

STRUCTURAL OPTIMIZATION OF HYPERSTATIC REINFORCED CONCRETE BEAMS CONSIDERING THE SYSTEM RELIABILITY

Lucas da Rosa Ribeiro

André Teófilo Beck

lucasribreiro@usp.br

atbeck@sc.usp.br

São Carlos School of Engineering – University of São Paulo

Av. Trabalhador São Carlense, 400 – Parque Arnold Schmidt, 13566-590, São Paulo, Brazil

Abstract. Civil engineering structures are inevitably under uncertainties, constituted by multiple components, and also subjected to several failure modes. Thus, the design could be made considering the global system reliability, the correlation between failure modes, and also the correlation between the failure of its components, defining where it is worth spending more or less material. Thereby, a system component with little influence over the system reliability could be designed with less reliability, for instance. However, regarding reinforced concrete structures, the current Brazilian normative that guides its design presents very few techniques intending to avoid the progressive collapse. Moreover, it establishes that the structural system is obtained after the individual design of each of its structural elements, without any consideration of the system reliability. Aiming to analyze the optimal designs of usual structural systems, the Reliability Based Design Optimization (RBDO) is performed on a hyperstatic beam of reinforced concrete while considering the system reliability as a constraint. Optimal parameters are usual design variables, such as the height of the beam and the concrete compressive strength. In order to better represent the physical and geometrical nonlinearities involved, a finite element approach based on positions is used herein. The obtained optimal designs are compared to those acquired by the semi probabilistic approach proposed by the current Brazilian normative. Results of a preliminary example shows that the RBDO leads to a more economical results while maintaining the desired target reliability.

Keywords: Beams, Reinforced concrete, Structural optimization, System reliability, Uncertainties

1 Introdução

No âmbito das estruturas em concreto armado, a norma brasileira ABNT NBR 6118 [1] apresenta poucas medidas com o intuito de evitar o colapso estrutural após uma falha inicial de menor proporção, assim como estabelece um dimensionamento que desconsidera a segurança do sistema como um todo.

Petroski [2] afirma que evitar falhas é uma das principais metas de um projetista, sendo dever deste considerar todos os modos de falha possíveis. Desta forma, Beck et al [3] afirmam que o dimensionamento estrutural poderia ser realizado com base na correlação entre os vários modos de falha do sistema, assim como na correlação entre a falha de seus elementos constituintes. Um elemento de um sistema que tenha pouca influência na falha da estrutura, por exemplo, poderia ser dimensionado com confiabilidade menor.

Conforme o item 17.2.2 da ABNT NBR 6118 [1], elementos lineares em concreto armado são dimensionados com base nos domínios de deformação da seção transversal, ilustrados na figura 1. Tais domínios consistem da distribuição das deformações em uma seção transversal quando o estado limite último (ELU) é alcançado.

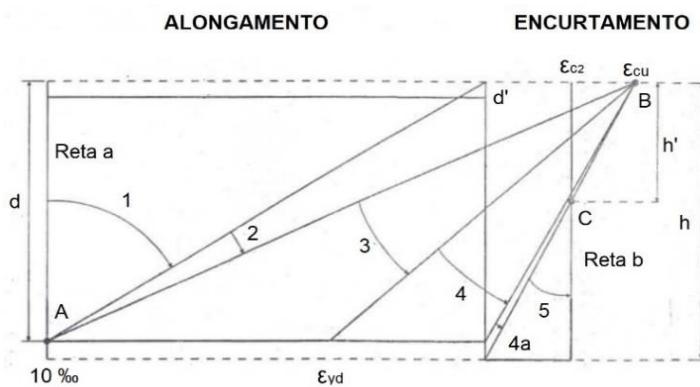


Figura 1. Domínio de deformação no ELU para qualquer classe de concreto (adaptado da Figura 17.1 da ABNT NBR 6118 [1])

Considerando vigas, o item 17.2.3 da referida norma estabelece que devem ser garantidas boas condições de ductilidade no ELU, tal que a seção resulte ou no domínio 2 (ruptura por deformação plástica excessiva do aço e sem esmagamento do concreto) ou, preferencialmente, no domínio 3 (ruptura por esmagamento do concreto e com escoamento do aço).

Tal ruptura dúctil em seções transversais críticas caracteriza a formação de rótulas plásticas. Falhas locais por rótulas plásticas são preferíveis se comparado a falhas frágeis que eliminam imediatamente a seção rompida, posto que a mesma continuará exercendo alguma função portante caso a estrutura seja inicialmente hiperestática.

Segundo Nogueira [4], as estruturas hiperestáticas são mais seguras pelo fato de ser possível a redistribuição de esforços após uma falha inicial. Estruturas isostáticas falham pela ruptura de um único elemento, ao passo que as hiperestáticas falham somente após a ruptura de uma quantia suficiente de membros.

Ademais, a ABNT NBR 8681 [5] estabelece um método semiprobabilístico visando à garantia de segurança, regendo que nos projetos estruturais devem ser utilizados coeficientes de segurança tanto na majoração das variáveis de solicitação como na minoração de variáveis de resistência. Tais coeficientes proporcionam uma redundância tanto ativa como passiva nas estruturas hiperestáticas, ao passo que às isostáticas se incorpora apenas redundância ativa (BECK [6]).

Apesar das normativas nacionais constarem com procedimentos que indiretamente atuem na prevenção da falha do sistema, tal nível de segurança não necessariamente é satisfatório se forem consideradas as gravíssimas consequências associadas a falha global de uma estrutura.

Considerando os padrões norte-americanos, Dos Anjos [7] constatou, com base em uma análise determinística, que o dimensionamento de um edifício em concreto armado com 12 pavimentos

realizado segundo as normativas nacionais resultou em sérios riscos da estrutura apresentar colapso progressivo segundo os critérios de verificação do *General Services Administration GSA* [8]. Porém, ao adotar quantia e disposição de armaduras maiores que o obtido pelas normativas nacionais, foi possível enquadrar a edificação nos limites estipulados pela norma norte-americana.

Percebe-se que as normativas nacionais de dimensionamento de estruturas em concreto armado são consideravelmente vagas e limitadas quanto à confiabilidade de sistemas. Portanto, este artigo visa comparar e analisar uma configuração de projeto de viga obtida por norma com aquelas obtidas via otimização estrutural considerando incertezas.

2 Formulação

2.1 RBDO

A *Reliability Based Design Optimization* (RBDO) consiste em determinar o valor ótimo de um vetor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_{DV}}$, com quantidade n_{DV} de variáveis de projeto, que minimize uma função objetivo $f(\mathbf{d})$ sujeita à restrições de projeto dadas por probabilidades de falha alvo p_{fT} , assim como de condições laterais $\mathbf{d} \in (\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_{\min}, \mathbf{d}_{\max}\})$. Considerando uma única restrição em termos da probabilidade de falha admissível do sistema p_{fSYS} , a formulação RBDO é dada pela Eq. 1:

$$\begin{aligned} &\text{determinar: } \mathbf{d}^* & (1) \\ &\text{que minimize: } f(\mathbf{d}) \\ &\text{sujeito à: } p_{fSYS}(\mathbf{d}) \leq p_{fT_{SYS}} \\ &\quad \mathbf{d} \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

Geralmente a função objetivo de problemas RBDO diz respeito ao volume de elementos estruturais e custos de fabricação. Desta forma, a RBDO gera como resposta uma configuração estrutural ótima em termos mecânicos que mantenha o nível de segurança desejado.

Conforme mostrado por Beck e Gomes [9], diferentes modos de falha podem competir entre si caso a confiabilidade do sistema seja considerada como restrição. Isto permite, por exemplo, que os elementos associados a modos de falha dominantes sejam associados a uma confiabilidade maior.

Um aspecto negativo da RBDO é o fato de não ser considerado o balanço entre economia e segurança, posto que custos não são incluídos nas restrições, mas apenas índices de confiabilidade alvo. Ademais, a probabilidade de falha indicada na Eq. (1) deve ser avaliada mediante alguma técnica específica, tal como FORM ou simulação de Monte Carlo.

De modo geral, a probabilidade de falha do sistema P_{fSYS} é dada pela Eq. (2), onde Ω_{fSYS} é o domínio de falha do sistema com k caminhos de falha distintos, cada qual com i falhas elementares.:

$$p_{fSYS} = \int_{\Omega_{fSYS}} f_X(\mathbf{d}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\cup_k [\cap_{i \in C_k} (g_i(\mathbf{x}) \leq 0)]} f_X(\mathbf{d}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2)$$

2.2 Algoritmo de Otimização FA

Proposto por Yang [10], o *Firefly Algorithm* (FA) é um algoritmo meta heurístico que se fundamenta no comportamento dos vagalumes na natureza. Considera-se que todos os vagalumes são atraídos independente do seu sexo, que a atratividade de um vagalume é proporcional ao seu brilho, e que os brilhos dos vagalumes são definidos pela função objetivo.

Como este trabalho busca a minimização de uma função objetivo, o vagalume de maior brilho está associado ao menor valor de tal função, desde que respeitadas a restrição em probabilidades. O descumprimento da referida restrição acarreta na penalização do brilho do vagalume.

Tal algoritmo é capaz de convergir tanto para mínimos locais como para o mínimo global. Para garantir a obtenção do mínimo global é necessário garantir um número suficiente de vagalumes e de

iterações. Está indicado na figura 2 o fluxograma do FA.

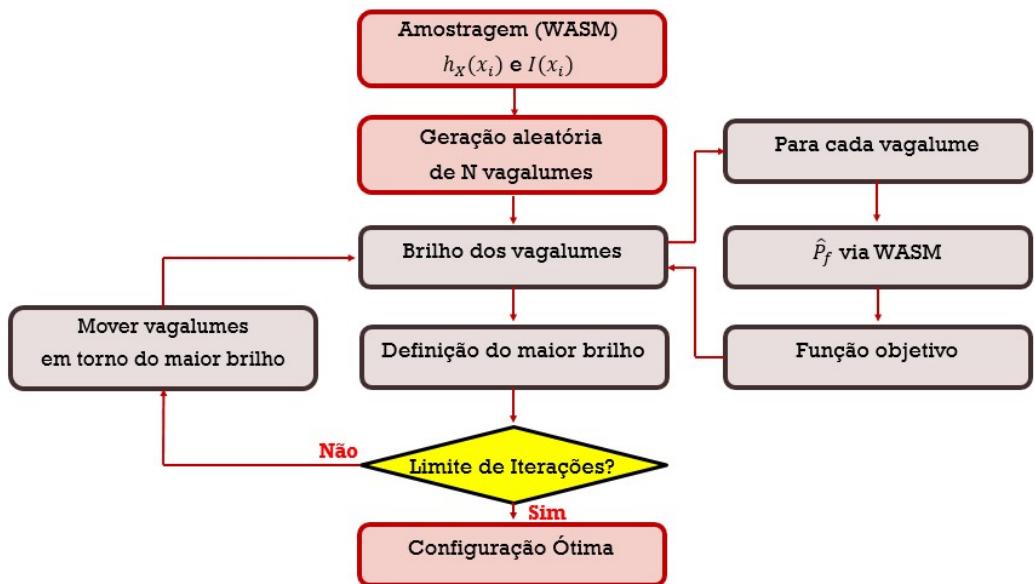


Figura 2. Fluxograma do algoritmo FA

2.3 WASM

Proposta por Okasha [11], a *Weighted Average Simulation Method* (WASM) se fundamenta na geração de amostras uniformemente distribuídas em um domínio previamente definido e na posterior avaliação da probabilidade de falha a partir do peso e da função indicadora de cada amostra.

A função de amostragem $h_X(x_i)$ adotada possui distribuição uniforme e, consequentemente, valor constante sobre seu domínio. A probabilidade de falha estimada $\hat{P}_f(d)$ é obtida em termos da função indicadora $I(x_i)$ e do peso amostral, o qual é definido pela razão entre a distribuição de densidade de probabilidade $f_X(d, x_i)$ das variáveis aleatórias envolvidas e a distribuição de densidade de probabilidade $h_X(x_i)$ usada na geração das amostras, conforme Eq. (3)

$$\hat{P}_f(d) = \sum_{i=1}^{n_s} \frac{I(x_i) \cdot f_X(d, x_i)}{h_X(x_i)} \quad (3)$$

Percebe-se que apenas $f_X(d, x_i)$ é variável com a configuração de projeto. Isto permite que uma única amostragem possa ser considerada para todo o processo de otimização e, consequentemente, garante-se uma única avaliação da função indicadora. Tal medida reduz substancialmente o custo computacional, sobretudo quando a função indicadora é definida mediante um modelo não linear em elementos finitos. No entanto esta vantagem só é possível para variáveis aleatórias de projeto.

Assim, para cada novo vagalume que represente a média de uma variável aleatória, recalcula-se o valor de $f_X(d, x_i)$ e, em seguida, $\hat{P}_f(d)$. Caso este valor seja maior que uma probabilidade de falha admissível, aplica-se uma penalização na função objetivo do vagalume em questão.

2.4 Elemento Finito de Pórtico Laminado 2D

Para representar adequadamente o comportamento mecânico de elementos lineares em concreto armado, empregou-se elementos finitos de pórtico laminado 2D com 3 graus de liberdade por nó. Estructuras reticuladas reais são sólidos, porém modelar tais peças com elementos finitos sólidos exigiria um número muito maior de graus de liberdade, maior custo computacional e acarretaria em pouco impacto aos objetivos deste trabalho.

Os graus de liberdade consistem das translações nas direções vertical e horizontal, assim como do giro das seções transversais. Diferente da cinemática de Euler Bernoulli, a rotação da seção não é a derivada do deslocamento vertical em relação ao eixo horizontal. A cinemática adotada é, portanto, a de Reissner-Mindlin, na qual se assume que as seções planas do elemento laminado permanecem planas, porém não necessariamente ortogonais ao eixo do elemento após a deformação. Tal característica é de grande interesse em peças onde o cisalhamento exerce grande influência (CODA e PACCOLA [12]).

Quanto aos elementos desenvolvidos, estes possuem seções transversais definidas por lâminas, as quais podem ser referentes a diferentes materiais e espessuras. Isto permite uma representação simplificada, porém satisfatória, de peças de concreto armado.

Ressalta-se que um modelo não linear geométrico para peças em concreto armado é exagerado para a maior parte das situações práticas. No entanto, a falha última da estrutura por formação de róbulos plásticas pode ser identificada a partir de mudanças bruscas de configuração após a perda de suas capacidades de rotação, justificando a formulação adotada.

O método requer, inicialmente, que seja realizado o mapeamento das configurações inicial e atual para que seja possível determinar deformações, tensões e as forças internas dos elementos. O mapeamento da configuração inicial é realizado mediante a inclusão de um espaço adimensional, com aproximação por polinômios de Lagrange e com relação à linha de referência da peça, conforme ilustrado na figura 3.

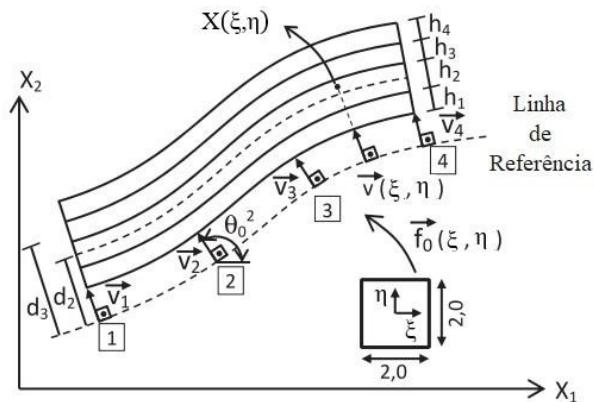


Figura 3. Mapeamento da configuração inicial – Adaptado de Coda e Paccola [12]

A configuração atual (figura 4) também é dada em função das posições e dos ângulos referentes aos nós do elemento, porém tais valores são as incógnitas do problema e, consequentemente, não são conhecidos a priori. Sua determinação é realizada pelo método de Newton-Raphson, no qual se busca a posição de equilíbrio mediante o balanço entre as forças internas e externas da estrutura.

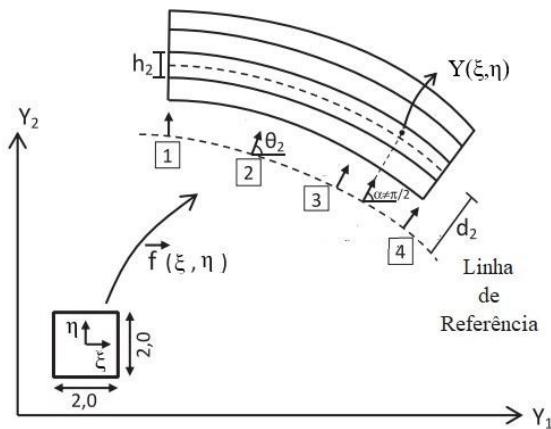


Figura 4. Mapeamento da configuração atual – Adaptado de Coda e Paccola [12]

As medidas geométricas das lâminas (espessura e largura) são mantidas constantes, de modo que uma lei constitutiva simplificada com coeficiente de Poisson nulo evita problemas de travamento volumétrico na cinemática adotada.

Partindo dos mapeamentos das configurações inicial e atual, é possível descrever a mudança de configuração do corpo tal como indicado na figura 5.

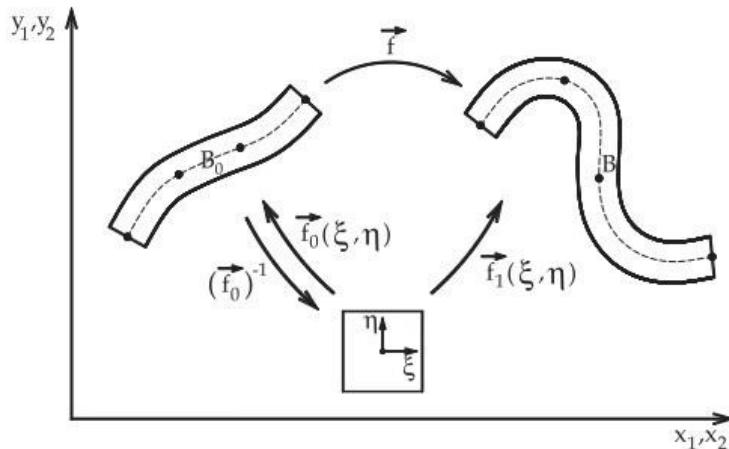


Figura 5. Mudança de configuração – Fonte: Coda e Paccola [12]

A função mudança de configuração \vec{f} pode ser escrita mediante a composição dos mapeamentos das configurações inicial e corrente, conforme apresentado na Eq. (4).

$$\vec{f} = \vec{f}_1 \circ (\vec{f}_0)^{-1} \quad (4)$$

O gradiente A da função mudança de configuração, que nesta formulação consiste de uma matriz numérica 2x2, deve ser conhecido para que seja possível escrever a energia específica de deformação decorrente de \vec{f} . Tal gradiente é definido a partir dos gradientes dos mapeamentos \vec{f}_0 e \vec{f}_1 :

$$A = A^1 \cdot (A^0)^{-1} \quad (5)$$

Onde o gradiente do mapeamento \vec{f}_0 é dado por:

$$A_{ij}^0 = \begin{bmatrix} \left\{ \phi_{l,1} X_{1l} - \left(d^{lam} + \frac{h^{lam}}{2} \eta \right) \sin(\phi_k \theta_k^0) (\phi_{z,1} \theta_z^0) \right\} & \left\{ \frac{h^{lam}}{2} \cos(\phi_l \theta_l^0) \right\} \\ \left\{ \phi_{l,1} X_{2l} - \left(d^{lam} + \frac{h^{lam}}{2} \eta \right) \cos(\phi_k \theta_k^0) (\phi_{z,1} \theta_z^0) \right\} & \left\{ \frac{h^{lam}}{2} \sin(\phi_l \theta_l^0) \right\} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Similarmente, o gradiente do mapeamento \vec{f}_1 é dado por:

$$A_{ij}^1 = \begin{bmatrix} \left\{ \phi_{l,1} Y_{1l} - \left(d^{lam} + \frac{h^{lam}}{2} \eta \right) \sin(\phi_k \theta_k) (\phi_{z,1} \theta_z) \right\} & \left\{ \frac{h^{lam}}{2} \cos(\phi_l \theta_l) \right\} \\ \left\{ \phi_{l,1} Y_{2l} - \left(d^{lam} + \frac{h^{lam}}{2} \eta \right) \cos(\phi_k \theta_k) (\phi_{z,1} \theta_z) \right\} & \left\{ \frac{h^{lam}}{2} \sin(\phi_l \theta_l) \right\} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Quanto à energia interna de deformação, a Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff é usada para relacionar a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie S com a deformação de Green-Lagrange E . Tais parâmetros tem simples implementação e atendem satisfatoriamente o problema na presença de pequenas deformações. A deformação de Green-Lagrange é dada por:

$$E = \frac{1}{2}(A^T \cdot A - I) \quad (8)$$

Onde I é o tensor identidade de segunda ordem. A Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff relaciona E e S por:

$$u_e = \frac{K}{2}(E_{11}^2 + E_{22}^2) + G(E_{12}^2 + E_{21}^2) \quad (9)$$

Onde K é o módulo de elasticidade longitudinal, $G = K/[2(1 + \nu)]$ é o módulo de elasticidade transversal e ν é o coeficiente de Poisson. No entanto, uma simplificação reside no fato de se aceitar qualquer valor de K e G , mesmo com a consideração de ν igual a zero para evitar problemas de travamento volumétrico.

A energia de deformação acumulada em um elemento finito é obtida mediante a integral sobre o volume inicial da energia específica de deformação u_e . Tal integral é realizada no código computacional via quadratura de Gauss nas direções longitudinal e transversal:

$$U_e = \sum_{i_g=1}^{ng\xi} \sum_{j_g=1}^{ng\eta} u_e(\xi_{i_g}, \eta_{j_g}) w_{i_g} w_{j_g} \det(A^0) b^{lam} \quad (10)$$

Pelo fato de U_e ser função das posições nodais e angulares das seções transversais, a derivada da energia de deformação acumulada segundo as componentes de posição ou giro resultam, respectivamente, nas componentes de forças internas:

$$F_{il}^{int} = \frac{\partial U_e}{\partial Y_{il}} = \sum_{i_g=1}^{ng\xi} \sum_{j_g=1}^{ng\eta} \frac{\partial u_e(\xi_{i_g}, \eta_{j_g})}{\partial Y_{il}} w_{i_g} w_{j_g} J_0(\xi_{i_g}, \eta_{j_g}) \quad (11)$$

Já o potencial das forças externas \mathbb{P} em um elemento de pórtico plano é definido a partir das forças concentradas e distribuídas, sendo definido formalmente por:

$$\mathbb{P} = -F_{ik} Y_{ik} - \int_{-1}^1 q_i(\xi) y_i^m(\xi) \sqrt{T_{i(k)} T_{i(k)}} d\xi \quad (12)$$

O vetor de forças externas F_{il}^{ext} , obtido mediante a derivada de \mathbb{P} em relação às componentes de posição ou giro, é dado por:

$$F_{il}^{ext} = -F_{il} - \sum_{i_g=1}^{ng} (\phi_k(\xi_{i_g}) q_{ik}) \phi_l(\xi_{i_g}) J^m(\xi_{i_g}) w_{i_g} \quad (13)$$

2.5 Não Linearidade Física

Para representar de forma adequada o comportamento do aço e do concreto, a não linearidade física também foi contemplada. O concreto e o aço das armaduras possuem comportamentos muito distintos. Enquanto o concreto é um material quase frágil altamente resistente à compressão e de baixa resistência à tração, o aço é elastoplástico e com resistências à compressão e à tração muito semelhantes.

Ao concreto foi adotado o modelo de dano de Mazars, pois este é simples e suficientemente adequado ao problema analisado. Já às armaduras passivas foi adotado um modelo elastoplástico perfeito uniaxial.

O Modelo de Dano de Mazars visa representar a degradação mecânica do concreto considerando as seguintes hipóteses: comportamento mecânico elástico durante a evolução da degradação; evolução

do dano devido apenas à alongamentos; dano isótropo; dano representado localmente por uma variável que assume valores de 0 (material íntegro) a 1 (material totalmente degradado); a evolução do dano ocorre quando a deformação equivalente supera um valor limite de alongamento (MAZARS [13]).

Pelo fato de representar a evolução do dano ao longo de todo um elemento finito, este é um modelo de dano do tipo contínuo. Similar aos demais modelos desta categoria, este procedimento consiste em representar a degradação mediante a penalização da rigidez no ponto sob análise. Embora a degradação seja fruto da evolução de microdefeitos no interior do elemento, a penalização é feita de forma homogênea.

Quanto ao aço, embora a adoção de elementos finitos laminados permita a adoção de um modelo elastoplástico biaxial às armaduras, o fato destas serem representadas sempre com uma espessura muito inferior ao comprimento torna pouco expressivas as tensões e deformações que não estejam ao longo da direção longitudinal. Assim sendo, um modelo uniaxial é suficiente.

3 Problema proposto

Em vista do proposto neste artigo, realizou-se a busca pela minimização da altura e, em um segundo momento, da resistência média à compressão do concreto de uma viga biengastada em concreto armado de seção retangular sujeita a um carregamento aleatório. A técnica de otimização empregada é a RBDO, onde uma única restrição em termos da probabilidade de falha do sistema é considerada.

Inicialmente se realizou o dimensionamento da viga para um determinado carregamento conforme preconizam as diretrizes da ABNT NBR 6118 [1]. Em seguida realizou-se a otimização estrutural da viga considerando o mesmo carregamento, porém sujeito a incertezas na sua intensidade.

3.1 Dimensionamento

Modelos de viga contínua com apoios simples foram muito empregados no passado na representação de vigas. Atualmente, o item 14.6.6.1 da ABNT NBR 6118 [1] ainda permite o uso deste modelo clássico, desde que se considere um cálculo exato da influência da ligação monolítica entre pilares e viga ou que, no mínimo, se considerem engastes elásticos relacionados a momentos fletores pré-definidos nos apoios extremos. Tendo em vista o objetivo didático deste trabalho, a viga biengastada com apoios totalmente rígidos foi aqui considerada para representar a estrutura hiperestática.

As armaduras longitudinais foram dimensionadas considerando um carregamento imposto igual a 74 kN/m somado ao peso próprio. Adotou-se apenas a disposição de armadura simples nas seções críticas, assim como foi buscado situar as seções críticas para falharem segundo as premissas dos domínios 2 ou, preferencialmente, 3. Desta forma, garante-se que a ruptura caracterize a formação de rótula plástica. Na tabela 1 se encontra o resumo do dimensionamento das seções críticas da viga.

Tabela 1. Resumo do dimensionamento

Seção	M_{sd} (kNm)	b (cm)	h (cm)	d (cm)	$\beta_x = \frac{x}{d}$	Domínio	$A_{s,calc}$ (cm ²)	$A_{s,min}$ (cm ²)	A_s (cm ²)
Apoios	7927,5	20	30	25	0,42	3	8,879	1,226	9,0
Meio do Vão	3963,75	20	30	27	0,18	2	3,964	1,095	4,0

Considerando a viga como pertencente à edificações tipo 2 (tabela 2 da ABNT NBR 8681 [5]), ou seja, sujeitas à cargas accidentais que não superam 5 kN/m², o carregamento de cálculo teve as parcelas de carga permanente e acidental multiplicadas pelo mesmo coeficiente de majoração $\gamma = 1,40$.

Quanto à agressividade do ambiente, adotou-se Classe de Agressividade Ambiental I com base na observação ‘a’ presente na tabela 6.1 da ABNT NBR 6118 [1] a qual, de acordo com a tabela 7.2 da referida norma, está associada à espessura de cobrimento igual a 25 mm.

A tabela 7.1 da mesma norma estabelece que a mínima classe de concreto a ser usada à classe de agressividade definida é o C20. No entanto, por ser empregado um concreto de classe superior, reduziu-se o cobrimento nominal ao valor de 20 mm, conforme observação imediatamente após a tabela 7.2 da ABNT NBR 6118 [1].

Na figura 6 estão indicados o diagrama de momento fletor com os valores adotados no dimensionamento, assim como uma representação das armaduras e seções transversais obtidos.

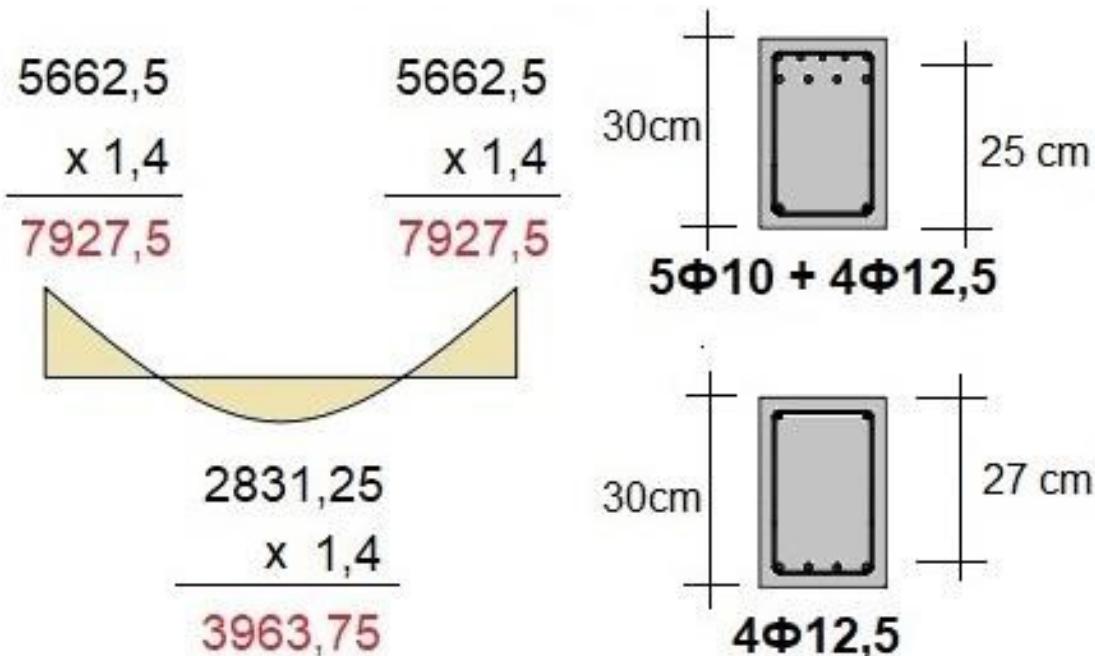


Figura 6. Diagrama de momento fletor e seções transversais apóis dimensionamento

Os materiais adotados são o concreto com f_{ck} igual a 40 MPa (C40) e armaduras de aço CA-50 os quais, segundo tabela 12.1 da ABNT NBR 6118 (2014), estão associados aos coeficientes de minoração de resistência no ELU iguais a $\gamma_c = 1,40$ e $\gamma_s = 1,15$, respectivamente (considerando combinações normais).

Antes do dimensionamento a altura útil d foi considerada igual a 25 cm às seções do apoio e 27 cm ao meio do vão. Após o dimensionamento houve a verificação da altura útil resultante da disposição de armaduras adotada, onde se constatou que os valores obtidos foram satisfatoriamente próximos aos inicialmente adotados (25,25 cm e 26,875 cm, respectivamente).

Também houve o cuidado para que a posição da linha neutra resultasse nos domínios 2 ou 3, assim como abaixo do valor limite $x = 0,45d$ imposto no item 14.6.4.3 da ABNT NBR 6118 [1]. Tal valor limite foi respeitado em todas as situações, porém apenas na seção central não foi possível situá-la no domínio 3. Isto não afeta o desenvolvimento do trabalho, uma vez que a falha no domínio 2 (dúctil) também caracteriza a formação de rótula plástica.

Após o dimensionamento das armaduras longitudinais verificou-se a disposição das mesmas em suas respectivas seções, constatando que os espaçamentos entre barras são aceitáveis. As armaduras transversais não foram dimensionadas, tendo sido adotado $\phi_T = 0,5$ cm nas verificações supracitadas.

3.2 Discretização

Em vista da simetria do problema proposto, considerou-se metade da viga nas análises estáticas realizadas, conforme indicado na figura 7. Para representar a seção transversal foram empregadas 11 lâminas, onde aquelas referentes ao aço possuem área equivalente à área de aço da camada em questão.

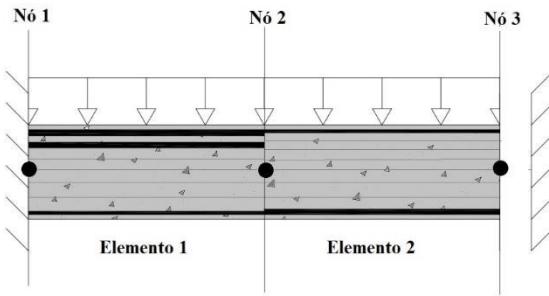


Figura 7. Discretização da viga

Foram adotados 3 nós e 2 elementos finitos com grau de aproximação igual a 7, garantindo-se a geração automática de 6 nós adicionais no interior dos elementos. Empregaram-se 7 pontos de integração na direção longitudinal e 5 para cada lámina na direção transversal.

Manteve-se uma taxa de armadura constante e igual a obtida no dimensionamento. Desta forma, para cada valor de altura candidato à valor ótimo haverá uma área de aço distinta nos locais onde a seção é tracionada. As espessuras de tais camadas de aço são definidas automaticamente para cada amostra de altura, assim como das demais láminas de concreto.

Durante a otimização da altura, adotou-se $f_{ck} = 40$ MPa e, consequentemente, $E = 35.0$ GPa, $v = 0,2$ e $G = 14.583$ GPa. Já na otimização simultânea da altura e da resistência média do concreto à compressão f_{cm} , a relação entre f_{cm} e f_{ck} é aqui considerada mediante um fator BIAS igual a 1,16. Tal fator é um valor médio dentre aqueles definidos por Santiago e Beck [14] para concretos nacionais. Deste modo, o f_{ck} e os módulos de elasticidade do concreto passam a ser definidos a partir do f_{cm} que está sendo otimizado. O cov adotado ao f_{cm} é constante e igual a 0.11. A Eq. (14) demonstra a relação entre f_{cm} e f_{ck} .

$$f_{ck} = f_{cm}/BIAS \quad (14)$$

Os parâmetros referentes à não linearidade física do concreto são $\varepsilon_{d0} = 0.0007$, $A_T = 0.995$, $B_T = 8000$, $A_C = 0.85$ e $B_C = 1620$. Já ao aço foram utilizados $E = 210$ GPa, $G = 105$ GPa e tensão de escoamento σ_Y igual a 500 MPa.

A carga uniformemente distribuída foi considerada como variável aleatória de distribuição lognormal, com média igual a 74 kN/m e desvio padrão igual a 11 kN/m (cov = 14.9% - primeiro caso da otimização da altura) ou a 20 kN/m (cov = 27.0% - segundo caso da otimização da altura). Na otimização conjunta da altura e da f_{cm} , empregou-se desvio padrão igual a 11 kN/m.

Percebe-se que a média do carregamento aplicado corresponde ao mesmo valor adotado no dimensionamento da viga. Ademais, para cada amostra de carregamento soma-se uma parcela referente ao peso próprio. Tal parcela também é variável, sendo dependente da altura amostrada.

Na verificação da função indicadora de cada amostra o carregamento foi decomposto em 100 passos de carga, garantindo-se uma representação fidedigna do comportamento não linear dos materiais envolvidos.

A verificação de falha ocorre por formação de rótulas plásticas nas seções situadas nas proximidades dos nós 1 e 3. Uma rótula plástica é obtida em uma dada seção quando se observa a plastificação do concreto comprimido ($\varepsilon_{c2} = -0.2\%$) e o escoamento do aço tracionado. Deste modo, uma equação de estado limite elementar é dada por Eq. (15), onde ε_{lim} é a deformação limite de plastificação do material e ε_S é a deformação verificada.

$$g(d, x) = \varepsilon_{lim} - \varepsilon_S \quad (15)$$

A formação da segunda rótula plástica seguida da sua perda de capacidade de rotação forma mecanismo, acarretando na instabilidade da estrutura e, consequentemente, em uma matriz hessiana singular. Desta forma, tanto a formação da segunda rótula plástica como a verificação de instabilidade estrutural levam à interrupção da análise estática e atribuição de falha à amostra analisada.

4 Resultados

4.1 Uma variável de projeto

A otimização da altura resultou nos valores ótimos indicados na tabela 2. Adotaram-se 100 vagalumes, 2000 amostras e um índice de confiabilidade alvo $\beta_T = 4.00$. A função objetivo a ser minimizada é a própria altura da viga.

Tabela 2. Configuração ótima para otimização da altura

Caso	COV do carregamento	Altura ótima (cm)
1	14,9 %	30.07
2	27,0 %	35.57

Percebe-se que o aumento na incerteza do carregamento acarreta em um aumento na altura ótima da viga para garantir um mesmo nível de segurança. Tal resultado condiz com o fato de que o aumento das incertezas eleva a probabilidade de falha do sistema, exigindo dimensões superiores para garantir um determinado nível de segurança.

Os valores de projeto apresentados consistem da média dos valores ótimos de 10 simulações. Nas figuras 8 e 9 estão indicados os gráficos de convergência de todas as simulações realizadas para os casos 1 e 2, respectivamente.

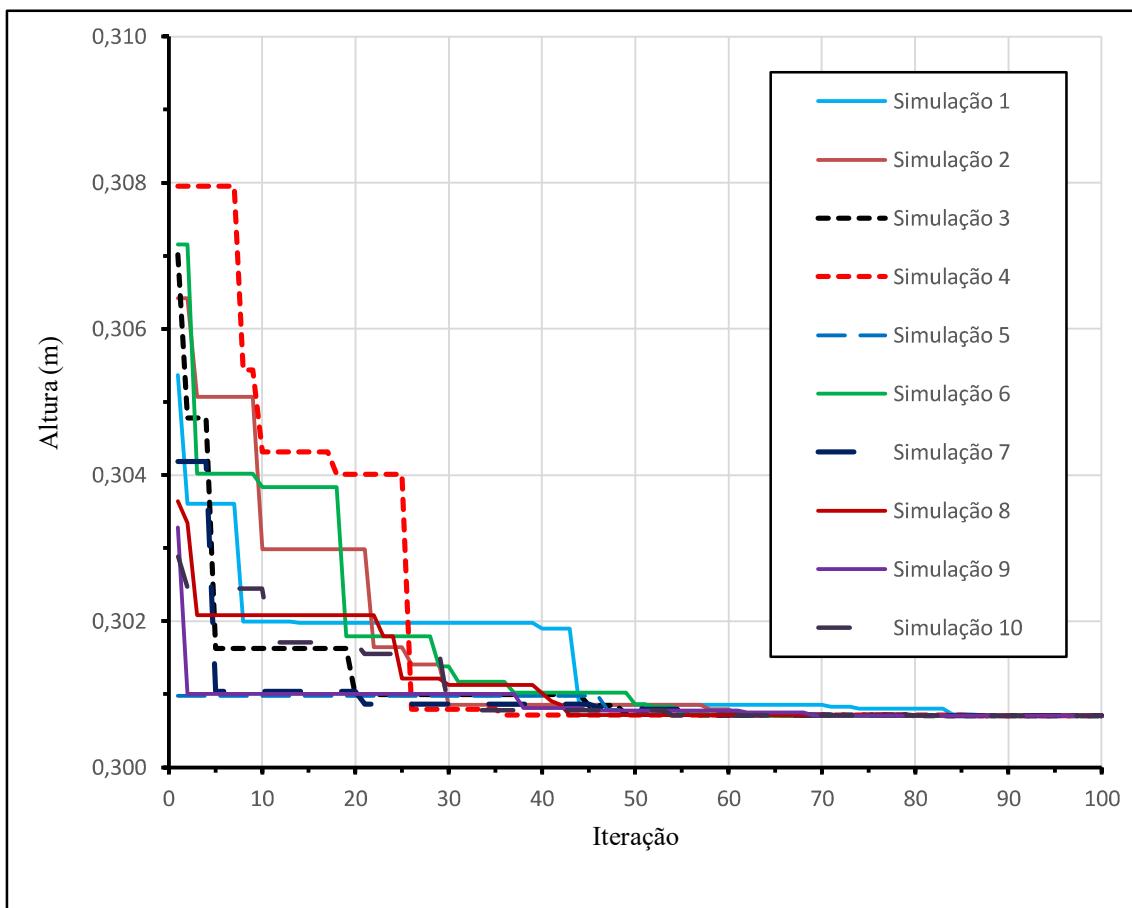


Figura 8. Convergência das simulações do caso 1

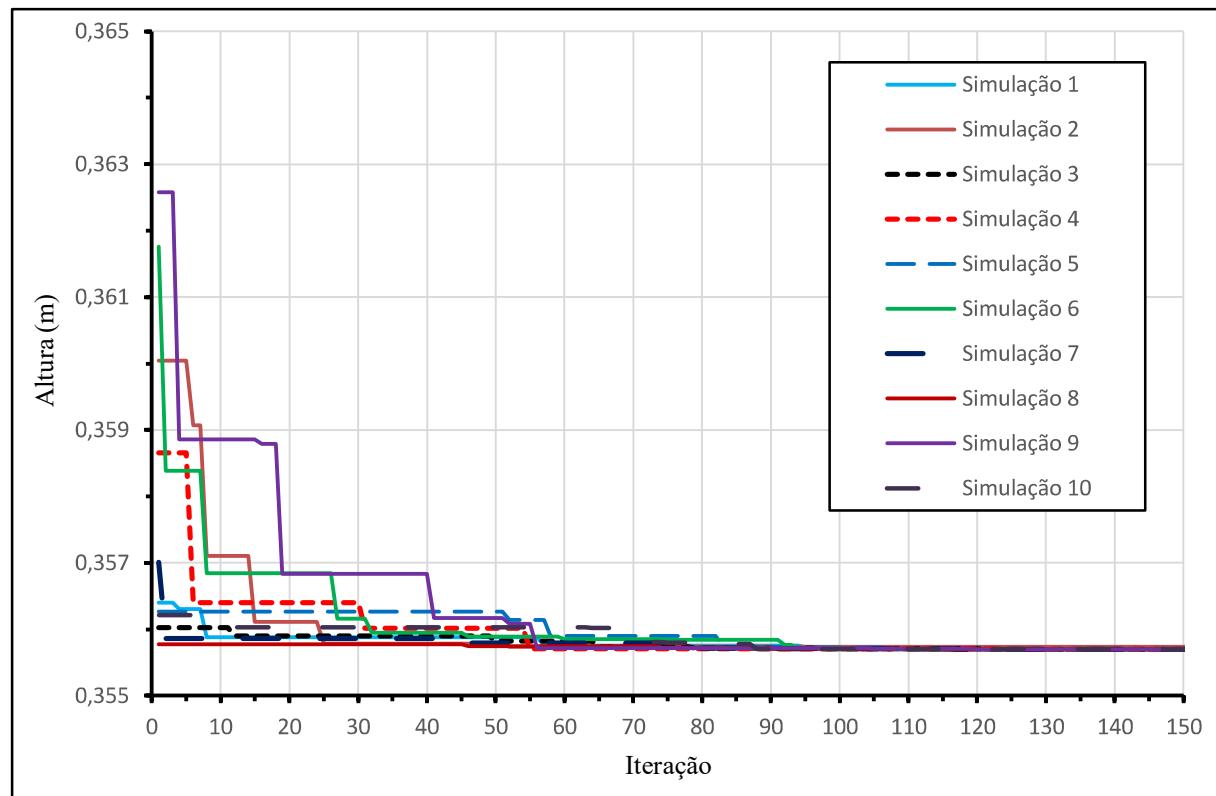


Figure 9. Convergência das simulações do caso 2

Enquanto a convergência do Caso 1 se torna visível a partir de 50 iterações, o mesmo se verifica ao Caso 2 somente após 90 iterações. Ademais, percebe-se que em ambos os casos todas as simulações convergem praticamente para um mesmo valor. Para o Caso 1 o maior erro em relação à média equivale a 0.0020%, enquanto que para o Caso 2 tal valor é igual a 0.0097%.

4.2 Duas variáveis de projeto

As variáveis a serem otimizadas são a altura da viga e a resistência média do concreto à compressão. Adotaram-se 70 e 500 vagalumes para verificar como a quantidade dos mesmos afeta na qualidade da resposta neste problema bidimensional. Empregaram-se 1500 amostras e índice de confiabilidade alvo $\beta_T = 4.00$.

A função objetivo a ser minimizada é o custo de manufatura da peça, representado pelo produto do volume por um custo unitário aqui representado pelo valor da resistência do concreto à compressão f_{cm} . Como a base e o comprimento da viga são considerados determinísticos, a função objetivo é dada pela Eq. (14):

$$F_{obj} = h \times f_{cm} \quad (14)$$

A otimização da altura da viga e da resistência à compressão do concreto resultou nas configurações ótimas apresentadas na tabela 3.

Tabela 3. Configuração ótima para altura e f_{cm}

Quantidade de Vagalumes	Altura ótima (cm)	f_{cm} ótimo (MPa)	Função objetivo (cm x MPa)
70	46,495	28,56	1327.8972
500	48,437	24,23	1173.6285

Para as duas quantidades de vagalumes a configuração ótima é similar, destacando-se que a menor quantia leva a uma altura ótima relativamente inferior e f_{cm} ótimo consideravelmente superior.

Cada valor ótimo é obtido mediante a média das respostas de 10 simulações. Nas figuras 10 e 11 estão representados os gráficos de convergência da altura e do f_{cm} , respectivamente, para o caso com 70 vagalumes.

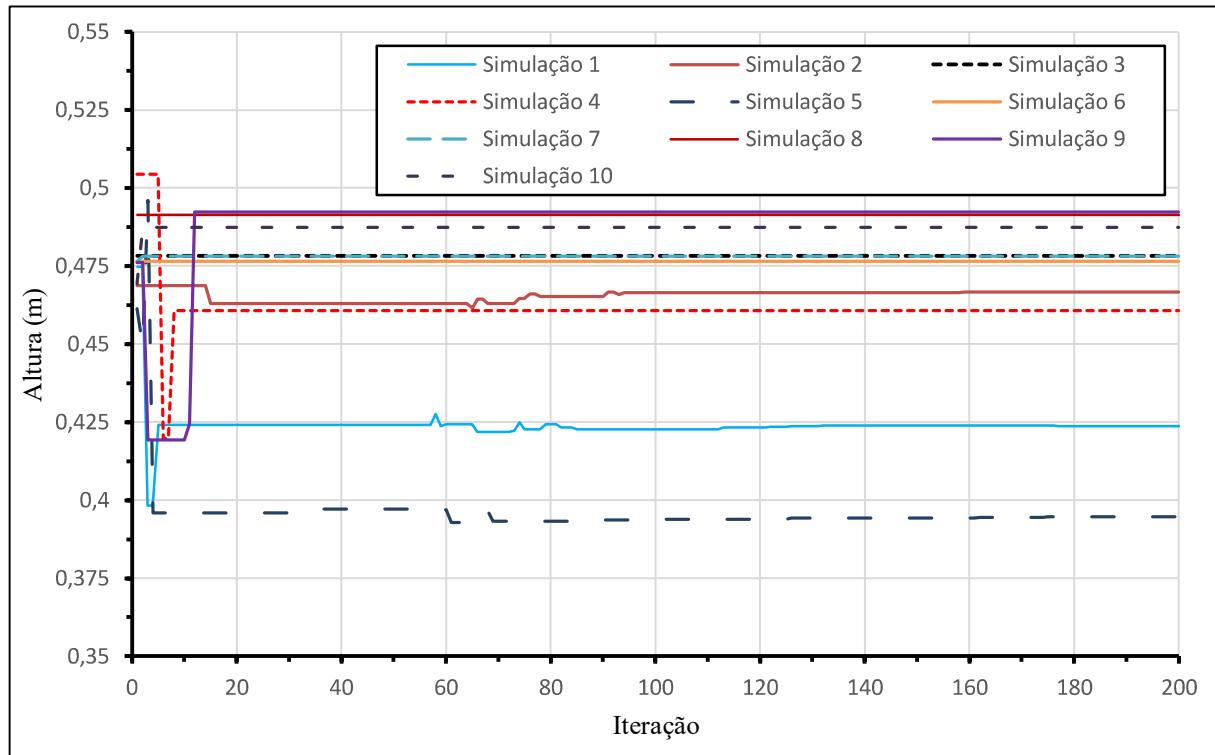


Figura 10. Convergência da altura para as simulações com 70 vagalumes

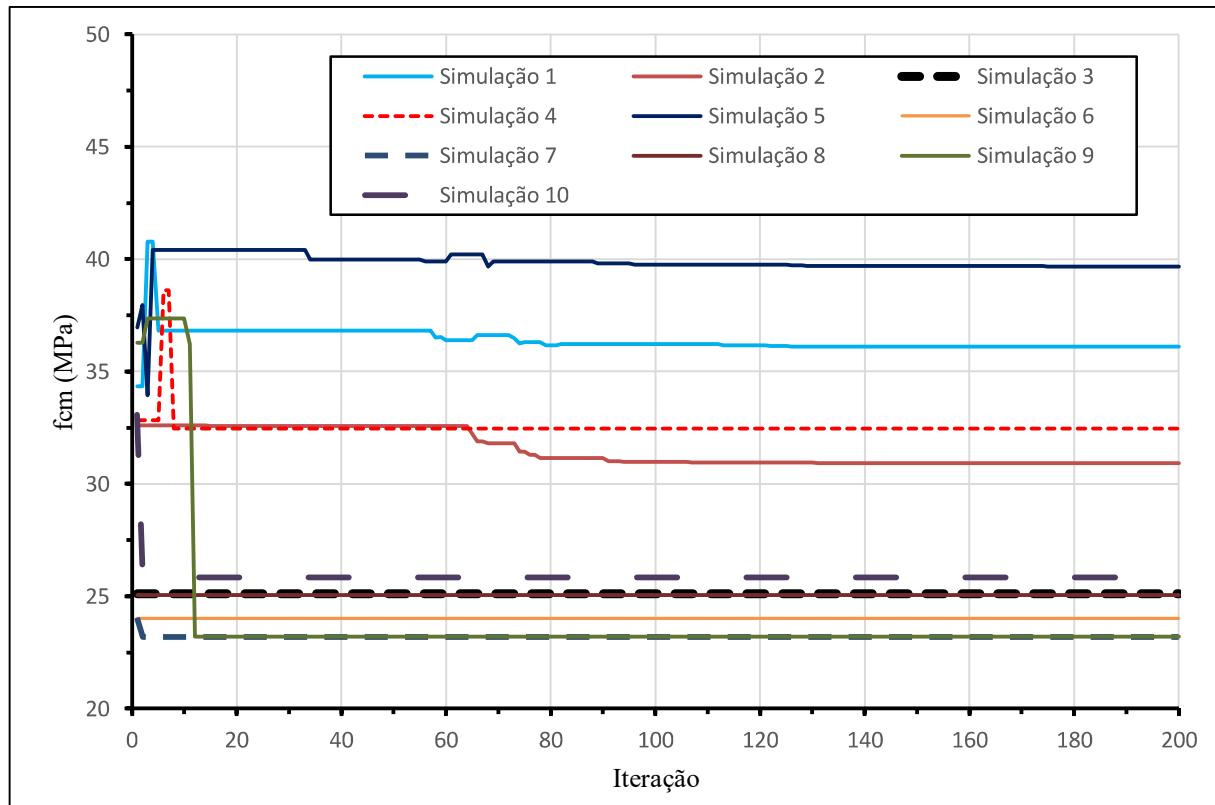


Figura 11. Convergência do f_{cm} para as simulações com 70 vagalumes

Nota-se que, para 70 vagalumes, as simulações apresentam um comportamento disperso quanto aos valores ótimos, indicando que o erro em relação ao valor médio é elevado. Na figura 12 estão representados os valores ótimos de cada simulação, a média dos resultados e a região em torno da média referente a um erro de até 10%.

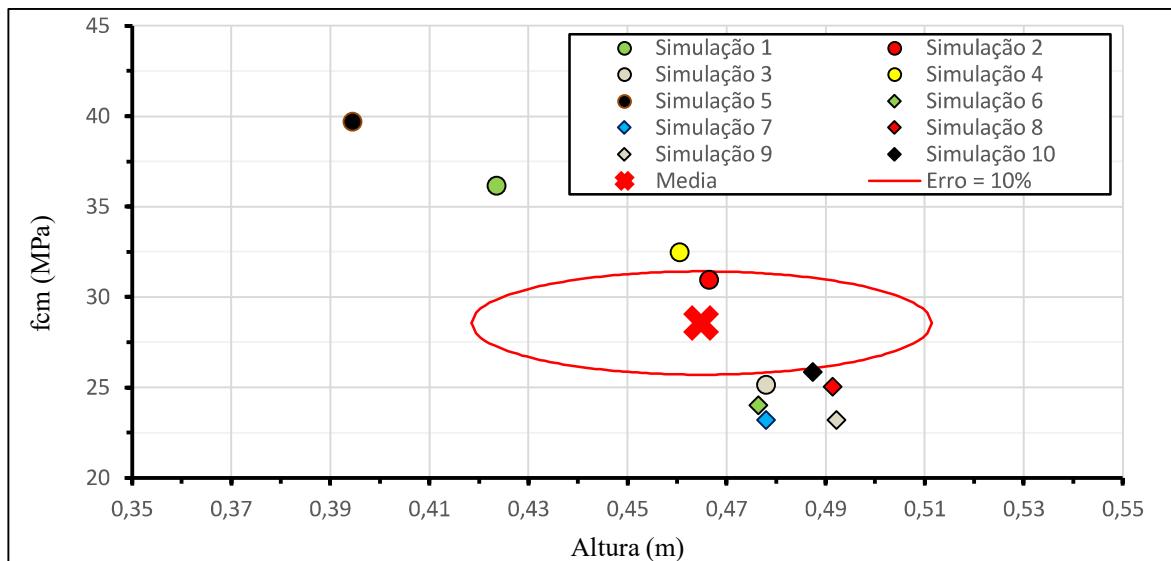


Figura 12. Configurações ótimas e dispersão em torno da média para 70 vagalumes

Dentre as 10 simulações realizadas, apenas uma resultou em valores ótimos cujo erro em relação à média é inferior a 10%. Percebe-se que, de modo geral, simulações individuais para o caso de 70 vagalumes apresentam considerável discrepância entre si e em relação ao valor médio. Percebe-se dificuldade na garantia de respostas próximas ao mínimo global da função objetivo para a restrição definida.

Nas figuras 13 e 14 estão ilustrados os gráficos de convergência da altura e do f_{cm} , respectivamente, para o caso com 500 vagalumes.

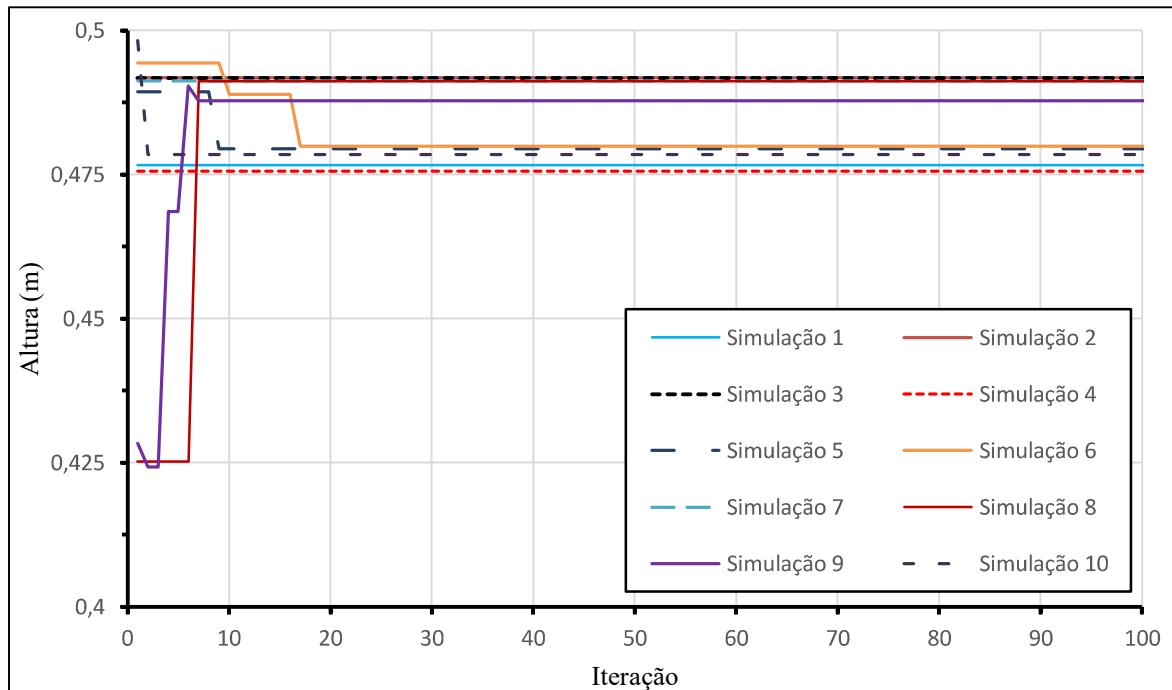
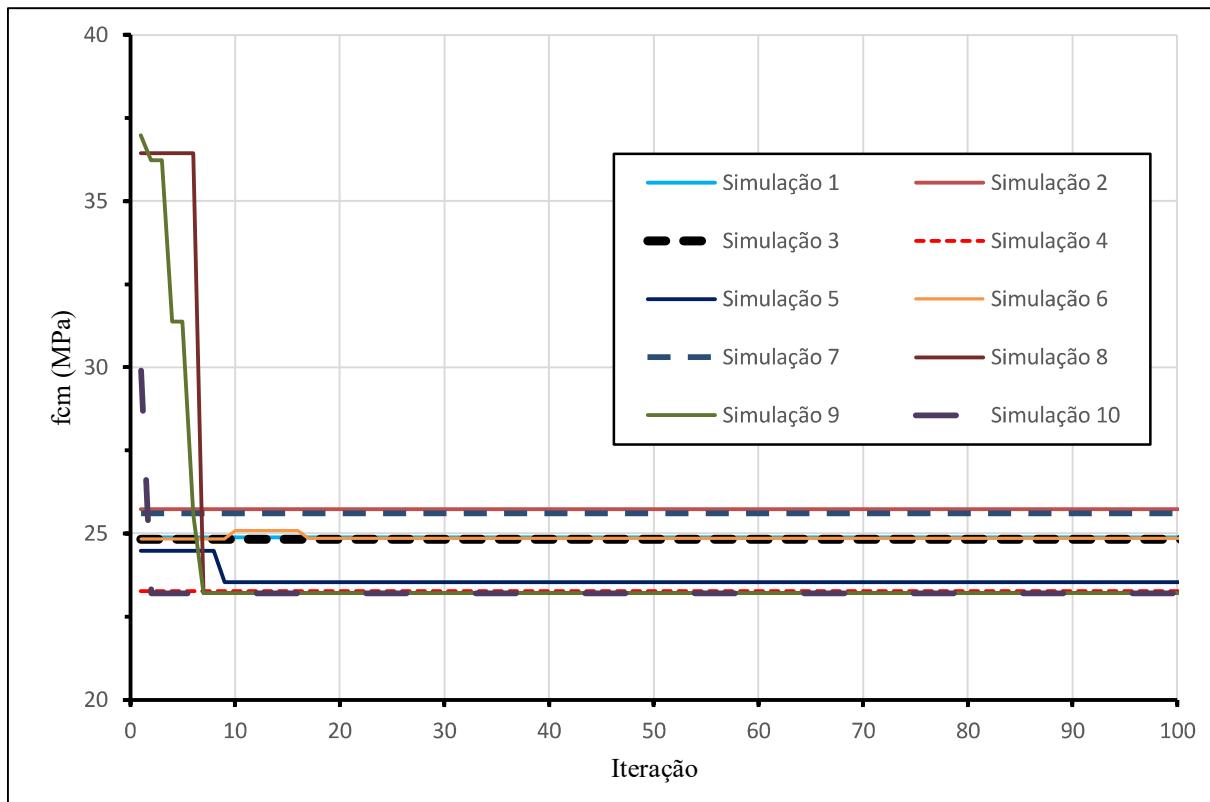


Figura 13. Convergência da altura para as simulações com 500 vagalumes

Figura 14. Convergência do f_{cm} para as simulações com 500 vagalumes

Considerando 500 vagalumes as simulações continuam apresentando certa dispersão, porém em uma proporção muito inferior àquela verificada para 70 vagalumes. Na figura 15 estão indicados os valores ótimos de cada simulação, a média dos resultados e a região em torno da média referente a um erro de até 10%.

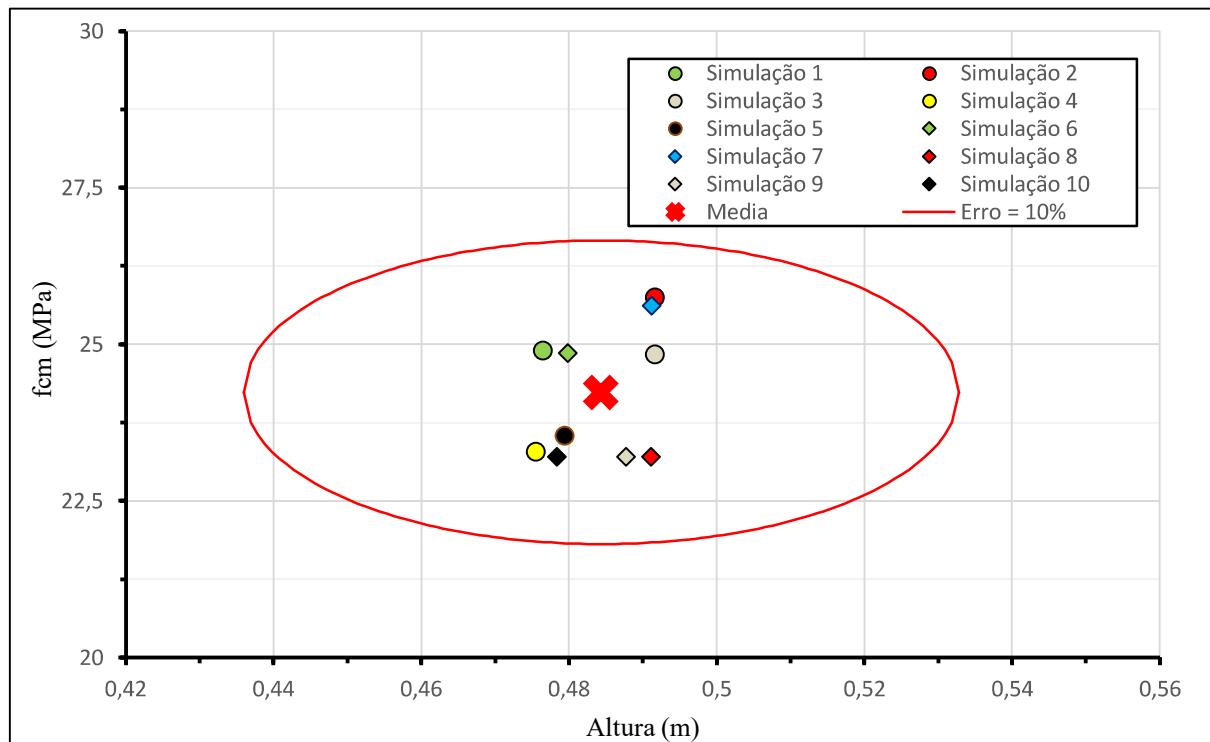


Figura 15. Configurações ótimas e dispersão em torno da média para 500 vagalumes

Nota-se que todas as simulações resultam em valores ótimos cujo erro em relação à média é inferior a 10%. O aumento do número de vagalumes foi suficiente para que as simulações individuais levem a resultados com pouco erro estatístico, assim como devidamente próximas do mínimo global da função objetivo dada a restrição imposta.

5 Conclusões

Conclui-se que a otimização estrutural considerando incertezas é uma ferramenta eficiente e robusta na obtenção de configurações ótimas de vigas de concreto armado, minimizando seu custo de manufatura ao mesmo tempo que se mantém um nível desejado de segurança.

Ao se otimizar somente a altura da viga, conclui-se que o algoritmo de otimização empregado garante resultados coerentes no que diz respeito à necessidade de robustez estrutural. Quanto mais a estrutura foi submetida às incertezas, maior teve de ser o valor da altura ótima.

Comparando com a configuração de projeto obtida por dimensionamento, a aplicação do carregamento com menor incerteza (Caso 1) levou a uma altura ótima praticamente igual para o nível de segurança considerado.

Já a aplicação de um carregamento associado a uma maior incerteza (Caso 2) levou a uma altura ótima 5 cm superior para manter um mesmo nível de segurança. Deve se destacar que o carregamento do Caso 2 tende a fugir da consideração adotada no dimensionamento de que a viga pertença a uma edificação tipo 2. Para uma comparação mais adequada, sugere-se um dimensionamento adicional considerando que a viga pertença a uma edificação tipo 1 (onde as cargas acidentais superam 5 kN/m²).

Quanto à otimização da altura e da f_{cm} , a configuração ótima obtida pelo algoritmo é consideravelmente mais econômica. Comparando com a configuração de projeto advinda do dimensionamento, cuja função objetivo vale 1392 cm x MPa (h = 30 cm e $f_{cm} = 40 \times 1,16$ MPa), a otimização com 500 vagalumes leva a uma redução de aproximadamente 18,6 % da função objetivo.

Já a otimização com 70 vagalumes, por sua vez, permite apenas concluir que há a necessidade de se usar mais vagalumes caso a dimensão do vetor de variáveis de projeto seja aumentada. O elevado erro dos valores ótimos das simulações deste caso torna inadequada a comparação deste com a configuração de dimensionamento.

A configuração ótima do caso com 500 vagalumes indica que, para o nível de segurança adotado e para o carregamento considerado, é mais barato utilizar uma altura maior combinada com um f_{cm} inferior, do que reduzir a altura e aumentar a resistência do concreto. Tal resultado reflete o grande potencial do algoritmo em definir a melhor opção de projeto diante de objetivos conflitantes. Estudos envolvendo mais elementos estruturais e considerando novas variáveis aleatórias serão desenvolvidos.

Reconhecimentos

Os autores reconhecem o financiamento deste trabalho às agências brasileiras CAPES (Coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior), CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo).

Referências

- [1]. Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto. Rio de Janeiro, 2014, 238 p.
- [2]. Petroski, H. *To Engineer is Human: The Role of Failure in Successful Design*, 1st edition. St Martin's Press, New York, 1992.

- [3]. Beck, A. T.; Tessari, R. K.; Kroetz, H. M. System reliability-based design optimization and risk-based optimization: a benchmark example considering progressive collapse. *Engineering Optimization*, 2018.
- [4]. Nogueira, C. G. Um Modelo de Confiabilidade e Otimização Aplicado às Estruturas de Barras de Concreto Armado. Dissertação (Mestrado – Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, SP, 2005.
- [5]. Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 8681: Ações e Segurança nas Estruturas - Procedimento. Rio de Janeiro, 2003, 15 p.
- [6]. Beck, A. T. Confiabilidade e Segurança das Estruturas. 1^a ed, Elsevier Editora Ltda, Rio de Janeiro, 2019.
- [7]. Dos Anjos, F. F. C. Avaliação das Armaduras contra o Colapso Progressivo em Estruturas de Concreto Armado. Projeto de Graduação (Graduação – Engenharia Civil), Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, 2016.
- [8]. General Services Administration. GSA – U.S. General Services Administration, Alternate Path Analysis & Design Guidelines for Progressive Collapse Resistance. Washington DC, 2013.
- [9]. Beck, A. T.; Gomes, W. J. S. A comparison of deterministic, reliability-based and risk-based structural optimization under uncertainty. *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 28, pp. 18-29, 2012.
- [10]. Yang, X. S. *Nature-inspired metaheuristic algorithms*. UK: Luniver Press, 2008.
- [11]. Okasha, N. Improved weighted average simulation approach for solving reliability-based analysis and design optimization problems. *Struct. Saf.*, vol. 60, pp. 47–55, 2016.
- [12]. Coda, H. B.; Paccola, R. R. A total-Lagrangian position-based FEM applied to physical and geometrical nonlinear dynamics of plane frames including semi-rigid connections and progressive collapse. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 91, pp. 1–15, 2014.
- [13]. Mazars, J. *Application de la mechanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure*, Paris, Thèse de Doctorat d'État, Université Paris, 1984.
- [14]. Santiago, W. C.; Beck, A. T. A new study of Brazilian concrete strength conformance. *IBRACON Structures and Materials Journal*, vol. 10, n. 4, pp. 906-923. 2017