

**UMA FUNÇÃO DE LIAPUNOV PARA UM
SISTEMA MECÂNICO, EM GERAL, NÃO CONSERVATIVO**
Mauro de Oliveira César, e
Ângelo Barone Netto

Seja o sistema

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -xf(x), \quad \ddot{y} = -yg(x) \\ f, g : U &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad 0 \in U = U^0 \subseteq \mathbb{R}, \quad f \in C^1, \quad g \in C^0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Se $x(t)$ é uma solução de $(1)_1$, então

$$\ddot{y} = -yg(x(t)) \quad (2)$$

é uma equação diferencial linear homogênea na função incógnita $y(t)$.

Estudaremos as condições de existência de

Definição: "O sistema (1) admitirá uma *integral das áreas generalizada* se existir uma aplicação

$$s : W \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (0; 0) \in W = W^0 \subseteq \mathbb{R}^2, \quad s \in C^2,$$

com $s(x; \dot{x}) \neq 0$ em pelo menos um ponto de cada vizinhança da origem $(0; 0)$, de modo que o determinante

$$V(x; \dot{x}) = \begin{vmatrix} s(x; \dot{x}) & y \\ \dot{s}(x; \dot{x}) & \dot{y} \end{vmatrix} \quad (3)$$

seja uma integral primeira de (1)."

Observações:

(a) Em (3) $\dot{s}(x; \dot{x}) = s_x(x; \dot{x})\dot{x} - xf(x)s_{x\dot{x}}(x; \dot{x})$.

(b) No caso particular em que $f = g$, a função $s(x; \dot{x}) = \dot{x}$ fornece a integral primeira $x\dot{y} - y\dot{x}$ tradicionalmente denominada **integral das áreas**.

Sabemos que uma condição necessária e suficiente para que $V(x; \dot{x})$ seja uma integral primeira de (1) é que $\dot{V}_{(1)} = 0$. Calculando-se encontra-se:

$$\left. \begin{aligned} &\dot{x}^2 s_{xx}(x; \dot{x}) + x^2 f^2(x) s_{\dot{x}\dot{x}}(x; \dot{x}) - 2x\dot{x}f(x)s_{x\dot{x}}(x; \dot{x}) + \\ &-xf(x)s_x(x; \dot{x}) - \dot{x}(f(x) + xf'(x))s_{\dot{x}}(x; \dot{x}) + g(x)s(x; \dot{x}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Portanto, uma condição necessária e suficiente para que $V(x; \dot{x})$ seja uma integral primeira de (1) é que $s(x; \dot{x})$ seja solução de (4).

O seguinte lema é de imediata demonstração:

Lema: "Se $s(x; \dot{x})$ é uma solução de (4) e $x(t)$ é uma solução de (1)₁ então $s(x(t); \dot{x}(t))$ será solução de (2)."

Neste trabalho foram demonstrados os seguintes teoremas:

Teorema 1: "Se $f(0) \neq 0$ e $g(0) \neq 0$, uma condição necessária para que a equação (4) admita solução não trivial é que $g(0) = n^2 f(0)$, $n \in \mathbb{N}$."

Considere o sistema

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -xf(x), \quad \ddot{y} = -yg(x) \\ f, g: U &\longrightarrow \mathbb{R}, 0 \in U = U^0 \subseteq \mathbb{R}, f \in C^2, g \in C^2, f(0), g(0) > 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Como $f(0) > 0$, a origem de (5)₁ é um centro. Portanto existe $\bar{x}_0 > 0$, tal que a solução de (5)₁, $x(t; x_0; 0) = x(t; x_0)$ com valores iniciais x_0 , com $0 < x_0 < \bar{x}_0$, e $\dot{x}_0 = 0$, é periódica.

Levando a solução $x(t; x_0)$ em (5)₂, obtém-se:

$$\ddot{y} = -yg(x(t; x_0)). \quad (6)$$

Sejam $y_1(t; x_0)$, $y_2(t; x_0)$ as soluções de (6) tais que $y_1(0; x_0) = 1$, $\dot{y}_1(0; x_0) = 0$, $y_2(0; x_0) = 0$ e $\dot{y}_2(0; x_0) = 1$.

Teorema 2: "Uma condição necessária e suficiente para que a equação (4) admita solução não trivial é que para todo $\bar{x}_0$, $0 < \bar{x}_0 < \bar{x}_0$, exista um intervalo $]a_0; b_0[\subseteq]0; \bar{x}_0[$ tal que $y_1(t; x_0)$ seja periódica para todo ponto $x_0 \in]a_0; b_0[$, ou $y_2(t; x_0)$ o seja."

Construção de uma função de Liapunov

Teorema 3: "Se a origem de (5) for estável existirá uma aplicação $a: W \longrightarrow \mathbb{R}$, $(0; 0) \in W = W^0 \subseteq \mathbb{R}^2$, $a \in C^0(W)$, tal que a função

$$\begin{aligned} E(x; y; \dot{x}; \dot{y}) = \\ = a(x; \dot{x})\dot{y}^2 - \dot{a}(x; \dot{x})y\dot{y} + (g(x)a(x; \dot{x}) + \frac{\dot{a}(x; \dot{x})}{2})y^2 + \frac{\dot{x}}{2} + \int_0^x \xi f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

será de Liapunov para o sistema (5)."

Observação: Neste trabalho também foi justificada a seguinte afirmação: A função de Liapunov construída no teorema 3 é uma "energia mecânica" que não é soma de cinética e potencial.

Teorema 4: "Se $g(0) \neq n^2 f(0)$ a origem de (5) é estável."

Endereço dos autores: Instituto de Matemática e Estatística - Departamento de Matemática Aplicada - Caixa Postal 20570 - São Paulo - Capital.