ALGUNS RESULTADOS SOBRE O "FORCING" DE FRAÏSSÉ — A. M. SETTE, credenciado pelo Acadêmico CHAIM S. HÖNIG — *Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP* — O método do "forcing" teve origem com os trabalhos de P. Cohen sobre a independência do axioma da escolha e da hipótese do contínuo (1963). O desenvolvimento deste método na teoria dos modelos é recente e teve início com os estudos de A. Robinson (Forcing in model theory, *Symposia Mathematica*, 5, 1970, 64-82) e R. Fraïssé (*Course of mathematical logi*, vol. 2, D. Reidel Publishing Company. A edição francesa é de 1972). Apesar de terem tido a mesma motivação, tais "forcings" diferem consideravelmente.

Fixando uma linguagem (de 1.ª ordem) L, um conjunto A de constantes, distintas das de L, e uma teoria T(em L). Robinson define indutivamente a meta-relação $P \Vdash \varphi$ (leia-se "P força φ") entre condições (i.e., entre conjuntos finitos P de sentenças atômicas ou negações de atômicas, tais que $T \cup P$ seja consistente) e sentenças φ de L(A). Com isto, é possível associar-se a cada teoria T (fixada de início) o conjunto de sentenças $T^f = \{\varphi : \varphi$ é uma sentença de L e $\varnothing \Vdash \neg\neg\varphi\}$. Mostra-se que T^f é fechado pela dedução e consistente.

Surpreendentemente, verificou-se que o operador $T \mapsto T^f$ estende o operador $T \mapsto T^*$ que a certas teorias T associa seu "companheiro semântico" T^*. A importância disto reside no fato de ser a teoria T^* o análogo formal da teoria dos corpos algebricamente fechados, no caso de ser T a teoria dos corpos.

Fraïssé parte de uma estrutura $M = \langle |M|, R_1, \dots, R_k\rangle$ e de uma linguagem L tendo como predicados os símbolos $R_1,\dots,R_k,S_1,\dots,S_n$. Uma condição (segundo Fraïssé) é um conjunto finito e consistente de sentenças de um dos seguintes tipos. $S_i(a_1,\dots,a_{n^i})$ ou $S_j(a_1,\dots,a_{n^j})$ com $i,j = 1,\dots,n$ e $a_r \in |M|$. Indutivamente, define-se as metas-relações $P \vdash_+ \varphi$ e $P \vdash_- \varphi$ (leia-se "P força(+)φ" e "P força (−)φ", respectivamente) entre condições e sentenças de L(M). Mostra-se que o conjunto $M^{S_1,\dots,S_n} = \{\varphi : \varphi$ é uma sentença de L(M) tal que nenhuma condição P força(−) φ$\}$ é fechado pela dedução e consistente. Fica, portanto, definido um operador que a cada estrutura M (e predicados $S_1,\dots,S_n$) associa a teoria $M^{S_1,\dots,S_n}$.

Numa primeira tentativa de comparar estes dois conceitos somos tentados a considerar o "operador" que a cada teoria $Th(M) = \{\varphi : M \models \varphi\}$ associa $M^{S_1,\dots,S_n}$. No entanto, como ficou provado por um aluno de Fraïssé, pode-se ter $M_0 \equiv M_1$ e $M_0^{S_1,\dots,S_n} \neq M_1^{S_1,\dots,S_n}$, ou seja, $Th(M) \mapsto M^{S_1,\dots,S_n}$ não define uma função. Por outro lado, $M^{S_1,\dots,S_n}$ é, em geral, diferente de $(Th(M))^f$. Se, no entanto, considerarmos o forcing de Robinson relativamente a $L(|M|)$ e ao conjunto $A = \varnothing$ tem-se que:

TEOREMA 1 — $M^{S_1,\dots,S_n} = (Th(M))^f$.

Um outro resultado interessante se pode obter fixando-se (no forcing de Fraïssé) uma teoria T na qual ocorrem apenas os predicados $S_1,\dots,S_n$ e exigindo-se que as condições (segundo Fraïssé) sejam consistentes com T. Neste caso, mostra-se ainda que o conjunto $\langle M,T\rangle^{S_1,\dots,S_n} = \{\varphi : \varphi$ é uma sentença de L tal que nenhuma condição força(−)φ$\}$ é fechado pela dedução e consistente. Além disto, tem-se:

TEOREMA 2 — $\langle M, T\rangle^{S_1,\dots,S_n} = Th(M) \cup T^f \cup C_{MT}$, onde C_{MT} é o conjunto de sentenças na qual ocorrem predicados R_i e S_j.

Como corolário, decorre que no caso de M se reduzir a um conjunto, i.e., $M = |M|$, tem-se $\langle M,T\rangle^{S_1,\dots,S_n} = T^f$, e se $T = \varnothing$, ou seja, no caso em que T é uma uma teoria sem axiomas não lógicos, $\langle M,T\rangle^{S_1,\dots,S_n} = M^{S_1,\dots,S_n}$. Obtemos, assim, os "forcings" de Robinson e de Fraïssé como casos particulares e extremos deste último.

O Teorema 3, que se segue, nos dá alguma informação a respeito da relação que devem satisfazer duas estruturas M_0 e M_1 a fim de que $M_0^{S_1,\dots,S_n} = M_1^{S_1,\dots,S_n}$.

DEFINIÇÃO — Um O-isomorfismo ou um isomorfismo local é uma bijeção, de um subconjunto de $|M_0|$ em um subconjunto de $|M_1|$, que preserva estrutura. Dizemos que o isomorfismo local $f : F \subset |M_0| \to E \subset |M_1|$ é um k-isomorfismo se, dado um conjunto finito $A \subset |M_0|$ ($B \subset |M_1|$), existe uma extensão $\bar{f}$ de f ($\overline{f^{-1}}$ de f^{-1}) ao conjunto $F \cup A$ ($E \cup B$) que é ainda um $(k-1)$-isomorfismo.

TEOREMA 3 — Se existe um isomorfismo local $f: M_0 \to M_1$ que é um k-isomorfismo qualquer que seja k então ... $\langle M_0,T\rangle^{S_1,\dots,S_n} = \langle M_1,T\rangle^{S_1,\dots,S_n}$ (em particular $M_0^{S_1,\dots,S_n} = M_1^{S_1,\dots,S_n}$).

COROLÁRIO 1 — Se M_0 é isomorfa a M_1 então $\langle M_0,T\rangle^{S_1,\dots,S_n} = \langle M_1,T\rangle^{S_1,\dots,S_n}$. — *(10 de maio de 1977)*.

CAMPOS DE VETORES TANGENTES A UMA FOLHEAÇÃO DE REEB EM S^3 — ELVIA MUREB SALLUM, credenciada pelo acadêmico CHAIM S. HÖNIG — *Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP* — Este trabalho é a continuação natural da nossa comunicação: "Generic properties of vector fields tangent to a Reeb foliation", *An. Acad. brasil. Ciênc.* (a aparecer), que indicaremos com [1], na busca de campos genéricos com respeito ao conjunto não errante. Indicaremos com $\chi_\sigma^r(S^3)$ o espaço dos campos de vetores de classe c^r, $r \geq 4$, na esfera S^3 tangentes a uma folheação de Reeb σ, com T^2 a folha compacta de σ e com F_p a folha que contém o ponto $p \in S^3$.

Os principais resultados apresentados aqui referem-se à demonstração de um teorema genérico do tipo G_2 (Teorema 1) e à descrição genérica do conjunto não errante num aberto de $\chi_\sigma^r(S^3)$ (Teorema 2).

DEFINIÇÃO 1 — Seja um campo $X \in \chi_\sigma^r(S^3)$. Chamaremos de *ligação de selas* a uma órbita regular γ cujos α e ω limites são pontos críticos p_1 e p_2 contidos na folha que contém γ, do tipo sela ou sela-nó para a restrição

$X|_{FP_1}$, que não é interior à variedade invariante bidimensional da selanó (ver: J. Sotomayor, *Generic one parameter families of vector fields on two dimensional manifolds*, Publications Mathématiques n.º 43, IHES, 1974, que será indicado com [2]).

Definição 2 — [2] — Chamaremos de *elementos quase genéricos* de $X \in \chi_\sigma^r(S^3)$ as órbitas periódicas (inclusive pontos críticos) quase genéricas nas respectivas folhas, as auto liga de selas p com traço $DX|_{Fp} \neq 0$ e as ligações entre selas distintas.

Teorema 1 — Existe um conjunto G_2, residual em $\chi_\sigma^r(S^3)$ de campos X tais que:

a) $X|_{T^2}$ é Morse-Smale

b) as órbitas periódicas são hiperbólicas ou quase genéricas nas respectivas folhas

c) as ligações de sela são quase genéricas

d) aparece no máximo um elemento quase genérico em cada folha

A prova do teorema acima é uma consequência de resultados de [1] e dos seguintes lemas:

Lema 1 — Dado um inteiro $m > 0$, existe um conjunto $G_2(m)$, aberto e denso em $\chi_\sigma^r(S^3)$, de campos cujas órbitas periódicas de período menor ou igual a m são hiperbólicas ou quase genéricas nas respectivas folhas e tais que cada folha contém no máximo uma órbita periódica quase genérica de período $\leqslant$ m.

Lema 2 — Dados inteiros m, $n > 0$, existe um conjunto $G_2(m,n)$, aberto e denso em $\chi_\sigma^r(S^3)$, de campos $X \in G_2(m)$ cujas ligações de selas de comprimento menor ou igual a n são elementos quase genéricos que aparecem no máximo um em cada folha onde não aparecem órbitas periódicas quase genéricas do período $\leq$ m.

Definição 3 — Seja $X \in \chi_\sigma^r(S^3)$ com uma órbita periódica $\gamma \subset T^2$ do período $\neq 0$, hiperbólica atratora para $X|_{T^2}$. Diremos que γ é do *tipo sela* se é homotópica a $\alpha_1^m \alpha_2^n$ m, n inteiros, $m \cdot n \leq 0$, $m \neq 0$ ou $n \neq 0$ onde $[\alpha_i]$ são os geradores do grupo fundamental de T^2 e a holonomia $H(\alpha_i)$ é dada por

$$\begin{cases} f_1(t) < t, & t > 0 \\ f_1(t) = t, & t \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_2(t) = t, & t \geq 0 \\ f_2(t) > t, & t < 0 \end{cases}$$

Definição 4 — (ver: Z. Nitecki and M. Schub — Filtrations, Decompositions, and Explosions — *Amer. Journal of Math.*, vol. XCVII, n.º 4, 1975). Um campo $X \in \chi_\sigma^r(S^3)$ não tem Ω-explosão se dada qualquer vizinhança U do conjunto não errante de X, Ω_X existe uma vizinhança *U* do campo X em $X_\sigma^r(S^3)$ tal que $\Omega_Y \subset U$ para todo $Y \in U$.

Teorema 2 — Seja um campo $X \in G_2$ que não apresenta órbita periódica tipo sela. Então:

1) o conjunto não errante Ω_X coincide com o fecho do conjunto das órbitas periódicas, que é uma reunião finita de círculos, esferas, toros, discos e cilindros.

2) X não tem Ω-explosão.

Seja G o aberto dos campos $X \in \chi_\sigma^r(S^3)$ tais que $X|_{T^2}$ é Morse-Smale e não tem órbita periódica tipo sela. Observamos que G é não vazio.

Corolário — O conjunto dos campos $X \in G$ que não tem Ω-explosão é denso em G.

Estes resultados fazem parte do programa de doutoramento da autora no IME-USP sob a orientação do Prof. W. M. Oliva. — *(10 de maio de 1977)*.

REDUTIBILIDADES SUBRECURSIVAS — Istvan Simon*, credenciado pelo Acadêmico Chaim S. Hönig — *Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP* — Redutibilidades subrecursivas se obtêm, em geral, de redutibilidades recursivas, impondo-se um limite superior *a priori* em algum recurso computacional, tal como tempo ou espaço, no procedimento de redução. Nós pressupomos, nesta nota, alguma familiaridade com redutibilidades recursivas que foram amplamente estudadas. (Veja por exemplo, H. Rogers, *Theory of Recursive Functions and Effetive Computability*. McGraw Hill, 1967)

De importância particular em Teoria da Computação são as redutibilidades polinomiais definidas por Ladner, Lynch e Selman (A comparison of polynomial time reducibilities, *Theoretical Computer Science*, **1**, No 2, 1975, pp. 103-123). O recurso computacional neste caso é tempo que é superiormente limitado por um polinômio no tamanho da entrada do procedimento de redução. Nesta nota trataremos de algumas propriedades destas redutibilidades.

O modelo de computação usado será a Máquina de Turing com oráculo, dispondo-se de uma fita de entrada, uma fita de saída, e um número finito positivo de fitas de trabalho. Uma das fitas de trabalho é a fita do oráculo. Uma máquina de Turing com o oráculo vazio, $\varnothing$, será designada simplesmente como uma máquina de Turing. A não ser que se especifique que a máquina é não determinística admiti-la-emos ser determinística, (Para outros pormenores e definições sobre o modelo veja H. Rogers, *op. cit.*).

Seja Σ um alfabeto finito, e Σ^* o monóide livre gerado por Σ, i.é. Σ^* é o conjunto de palavras sobre Σ. O número de símbolos de uma palavra x, denotada por $|x|$, é o comprimento de x. Entenderemos por polinômio, no que se segue, um polinômio sobre o anel dos inteiros. Um algoritmo polinomial é uma máquina de Turing que para qualquer entrada $x \in \Sigma^*$ de comprimento n pára em p(n) passos, onde p(n) é um polinô-

* Este trabalho foi feito junto ao *Departamento de Ciência da Computação Universidade Stanford, Stanford, Califórnia*, enquanto o autor encontrava-se em afastamento da *Universidade de São Paulo*.