempre me perguntei se um dia teria um propósito. As últimas duas semanas foram para o que eu me preparei a vida toda"

A. S. MARTINEZ (DF/FFCLRP/USP)

$\ln q(x)$ e $q_2(x)$

/ 34

LABORATÓRIO DE MODELAGEM EM SISTEMAS COMPLEXOS



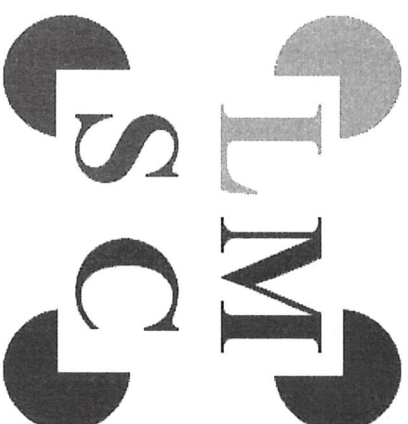
"Eu mergulho por paixão e sempre me perguntei se um dia teria um propósito."

A. S. MARTINEZ (DF/FFCLRP/USP)

$\ln q(x)$ e $q_2(x)$

/ 34

LABORATÓRIO DE MODELAGEM EM SISTEMAS COMPLEXOS

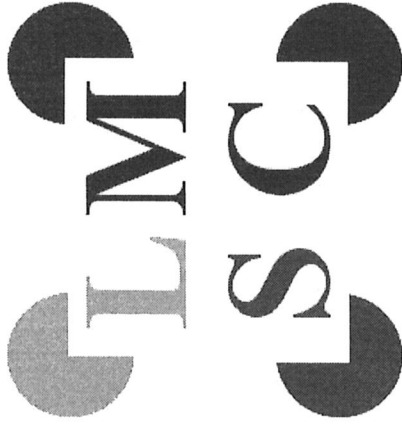


"Eu mergulho por paixão e sempre me perguntei se um dia teria um propósito. As últimas duas semanas foram para o que eu me preparei a vida toda" John Volanthen,

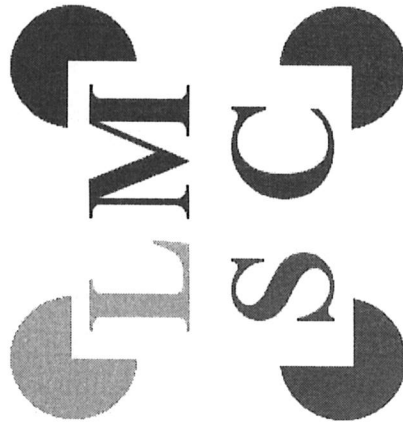
A. S. MARTINEZ (DF/FFCLRP/USP)

$\ln q(x)$ e $q_2(x)$

/ 34



"Eu mergulho por paixão e sempre me perguntei se um dia teria um propósito. As últimas duas semanas foram para o que eu me preparei a vida toda" John Volanthen, Mergulhador britânico, um dos principais responsáveis pelo resgate do pessoal na caverna na Tailândia em 2018.



Grupo de Pesquisa

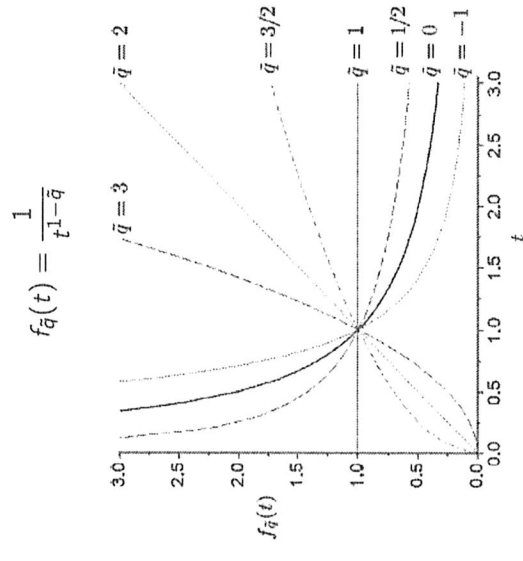
- **Mestrandos**
 - Allef Páblo Araújo da Silva
 - José Renato Alcarás
 - Carlos Danilo Gaioli Euzebio
 - Claudio Bolderini Júnior
 - Marcos Raphael Bernardi de Souza
 - Guilherme Contesini dos Santos
 - Naomy Duarte Gomes
 - Jaldo de Sousa Lima



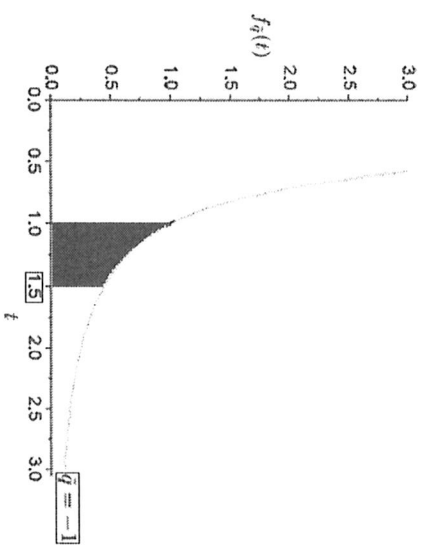
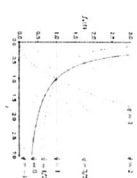
Grupo de Pesquisa

- **Pós-Doc**
 - Gilberto Medeiros Nakamura
- **Doutorandos**
 - Cristiano Roberto Fabri Granzotti
 - Alexandre Henrique de Martini

HIPÉRBOLES ASSIMÉTRICAS

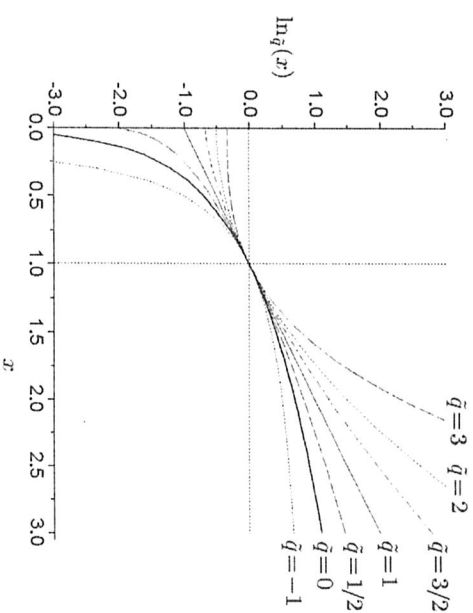
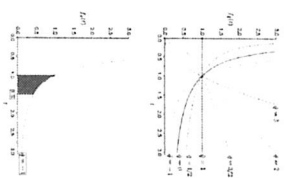


HÍPERBOLES ASSIMÉTRICAS: $f_{\tilde{q}}(t) = t^{\tilde{q}-1}$



A. S. MARTINEZ (DF/FFCLRP/USP) $\ln_{\tilde{q}}(x) \equiv e_{\tilde{q}}(x)$ / 34

$\tilde{q}$ -LOGARITMO: $\ln_{\tilde{q}}(x) = \lim_{\tilde{q}' \rightarrow \tilde{q}} (x^{\tilde{q}'} - 1) / \tilde{q}'$

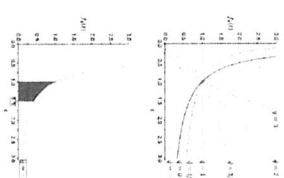


T. J. Arruda, R. S. González e A. S. Martinez, Phys. Lett. A 372, 2578-2582 (2008).

C. Tsallis, Química Nova 17 468 (1994).

A. S. MARTINEZ (DF/FFCLRP/USP) $\ln_{\tilde{q}}(x) \equiv e_{\tilde{q}}(x)$ / 34

$\tilde{q}$ -LOGARITMO



$$\begin{aligned} \ln_{\tilde{q}}(x) &= \int_1^x \frac{dt}{t^{1-\tilde{q}}} \\ &= \lim_{\tilde{q}' \rightarrow \tilde{q}} \frac{x^{\tilde{q}'} - 1}{\tilde{q}'} = \begin{cases} \ln(x) & \text{for } \tilde{q} = 0 \\ \frac{x^{\tilde{q}} - 1}{\tilde{q}} & \text{for } \tilde{q} \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

T. J. Arruda, R. S. González e A. S. Martinez, Phys. Lett. A 372, 2578-2582 (2008).

C. Tsallis, Química Nova 17 468 (1994).

A. S. MARTINEZ (DF/FFCLRP/USP) $\ln_{\tilde{q}}(x) \equiv e_{\tilde{q}}(x)$ / 34

$\tilde{q}$ -EXPONENCIAL

Função Inversa

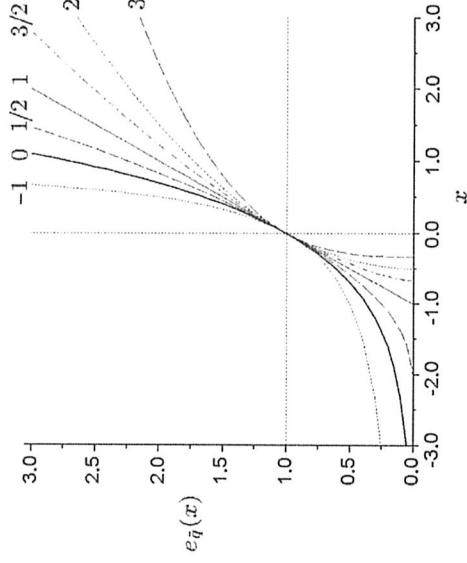
$$\ln_{\tilde{q}}(x) = \lim_{\tilde{q}' \rightarrow \tilde{q}} \frac{x^{\tilde{q}'} - 1}{\tilde{q}'}$$

$$e_{\tilde{q}}(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } \tilde{q} = 0 \\ (1 + \tilde{q}x)^{1/\tilde{q}} & \text{se } \tilde{q}x > -1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

T. J. Arruda, R. S. González e A. S. Martinez, Phys. Lett. A 372, 2578-2582 (2008).

C. Tsallis, Química Nova 17 468 (1994).

A. S. MARTINEZ (DF/FFCLRP/USP) $\ln_{\tilde{q}}(x) \equiv e_{\tilde{q}}(x)$ / 34



T. J. Arruda, R. S. González e A. S. Martínez, Phys. Lett. A **372**, 2578-2582 (2008).

C. Tsallis, Química Nova **17** 468 (1994).

• Estatística

- Arruda, T. J. ; González, R. S. ; Terçariol, C. A. S. ; Martínez, A. S. Arithmetical and geometrical means of generalized logarithmic and exponential functions: Generalized sum and product operators, Physics Letters A v. **372**, 2578-2582, 2008.
- Martínez, A. S.; González, R. S. ; Terçariol, C. A. S. Generalized Probability Functions, Advances in Mathematical Physics **2009**, 1-14, 2009.

$$\ln_{\tilde{q}}(x) = \lim_{\tilde{q}' \rightarrow \tilde{q}} \frac{x^{\tilde{q}'} - 1}{\tilde{q}'}$$

$$e_{\tilde{q}}(x) = \begin{cases} (1 + \tilde{q}x)^{1/\tilde{q}} & \text{se } \tilde{q}x > -1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

VANTAGENS:

- interpretação geométrica para o parâmetro $\tilde{q}$ da física estatística generalizada de Tsallis;
- representações concisas e
- fácil manipulação algébrica, que pode revelar novas propriedades de sistemas.

• Dinâmica de Populações

- Martínez, A. S.; González, R. S. ; Terçariol, C. A. S. Continuous growth models in terms of generalized logarithm and exponential functions, Physica A **387**, 5679-5687, 2008.
- Martínez, A. S.; González, R. S. ; Espíndola, A. L. Generalized exponential function and discrete growth models, Physica A **388**, 2922-2930, 2009.
- Cabella, B. C. T. ; Martínez, A. S. ; Ribeiro, F. Data collapse, scaling functions, and analytical solutions of generalized growth models, Physical Review. E **83**, 061902, 2011.
- Santos, L. S. ; Cabella, B. C. T. ; Martínez, A. S. Generalized Allee effect model, Theory in Biosciences, **2014**, 1-8, 2014.
- dos Santos, R. V. ; Ribeiro, F. L. ; Martínez, A. S. Models for Allee effect based on physical principles, Journal of Theoretical Biology, **385**, 143-152, 2015.



• **Psicofísica/Econofísica**

- Anteneodo, C. ; Tsallis, C. ; Martinez, A. S. Risk aversion in economic transactions, *Europhysics Letters* **59**, 635–641, 2002.
- Destefano, N. ; Martinez, A. S. The additive property of the inconsistency degree in intertemporal decision making through the generalization of psychophysical laws, *Physica A* **390**, 1763–1772, 2011.
- dos Santos, L. S. ; Destefano, N. ; Martinez, A. S. Decision making generalized by a cumulative probability weighting function, *Physica A* **490** 250–259, 2018.



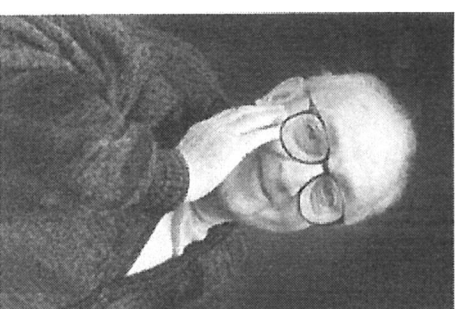
ALL MODELS ARE WRONG, BUT SOME ARE USEFUL

• **Processos Não-Markovianos**

- Silva, R. ; de Felício, J. R. D. ; Martinez, A. S. Generalized Metropolis dynamics with a generalized master equation: An approach for time-independent and time-dependent Monte Carlo simulations of generalized spin systems, *Physical Review E* **85**, 066707, 2012.
- Silva, R. ; Kailif, F. ; Oliveira, J. P. ; Martinez, A. S. Universality in bibliometrics *Physica A* **391**, 2119–2128, 2012.
- **Aplicações Inusitadas**
- Holanda, A. J. ; Pisa, I. T. ; Kinouchi, O. ; Martinez, A. S. ; Ruiz, E. E. S. Theasaurus as a complex network, *Physica A* **344**, 530–536, 2004.
- Menin, O. H. ; Rolnik, V. ; Martinez, A. S. Boundary element method and simulated annealing algorithm applied to electrical impedance tomography image reconstruction, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **35**, 1–7, 2013.
- Assirati, L. ; Martinez, A. S. ; Bruno, O. M. . Satellite classification and segmentation using non-additive entropy,



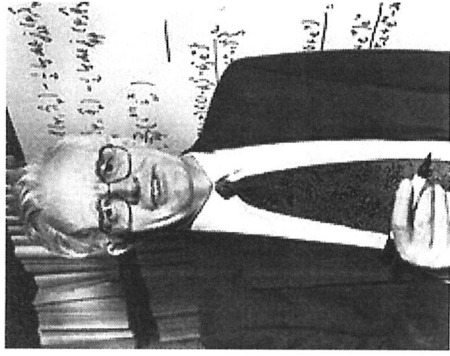
ALL MODELS ARE WRONG, BUT SOME ARE USEFUL



George Box - 18/10/1919 –28/03/2013.



George Box - 18/10/1919 -28/03/2013.



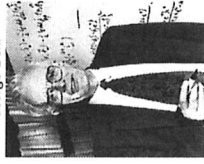
David Cox - 15/07/1924.

Two British wise men.

Considere $x_1, x_2, \dots, x_R$, com $x_i \geq 0$.



George Box



David Cox.

Considere $x_1, x_2, \dots, x_R$, com $x_i \geq 0$.

A transformação:

$$y_i = \ln_{\bar{q}}(x_i),$$

faz com y_i siga uma gaussiana. Dentre as mais elaboradas transformações de Box-Cox, a função logaritmo generalizada é a mais simples.



George Box.



David Cox.

Considere $x_1, x_2, \dots, x_R$, com $x_i \geq 0$.

A transformação:

$$y_i = \ln_{\bar{q}}(x_i),$$

faz com y_i siga uma gaussiana. Dentre as mais elaboradas transformações de Box-Cox, a função logaritmo generalizada é a mais simples.

Para incluir variáveis nulas e negativas usa-se definição de

Yeo e Johnson^a

$$y_i = \begin{cases} \ln_{\bar{q}}(1 + y_i) & y_i \geq 0 \\ -\ln_{2-\bar{q}}(1 - y_i) & y_i < 0. \end{cases}$$



George Box.



David Cox.

TRANSFORMAÇÃO DE BOX-COX



George Box.

Considere $x_1, x_2, \dots, x_R$, com $x_i \geq 0$.

A transformação:

$$y_i = \ln \hat{q}(x_i),$$

faz com y_i siga uma gaussiana. Dentre as mais elaboradas transformações de Box-Cox, a função logaritmo generalizada é a mais simples.

Para incluir variáveis nulas e negativas usa-se definição de Yeo e Johnson²

$$y_i = \begin{cases} \ln \hat{q}(1 + y_i) & y_i \geq 0 \\ -\ln_{2-\hat{q}}(1 - y_i) & y_i < 0. \end{cases}$$

Ela foi pensada no sentido de encontrar $\hat{q}$ que minimize a divergência de Kullback-Leibler entre a distribuição original e a normal.



David Cox.

² I. K. Yeo, R. A. Johnson, *Biometrika* 87, 954 (2000). 10

DISTRIBUIÇÃO GENERALIZADA DE VALOR EXTREMO

- A pdf do valor extremo generalizado (GEV - Fisher-Tippett) combina as pdf's dos tipos: I (Gumbel), II (Fréchet) e III (Weibull).
- Pelo teorema de valor extremo, a GEV é a única pdf de limites possíveis de máximos adequadamente normalizados de uma sequência de V. A. independentes e distribuídas de forma idêntica.

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_extreme_value_distribution

DISTRIBUIÇÃO GENERALIZADA DE VALOR EXTREMO

- A pdf do valor extremo generalizado (GEV - Fisher-Tippett) combina as pdf's dos tipos: I (Gumbel), II (Fréchet) e III (Weibull).

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_extreme_value_distribution

DISTRIBUIÇÃO GENERALIZADA DE VALOR EXTREMO

- A pdf do valor extremo generalizado (GEV - Fisher-Tippett) combina as pdf's dos tipos: I (Gumbel), II (Fréchet) e III (Weibull).
- Pelo teorema de valor extremo, a GEV é a única pdf de limites possíveis de máximos adequadamente normalizados de uma sequência de V. A. independentes e distribuídas de forma idêntica.
- Uma distribuição de valor extremo não precisa necessariamente existir: isso requer condições de regularidade na cauda da distribuição. Apesar disso, a distribuição GEV é frequentemente usada como uma aproximação para modelar o valor máximo de sequências longas (finitas) de V. A.

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_extreme_value_distribution

- A pdf do valor extremo generalizado (GEV - Fisher-Tippett) combina as pdf's dos tipos: I (Gumbel), II (Fréchet) e III (Weibull).
- Pelo teorema de valor extremo, a GEV é a única pdf de limites possíveis de máximos adequadamente normalizados de uma sequência de V. A. independentes e distribuídas de forma idêntica.
- Uma distribuição de valor extremo não precisa necessariamente existir: isso requer condições de regularidade na cauda da distribuição. Apesar disso, a distribuição GEV é frequentemente usada como uma aproximação para modelar o valor máximo de sequências longas (finitas) de V. A.
- A forma funcional comum para as 3 distribuições foi descoberta por McFadden em 1978.¹

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_extreme_value_distribution

DISTRIBUIÇÃO GENERALIZADA DE VALOR EXTREMO

O log da função acumulada é: $\ln[F_{\mu,\sigma,\xi}(x)] = -e_{\xi}\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, com os seguintes parâmetros: μ - localização, σ - escala e ξ - forma.

O suporte dessa função é:

- $\xi > 0, x \in [\mu - \sigma/\xi, \infty)$;
 - $\xi = 0, x \in (-\infty, \infty)$;
 - $\xi < 0, x \in (-\infty, \mu - \sigma/\xi)$.
- A média vale:
- $\xi = 0, \mu + \sigma\gamma$;
 - $0 < \xi < 1, \mu + \sigma[\Gamma(1 - \xi) - 1]\xi$;
 - $\xi \geq 1, \infty$;
- aqui γ é a constante de Euler.
- A variância vale:
- $\xi = 0, \sigma^2\pi^2/6$;
 - $0 < \xi < 1/2, \sigma^2[\zeta(2 - \xi^2)]/\xi^2$;
 - $\xi \geq 1/2, \infty$.

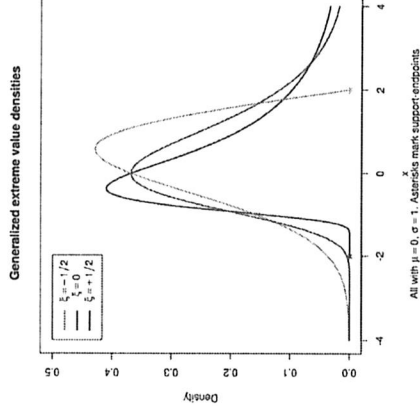
aqui $\zeta_k = \Gamma(1 - k\xi)$.

O coeficiente de assimetria vale:

- $\xi < 0, -(g_3 - 3g_1g_2 - 2g_1^3)/(g_2 - g_1)^{3/2}$;
- $0 < \xi = 0, 12\sqrt{6}\zeta(3)/\pi^3$;
- $\xi > 0, (g_3 - 3g_1g_2 - 2g_1^3)/(g_2 - g_1)^{3/2}$;

onde $\zeta(n)$ é a função zeta de Riemann

O log da função acumulada é: $\ln[F_{\mu,\sigma,\xi}(x)] = -e_{\xi}\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, com os seguintes parâmetros: μ - localização, σ - escala e ξ - forma.

TRABALHOS PUBLICADOS USANDO $\ln_{\tilde{q}}(x)$ E $e_{\tilde{q}}(x)$

- Estatística

- Arruda, T. J. ; González, R. S. ; Terçariol, C. A. S. ; Martinez, A. S. Arithmetical and geometrical means of generalized logarithmic and exponential functions: Generalized sum and product operators, Physics Letters A v. 372, 2578–2582, 2008.
- Martinez, A. S.; González, R. S. ; Terçariol, C. A. S. Generalized Probability Functions, Advances in Mathematical Physics 2009, 1–14, 2009.

• Dinâmica de Populações

- Martinez, A. S.; González, R. S. ; Terçariol, C. A. S. Continuous growth models in terms of generalized logarithm and exponential functions, *Physica A* **387**, 5679–5687, 2008.
- Martinez, A. S.; González, R. S. ; Espíndola, A. L. Generalized exponential function and discrete growth models, *Physica A* **388**, 2922–2930, 2009.
- Cabella, B. C. T. ; Martinez, A. S. ; Ribeiro, F. Data collapse, scaling functions, and analytical solutions of generalized growth models, *Physical Review. E* **83**, 061902, 2011.
- Santos, L. S. ; Cabella, B. C. T. ; Martinez, A. S. Generalized Allee effect model, *Theory in Biosciences*, **2014**, 1–8, 2014.
- dos Santos, R. V. ; Ribeiro, F. L. ; Martinez, A. S. Models for Allee effect based on physical principles, *Journal of Theoretical Biology*, **385**, 143–152, 2015.



• Processos Não-Markovianos

- Silva, R. ; de Felício, J. R. D. ; Martinez, A. S. Generalized Metropolis dynamics with a generalized master equation: An approach for time-independent and time-dependent Monte Carlo simulations of generalized spin systems, *Physical Review. E* **85**, 066707, 2012.
- Silva, R. ; Kalil, F. ; Oliveira, J. P. ; Martinez, A. S. Universality in bibliometrics *Physica A* **391**, 2119–2128, 2012.

• Aplicações Inusitadas

- Holanda, A. J. ; Pisa, I. T. ; Kinouchi, O. ; Martinez, A. S. ; Ruiz, E. E. S. Thesaurus as a complex network, *Physica A* **344**, 530–536, 2004.
- Menin, O. H. ; Rolnik, V. ; Martinez, A. S. Boundary element method and simulated annealing algorithm applied to electrical impedance tomography image reconstruction, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **35**, 1–7, 2013.
- Assirati, L. ; Martinez, A. S. ; Bruno, O. M. . Satellite classification and segmentation using non-additive entropy,



• Psicofísica/Econofísica

- Anteonodo, C. ; Tsallis, C. ; Martinez, A. S. Risk aversion in economic transactions, *Europhysics Letters* **59**, 635–641, 2002.
- Destéfano, N. ; Martinez, A. S. The additive property of the inconsistency degree in intertemporal decision making through the generalization of psychophysical laws, *Physica A* **390**, 1763–1772, 2011.
- dos Santos, L. S. ; Destéfano, N. ; Martinez, A. S. Decision making generalized by a cumulative probability weighting function, *Physica A* **490** 250–259, 2018.



$$M_f(x) = f^{-1} \left[\sum_{i=1}^R p_i f(x_i) \right]$$

com pesos $p_i \geq 0$ normalizados:

$$\sum_{i=1}^R p_i = 1 .$$

Para $f(x) = x^\beta$, com $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\bar{M}_\beta(x) = \langle \langle x \rangle \rangle_{R,\beta} = \left(\sum_{i=1}^R p_i x_i^\beta \right)^{1/\beta} = \langle x^\beta \rangle_R^{1/\beta},$$

$$M_f(x) = f^{-1} \left[\sum_{i=1}^R p_i f(x_i) \right]$$

e média:

$$\langle \clubsuit \rangle_R = \sum_{i=1}^R p_i \clubsuit_i.$$

com $p_i \geq 0$ e

$$\sum_{i=1}^R p_i = 1.$$

MÉDIA DE HÖLDER: $\bar{M}_\beta(x) = e_\beta(\langle \ln_\beta(x) \rangle_R)$

Para conjunto de dados $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, R$ e $p_i = 1/R$:

- $\beta \rightarrow -\infty$, $\bar{M}_{-\infty}(x) = \langle \langle x \rangle \rangle_{R,-\infty} = \min(x)$ menor valor;

Para $f(x) = x^\beta$, com $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\bar{M}_\beta(x) = \langle \langle x \rangle \rangle_{R,\beta} = \left(\sum_{i=1}^R p_i x_i^\beta \right)^{1/\beta} = \langle x^\beta \rangle_R^{1/\beta},$$

$$M_f(x) = f^{-1} \left[\sum_{i=1}^R p_i f(x_i) \right]$$

e média:

$$\langle \clubsuit \rangle_R = \sum_{i=1}^R p_i \clubsuit_i.$$

com $p_i \geq 0$ e

$$\sum_{i=1}^R p_i = 1.$$

Média de Höder e tranformação de Box-Cox:

$$\bar{M}_\beta(x) = \langle \langle x \rangle \rangle_{R,\beta} = \langle x^\beta \rangle^{1/\beta} = e_\beta(\langle \ln_\beta(x) \rangle_R).$$

MÉDIA DE HÖLDER: $\bar{M}_\beta(x) = e_\beta(\langle \ln_\beta(x) \rangle_R)$

Para conjunto de dados $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, R$ e $p_i = 1/R$:

- $\beta \rightarrow -\infty$, $\bar{M}_{-\infty}(x) = \langle \langle x \rangle \rangle_{R,-\infty} = \min(x)$ menor valor;
- $\beta = -1$, $\bar{M}_{-1}(x) = \langle \langle x \rangle \rangle_{R,-1} = \frac{1}{R} = \left(\sum_{i=1}^R \frac{1}{x_i} \right)^{-1}$ média harmônica;

MÉDIA DE HÖLDER: $\bar{M}_\beta(x) = e_\beta(\langle \ln_\beta(x) \rangle_R)$

Para conjunto de dados $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, R$ e $p_i = 1/R$:

- $\beta \rightarrow -\infty$, $\bar{M}_{-\infty}(x) = \langle \langle x \rangle \rangle_{R, -\infty} = \min(x)$ menor valor;
- $\beta = -1$, $\bar{M}_{-1}(x) = \langle \langle x \rangle \rangle_{R, -1} = \frac{1}{R} = \left(\sum_{i=1}^R \frac{1}{x_i} \right)^{-1}$ média harmônica;
- $\beta = 0$, $\bar{M}_0(x) = \left(\prod_{i=1}^R x_i \right)^{1/R}$, média geométrica;

MÉDIA DE HÖLDER: $\bar{M}_\beta(x) = e_\beta(\langle \ln_\beta(x) \rangle_R)$

Para conjunto de dados $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, R$ e $p_i = 1/R$:

- $\beta \rightarrow -\infty$, $\bar{M}_{-\infty}(x) = \langle \langle x \rangle \rangle_{R, -\infty} = \min(x)$ menor valor;
 - $\beta = -1$, $\bar{M}_{-1}(x) = \langle \langle x \rangle \rangle_{R, -1} = \frac{1}{R} = \left(\sum_{i=1}^R \frac{1}{x_i} \right)^{-1}$ média harmônica;
 - $\beta = 0$, $\bar{M}_0(x) = \left(\prod_{i=1}^R x_i \right)^{1/R}$, média geométrica;
 - $\beta = 1$, $\bar{M}_1(x) = \langle \langle x \rangle \rangle_{R, 1} = \langle x \rangle_R = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R x_i = \bar{x}$, média aritmética;
 - $\beta = 2$, $\bar{M}_2(x) = \langle \langle x \rangle \rangle_{R, 2} = \left(\frac{1}{R} \sum_{i=1}^R x_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle_R}$.
- A variância é: $\sigma^2 = \bar{M}_2^2(x) - \bar{M}_1^2(x) = \langle x^2 \rangle_R - \langle x \rangle_R^2$ e

MÉDIA DE HÖLDER: $\bar{M}_\beta(x) = e_\beta(\langle \ln_\beta(x) \rangle_R)$

Para conjunto de dados $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, R$ e $p_i = 1/R$:

- $\beta \rightarrow -\infty$, $\bar{M}_{-\infty}(x) = \langle \langle x \rangle \rangle_{R, -\infty} = \min(x)$ menor valor;
- $\beta = -1$, $\bar{M}_{-1}(x) = \langle \langle x \rangle \rangle_{R, -1} = \frac{1}{R} = \left(\sum_{i=1}^R \frac{1}{x_i} \right)^{-1}$ média harmônica;
- $\beta = 0$, $\bar{M}_0(x) = \left(\prod_{i=1}^R x_i \right)^{1/R}$, média geométrica;
- $\beta = 1$, $\bar{M}_1(x) = \langle \langle x \rangle \rangle_{R, 1} = \langle x \rangle_R = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R x_i = \bar{x}$, média aritmética;

MÉDIA DE HÖLDER: $\bar{M}_\beta(x) = e_\beta(\langle \ln_\beta(x) \rangle_R)$

Para conjunto de dados $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, R$ e $p_i = 1/R$:

- $\beta \rightarrow -\infty$, $\bar{M}_{-\infty}(x) = \langle \langle x \rangle \rangle_{R, -\infty} = \min(x)$ menor valor;
 - $\beta = -1$, $\bar{M}_{-1}(x) = \langle \langle x \rangle \rangle_{R, -1} = \frac{1}{R} = \left(\sum_{i=1}^R \frac{1}{x_i} \right)^{-1}$ média harmônica;
 - $\beta = 0$, $\bar{M}_0(x) = \left(\prod_{i=1}^R x_i \right)^{1/R}$, média geométrica;
 - $\beta = 1$, $\bar{M}_1(x) = \langle \langle x \rangle \rangle_{R, 1} = \langle x \rangle_R = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R x_i = \bar{x}$, média aritmética;
 - $\beta = 2$, $\bar{M}_2(x) = \langle \langle x \rangle \rangle_{R, 2} = \left(\frac{1}{R} \sum_{i=1}^R x_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle_R}$.
- A variância é: $\sigma^2 = \bar{M}_2^2(x) - \bar{M}_1^2(x) = \langle x^2 \rangle_R - \langle x \rangle_R^2$ e
- $\beta \rightarrow \infty$, $\bar{M}_\infty(x) = \langle \langle x \rangle \rangle_{R, \infty} = \max(x)$, maior valor.

$$\text{SHANNON } S_1^{(S)} = \sum_{i=1}^R p_i \ln p_i^{-1} = \left\langle \ln \left(\frac{1}{p} \right) \right\rangle_R$$

$$\text{SHANNON } S_1^{(S)} = \sum_{i=1}^R p_i \ln p_i^{-1} = \left\langle \ln \left(\frac{1}{p} \right) \right\rangle_R$$

$$\text{RÉNYI } S_\alpha^{(R)} = \ln \left(\sum_{i=1}^R p_i^\alpha \right)^{1/(1-\alpha)} = \ln \left\langle \left(\frac{1}{p} \right)^{1-\alpha} \right\rangle_R^{1/(1-\alpha)}$$

$$\text{SHANNON } S_1^{(S)} = \sum_{i=1}^R p_i \ln p_i^{-1} = \left\langle \ln \left(\frac{1}{p} \right) \right\rangle_R$$

$$\text{RÉNYI } S_\alpha^{(R)} = \ln \left(\sum_{i=1}^R p_i^\alpha \right)^{1/(1-\alpha)} = \ln \left\langle \left(\frac{1}{p} \right)^{1-\alpha} \right\rangle_R^{1/(1-\alpha)}$$

$$\text{TSALLIS } S_\alpha^{(R)} = \frac{1}{1-\alpha} \left(\sum_{i=1}^R p_i^\alpha \right) = \left\langle \ln_{1-\alpha} \left(\frac{1}{p} \right) \right\rangle_R$$

$$\text{SHANNON } S_1^{(S)} = \sum_{i=1}^R p_i \ln p_i^{-1} = \left\langle \ln \left(\frac{1}{p} \right) \right\rangle_R$$

$$\text{RÉNYI } S_\alpha^{(R)} = \ln \left(\sum_{i=1}^R p_i^\alpha \right)^{1/(1-\alpha)} = \ln \left\langle \left(\frac{1}{p} \right)^{1-\alpha} \right\rangle_R^{1/(1-\alpha)}$$

$$\text{TSALLIS } S_\alpha^{(R)} = \frac{1}{1-\alpha} \left(\sum_{i=1}^R p_i^\alpha \right) = \left\langle \ln_{1-\alpha} \left(\frac{1}{p} \right) \right\rangle_R$$

Quando $\alpha \rightarrow 1$, reencontra-se Shannon.

As diferentes entropias são convenientemente escritas em função de $1/p_i$.

O elo entre Rényi e Tsallis

$$e^{S_\alpha^{(R)}(p)} = e_{1-\alpha}[S_\alpha^{(T)}(p)] .$$

ou

$$S_\alpha^{(T)}(p) = \ln_{1-\alpha}[e^{S_\alpha^{(R)}(p)}]$$

ENTROPIAS: MEDIDAS DE DISPERSÃO DE DADOS

$$\text{SHANNON } S_1^{(S)} = \sum_{i=1}^R p_i \ln p_i^{-1} = \langle \ln \left(\frac{1}{p} \right) \rangle_R$$

$$\text{RÉNYI } S_\alpha^{(R)} = \ln \left(\sum_{i=1}^R p_i^\alpha \right)^{1/(1-\alpha)} = \ln \left\langle \left(\frac{1}{p} \right)^{1-\alpha} \right\rangle_R^{1/(1-\alpha)}$$

$$\text{TSALLIS } S_\alpha^{(R)} = \frac{1}{1-\alpha} \left(\sum_{i=1}^R p_i^\alpha \right) = \langle \ln_{1-\alpha} \left(\frac{1}{p} \right) \rangle_R$$

Quando $\alpha \rightarrow 1$, reencontra-se Shannon.

As diferentes entropias são convenientemente escritas em função de $1/p$.

O elo entre Rényi e Tsallis

$$e^{S_\alpha^{(R)}(p)} = e_{1-\alpha}[S_\alpha^{(T)}(p)].$$

ou

$$S_\alpha^{(T)}(p) = \ln_{1-\alpha}[e^{S_\alpha^{(R)}(p)}]$$

$$\text{Tsallis} = \text{Box-Cox}[\text{exponencial}(\text{Rényi})]$$

ÍNDICES DE DIVERSIDADE: SIMPSON E HILL

$$\text{SIMPSON } \lambda = \sum_{i=1}^R p_i^2$$

energia de histograma

ÍNDICES DE DIVERSIDADE: SIMPSON E HILL

$$\text{SIMPSON } \lambda = \sum_{i=1}^R p_i^2$$

$$\begin{aligned} \text{SIMPSON } \lambda &= \sum_{i=1}^R p_i^2 && \text{energia de histograma} \\ \text{HILL } D_\alpha &= \frac{1}{\bar{M}_{1-\alpha}(p)} = \bar{M}_{1-\alpha} \left(\frac{1}{p} \right) = e^{S_\alpha^{(R)}(p)} = e_{1-\alpha}[S_\alpha^{(T)}(p)], \\ &&& \text{diversidade verdadeira} \end{aligned}$$

ÍNDICES DE DIVERSIDADE: SIMPSON E HILL

SIMPSON $\lambda = \sum_{i=1}^R p_i^2$ energia de histograma

$$\text{HILL } D_\alpha = \frac{1}{\bar{M}_{1-\alpha}(\rho)} = \bar{M}_{1-\alpha} \left(\frac{1}{\rho} \right) = e^{S_\alpha^{(T)}(\rho)} = e_{1-\alpha}[S_\alpha^{(T)}(\rho)],$$

diversidade verdadeira

$$S_\alpha^{(T)}(\rho) = \ln_{1-\alpha}[D_\alpha]$$

Tsallis = Box-Cox(Hill)

SIMPSON $\lambda = \sum_{i=1}^R p_i^2$ energia de histograma

$$\text{HILL } D_\alpha = \frac{1}{\bar{M}_{1-\alpha}(\rho)} = \bar{M}_{1-\alpha} \left(\frac{1}{\rho} \right) = e^{S_\alpha^{(R)}(\rho)} = e_{1-\alpha}[S_\alpha^{(T)}(\rho)],$$

diversidade verdadeira

$$S_\alpha^{(T)}(\rho) = \ln_{1-\alpha}[D_\alpha]$$

Tsallis = Box-Cox(Hill)

Hill = exponencial(Rényi)

Em termos do índice de Simpson pode-se escrever o índice de Hill como:

$$\lambda = \frac{1}{D_2} = \frac{1}{e^{S_2^{(R)}}} = \frac{1}{e_{-1}[S_2^{(T)}]}.$$

SIMPSON $\lambda = \sum_{i=1}^R p_i^2$ energia de histograma

$$\text{HILL } D_\alpha = \frac{1}{\bar{M}_{1-\alpha}(\rho)} = \bar{M}_{1-\alpha} \left(\frac{1}{\rho} \right) = e^{S_\alpha^{(R)}(\rho)} = e_{1-\alpha}[S_\alpha^{(T)}(\rho)],$$

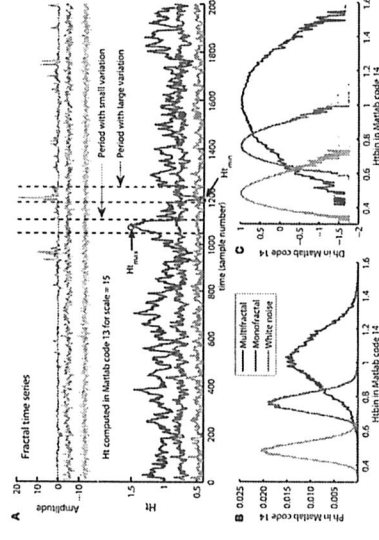
diversidade verdadeira

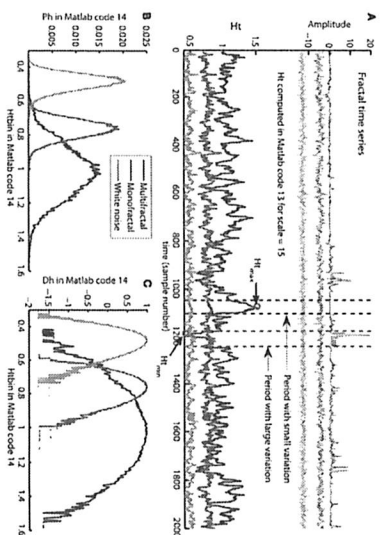
$$S_\alpha^{(T)}(\rho) = \ln_{1-\alpha}[D_\alpha]$$

Tsallis = Box-Cox(Hill)

Hill = exponencial(Rényi)

- Generalização do método de análise de flutuações sem tendência (DFA) utilizada para séries temporais monofractais.





- Generalização do método de análise de flutuações sem tendência (DFA) utilizada para séries temporais monofractais.
- Evitar detecções espúrias de correlações provenientes da não-estacionariedade e aparecem em dois tipos de séries:
 - com pdf largas e
 - correlações de longo alcance (todas as escalas).

DETRENDED FRACTAL ANALYSIS – DFA

Considere x_k é uma série de comprimento N .

- Para $i = 1, 2, \dots, N$, determine o "perfil": $Y(i) = \sum_{k=1}^i (x_k - \bar{x})$.

DETRENDED FRACTAL ANALYSIS – DFA

Considere x_k é uma série de comprimento N .

- Para $i = 1, 2, \dots, N$, determine o "perfil": $Y(i) = \sum_{k=1}^i (x_k - \bar{x})$.
- Particione o intervalo em $N_s = \lfloor N/s \rfloor$ segmentos de comprimento s . Repita o processo começando da extremidade oposta ($2N_s$ nas fórmulas).

Considere x_k é uma série de comprimento N .

- 1 Para $i = 1, 2, \dots, N$, determine o “perfil”: $Y(i) = \sum_{k=1}^i (x_k - \bar{x})$.
- 2 Particione o intervalo em $N_s = \lfloor N/s \rfloor$ segmentos de comprimento s . Repita o processo começando da extremidade oposta ($2N_s$ nas fórmulas).
- 3 Calcule a tendência local para cada um dos N_s segmentos pelo método do ajuste de mínimos quadrados das séries. Depois, calcule a variância (média de Hölder de ordem 2 para s parcelas):

$$F_s(\nu) = \langle \langle Y[(\nu - 1)s + i] - Y_s(i) \rangle \rangle_{s,2}$$

para cada segmento $\nu = 1, 2, \dots, N_s$ com $Y_s(i)$ sendo um polinômio de ajuste (linear DFA1, quadrático DFA, cúbico, etc.) no segmento ν .

- 1 Faça a média em todos os segmentos para obter a *função de flutuação de ordem q* , que é a média de Hölder de ordem q com $2N_s$ parcelas da transformação de Box-Cox da “Detrended Fractal Analysis”

$$F_q(s) = \langle \langle F_s \rangle \rangle_{2N_s, q} = \ln_q[F_q(s)] = \langle \ln_q(F_s) \rangle_{2N_s}.$$

- concisão na notação;
- caso limite $q = 0$ automático (média geométrica)

- 1 Faça a média em todos os segmentos para obter a *função de flutuação de ordem q* , que é a média de Hölder de ordem q com $2N_s$ parcelas da transformação de Box-Cox da “Detrended Fractal Analysis”

$$F_q(s) = \langle \langle F_s \rangle \rangle_{2N_s, q} = \ln_q[F_q(s)] = \langle \ln_q(F_s) \rangle_{2N_s}.$$

- concisão na notação;

- 1 Faça a média em todos os segmentos para obter a *função de flutuação de ordem q* , que é a média de Hölder de ordem q com $2N_s$ parcelas da transformação de Box-Cox da “Detrended Fractal Analysis”

$$F_q(s) = \langle \langle F_s \rangle \rangle_{2N_s, q} = \ln_q[F_q(s)] = \langle \ln_q(F_s) \rangle_{2N_s}.$$

- concisão na notação;
- caso limite $q = 0$ automático (média geométrica)
- transf. de Box-Cox da variância dos dados em torno do modelo y_ν .
- para $q = 2$, recupera-se a análise monofractal (DFA);

- Faça a média em todos os segmentos para obter a *função de flutuação de ordem q* , que é a média de Hölder de ordem q com $2N_s$ parcelas da transformação de Box-Cox da "Detrended Fractal Analysis"

$$F_q(s) = \langle \langle F_s \rangle \rangle_{2N_s, q} = \ln_q[F_q(s)] = \langle \ln_q(F_s) \rangle_{2N_s}.$$

- concisão na notação;
- caso limite $q = 0$ automático (média geométrica)
- transf. de Box-Cox da variância dos dados em torno do modelo y_v .
- para $q = 2$, recupera-se a análise monofractal (DFA);
- depende da ordem m do DFA utilizado (polinômio y_m), com $s \geq m + 2$.

LEIS GERAIS DE CRESCIMENTO

Proc. Natl. Acad. Sci. USA
Vol. 75, No. 10, pp. 6022–6027, October 1978
Applied Mathematical Sciences

Social dynamics and the quantifying of social forces
(Impulse curve/replacement and evolution/transportation)

ELIJAH W. MONTROLL

Institute for Fundamental Studies, Department of Physics, University of Indiana, Indiana, New York 14827

Contributed by Elijah W. Montroll, July 10, 1978

ABSTRACT Social and industrial evolutionary processes are considered to be a sequence of replacements or substitutions: new ideas for old, new labor patterns for old, new technologies for old. The logistic equation has often been used to describe population growth processes and replacement processes. It sometimes suffers from contradicting observational data. It is shown here that the deviations are often associated with unusual intermittent events—wars, strikes, economic panics, etc.—and that in many cases a few years after the event it can be abstracted as an instantaneous δ function impulse. After the event, the evolutionary process continues along its normal course. A formula is derived to use the observational data to determine the strength of the impulse modeling an event.

- Faça a média em todos os segmentos para obter a *função de flutuação de ordem q* , que é a média de Hölder de ordem q com $2N_s$ parcelas da transformação de Box-Cox da "Detrended Fractal Analysis"

$$F_q(s) = \langle \langle F_s \rangle \rangle_{2N_s, q} = \ln_q[F_q(s)] = \langle \ln_q(F_s) \rangle_{2N_s}.$$

- concisão na notação;
 - caso limite $q = 0$ automático (média geométrica)
 - transf. de Box-Cox da variância dos dados em torno do modelo y_v .
 - para $q = 2$, recupera-se a análise monofractal (DFA);
 - depende da ordem m do DFA utilizado (polinômio y_m), com $s \geq m + 2$.
- correlação de longo alcance em x_i , para $s \gg 1$: $F_q(s) \sim s^{h(q)}$. Se a série for estacionária $h(2)$ é o *expoente de Hurst*. $h(q)$ é chamado de *expoente de Hurst generalizado*.

LEIS GERAIS DE CRESCIMENTO

Proc. Natl. Acad. Sci. USA
Vol. 75, No. 10, pp. 6022–6027, October 1978
Applied Mathematical Sciences

Social dynamics and the quantifying of social forces
(Impulse curve/replacement and evolution/transportation)

ELIJAH W. MONTROLL

Institute for Fundamental Studies, Department of Physics, University of Indiana, Indiana, New York 14827

Contributed by Elijah W. Montroll, July 10, 1978

ABSTRACT Social and industrial evolutionary processes are considered to be a sequence of replacements or substitutions: new ideas for old, new labor patterns for old, new technologies for old. The logistic equation has often been used to describe population growth processes and replacement processes. It sometimes suffers from contradicting observational data. It is shown here that the deviations are often associated with unusual intermittent events—wars, strikes, economic panics, etc.—and that in many cases a few years after the event it can be abstracted as an instantaneous δ function impulse. After the event, the evolutionary process continues along its normal course. A formula is derived to use the observational data to determine the strength of the impulse modeling an event.

The first law of social dynamics is here chosen to have two similarly stated parts

(a) In the absence of any social, economic, or ecological force, the rate of change of the logarithm of a population, $N(t)$, of an "organism" is constant,

$$d \ln N(t) / dt = \text{constant.} \quad [1a]$$

Without the prescribed forces this equation is also postulated to be valid for the variation of the population of objects of production (automobiles, radios, etc.), and for the change in a population of a new social group.

(b) In the absence of any social, economic, or ecological force, the rate of change of the logarithm of the price of maintenance $P(t)$ (per unit time) of an "organism" is also constant

$$d \ln P(t) / dt = \text{constant.} \quad [1b]$$

In the case of objects of production, $P(t)$ is to be interpreted as a unit cost.

Social dynamics and the quantifying of social forces

(logistic curve/replacement and evolution/transportation)

ELLIOTT W. MONTIOMI

Institute for Fundamental Studies, Department of Physics, University of Rochester, Rochester, New York 14627

Contributed by Elliott W. Montiom, July 10, 1978

ABSTRACT Social and industrial evolutionary processes are considered to be a sequence of replacements or substitutions: new ideas for old, new labor patterns for old, new technologies for old. The logistic equation has often been used to describe population growth processes and replacement processes. It sometimes suffers from contradicting observational data. It is shown here that the deviations are often associated with unusual intermittent events—wars, strikes, economic panics, etc.—and that in many cases a few years after the event it can be abstracted as an instantaneous δ function impulse. After the event, the evolutionary process continues along its normal course. A formula is derived to use the observational data to determine the strength of the impulse modeling an event.

Propomos:

$$\frac{d \ln_{-q}[p(t)]}{dt} = \text{constant}.$$

The first law of social dynamics is here chosen to have two similarly stated parts
(a) In the absence of any social, economic, or ecological force, the rate of change of the logarithm of a population, $N(t)$, of an "organism" is constant,

$$d \log N(t)/dt = \text{constant}. \quad (1a)$$

Without the prescribed forces this equation is also postulated to be valid for the variation of the population of objects of production (automobiles, radios, etc.), and for the change in a population of a new social group.

(b) In the absence of any social, economic, or ecological force, the rate of change of the logarithm of the price of maintenance $P(t)$ (per unit time) of an "organism" is also constant

$$d \log P(t)/dt = \text{constant}. \quad (1b)$$

In the case of objects of production, $P(t)$ is to be interpreted as a unit cost.



APRESENTAÇÕES DE TRABALHOS

MARTINEZ, A. S.. Aplicações das funções logaritmo e exponencial generalizadas em alguns sistemas complexos. 2018. (Apresentação de Trabalho/Seminário).

- Problemas com a generalização para variáveis complexas.
 - como definir univocamente a transformada de Fourier e sua inversa.
 - Função delta de Dirac
- toda álgebra.