Título em Português:	Estudo da punição institucional no dilema do prisioneiro com N-jogadores
Título em Inglês:	A study of institutional punishment in the N-person prisoner's dilemma
Autor:	Bianca Yumi Simote Ishikawa
Instituição:	Universidade de São Paulo
Unidade:	Instituto de Física de São Carlos
Orientador:	Jose Fernando Fontanari
Área de Pesquisa / SubÁrea:	Física Geral
Agência Financiadora:	USP - Programa Unificado de Bolsas

ESTUDO DA PUNIÇÃO INSTITUCIONAL NO DILEMA DO PRISIONEIRO COM N-JOGADORES

Bianca Yumi Simote Ishikawa

José Fernando Fontanari

Instituto de Física de São Carlos/Universidade de São Paulo

yumibianca@usp.br

Objetivos

Objetiva-se estudar o problema dos bens públicos sob a ótica do dilema do prisioneiro para N-pessoas, com a introdução da punição institucional. Analisou-se também a eficiência do modelo em eliminar os indivíduos transgressores [2, 3].

Métodos e Procedimentos

Realizou-se a modelagem do jogo mencionado, considerando três possíveis estratégias – cooperadores, desertores e punidores institucionais. A instituição punidora é criada e mantida por estes últimos, independentemente da existência de transgressores; seu custo total de manutenção é fixo e pago de forma igualitária entre todos os punidores. Os dois primeiros são os indivíduos a serem punidos, com multas fixas respectivas de $\alpha\beta$ e β, com $\alpha, \beta > 0$ e $\alpha \in [0,1]$. Também foram feitas simulações computacionais a fim de estudar a dinâmica populacional. Por fim, calculou-se os pontos de equilíbrio do modelo, considerando população infinita, e suas estabilidades [2, 3].

Resultados

Denota-se as frequências dos cooperadores, desertores e punidores por x, y e z. Além disso, o subscrito $*$ indica um ponto de equilíbrio.

No modelo, há os pontos fixos de população pura das três estratégias ($x^* = 1$, $y^* = 1$ e $z^* = 1$), os sem cooperadores e sem desertores ($x^* = 0$ e $y^* = 1$), e o de coexistência, que só existe para parâmetros específicos.

Observou-se que o ponto $x^* = 1$ é de sela: a população pode ser invadida por desertores, mas não por punidores.

O ponto $y^* = 1$ é sempre estável, o que significa que uma população composta apenas por desertores não pode ser invadida. Isso mostra o dilema social: o maior *payoff* individual é o de um desertor em uma população composta apenas de cooperadores – visto que esse usufrui do bem público sem custo ou punições – mas $y^* = 1$, apesar de estável, tem o pior *payoff* médio possível para uma população no equilíbrio, visto que não há contribuições para o bem público.

Já o ponto $z^* = 1$ é estável apenas se os custos pagos pelos punidores forem inferiores aos gastos pagos tanto pelos cooperadores quanto pelos desertores. Os pontos fixos sem cooperadores e de coexistência são instáveis, e o ponto sem desertores é de sela. O ponto fixo sem punidor só existiria se o bem público fosse de graça, ou seja, se seu custo fosse nulo.

A figura 1 mostra a dinâmica quando há bi-estabilidade entre desertores e punidores. No painel da esquerda, percebe-se infinitos pontos fixos de coexistência, presentes sobre a separatriz, em rosa. A existência desses infinitos pontos se dá porque a condição de coexistência só indica o valor z^*, sendo x^* e y^* determinados pelas condições iniciais. Por outro lado, o painel da direita ilustra a situação mais comum, em que não há pontos fixos de coexistência. Nesse contexto, percebe-se que, na presença de cooperadores, é necessário um número maior de punidores para eliminar os desertores, já que z^* é maior no ponto fixo sem desertores do que no ponto fixo sem cooperadores.

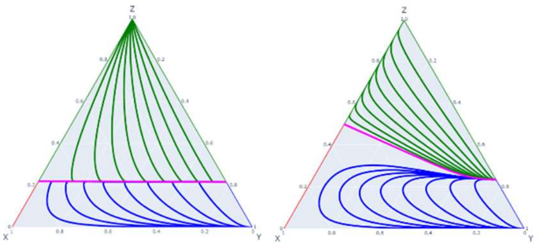

Figura 1: Dinâmica populacional no caso em que há bi-estabilidade entre desertores e punidores.

As separatrizes delimitam as bacias de atração dos pontos fixos estáveis – ou seja, $y^* = 1$ e $z^* = 1$. Isso significa que existe um valor limite z^* a partir do qual há a garantia da extinção de transgressores. A figura 2 expõe como o aumento dos valores de punição aos cooperadores e desertores influencia no tamanho da bacia de atração dos punidores. Nela, a variação se dá no aumento de α, na imagem da esquerda, e de β, na imagem da direita, de cima para baixo, mantendo os demais parâmetros do modelo constantes.

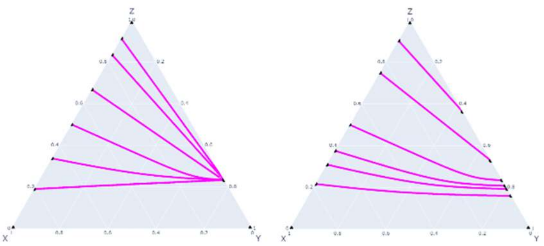

Figura 2: Separatrizes para diferentes α e β.

Por sua vez, a figura 3 mostra a dinâmica quando o ponto $y^* = 1$ é o único estável. Então, há a dominação sobre os punidores pelos cooperadores, na imagem à direita, e pelos desertores, à esquerda. Em ambas, nota-se que as frequências x e y aumentam à medida que z diminui; uma vez que estes são extintos, os desertores rapidamente dominam a população.

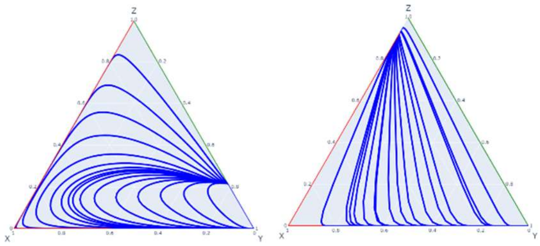

Figura 3: Dinâmica populacional no caso em que o ponto fixo $y^* = 1$ é o único ponto estável do modelo.

O modelo estudado aqui apresenta conclusões similares à teoria do inglês Thomas Hobbes, que afirma que os indivíduos possuem uma natureza egoísta, e que caberia a mecanismos de governança como o Estado a tarefa de manter uma "paz artificial" [1].

Conclusões

Verifica-se que, na bi-estabilidade entre y e z, a presença de casos em que não há a dominação pelos desertores. A estabilidade de $y^* = 0$, contudo, existe para quaisquer configurações de parâmetros e demonstra o dilema social dos bens públicos, evidenciado pelo conflito dos interesses coletivo e individual.

Destaca-se, por fim, que essa modelagem é bastante próxima da realidade brasileira. Entretanto, outros elementos podem ser considerados a fim de tornar a modelagem ainda mais realista – como, por exemplo, o estudo de uma população finita ou, ainda, como o grau de severidade da punição impacta a dinâmica.

Referências

[1] BHUIYAN, Bellal Ahmed. An overview of game theory and some applications. **Philosophy and Progress**, p. 111-128, 2016.

[2] ISHIKAWA, Bianca; FONTANARI, José F. Revisiting institutional punishment in the N-person prisoner's dilemma. **arXiv preprint arXiv:2406.05884**, 2024.

[3] NOWAK, Martin A. **Evolutionary dynamics: exploring the equations of life**. Harvard University Press, 2006.

A STUDY OF INSTITUTIONAL PUNISHMENT IN THE N-PERSON PRISONER'S DILEMMA

Bianca Yumi Simote Ishikawa

José Fernando Fontanari

São Carlos Institute of Physics/University of São Paulo

yumibianca@usp.br

Objectives

This project's aim is to study the problem of public goods under the optics of the N-person prisoner's dilemma, with the introduction of the institutional punishment. The efficiency of the model in eliminating the transgressors was also analyzed [2, 3].

Materials and Methods

The mentioned game was modeled considering three possible strategies – cooperators, defectors and institutional punishers. The punitive institution is created and maintained by the latter, regardless of the existence of offenders; its total maintenance cost is constant and shared equally among all the punishers. The first two are the individuals to be punished, with respective fixed fines of $\alpha\beta$ and β, with $\alpha, \beta > 0$ and $\alpha \in [0,1]$. Computational simulations were also carried out to study population dynamics. Finally, the equilibrium points, also known as the fixed-points, and their stabilities, considering an infinite population, were calculated [2, 3].

Results

The frequencies of cooperators, defectors and punishers are labeled as x, y and z. Furthermore, the subscript $*$ indicates an equilibrium point.

In the model, there are the all-cooperators ($x^* = 1$), the all-defectors ($y^* = 1$) and the all-punishers ($z^* = 1$) fixed points, the no-cooperators ($x^* = 0$) and the no-defectors ($y^* = 0$) fixed points, and the coexistence solution, which only exists for specific parameters.

It was observed that the point $x^* = 1$ is a saddle point: the population can be invaded by defectors, but not by punishers.

The all-defectors fixed point is always stable, which means that this population can not be invaded. This shows the social dilemma: the highest individual payoff is of a defector in an otherwise all-cooperators population – since it benefits from the public good without cost or punishment – but $y^* = 1$, despite being stable, has the worst possible average payoff for a population in equilibrium, because there is no one contributing to the public good.

Point $z^* = 1$, on the other hand, is stable only if the costs paid by the punishers are lower than the expenses paid by both the cooperators and the defectors separetely. The no-cooperators and coexistence fixed points are unstable, and the no-defectors solution is a saddle point. The no-punishers fixed point would exist only if the public good were free, i.e. if its cost were zero.

Figure 1 shows the dynamic when there is bistability between defectors and punishers. The left panel shows infinite fixed points located on the separatrix, in pink. These infinite points exist because the coexistence condition only dictates the value of z^*, while $x^*$and y^* are determined by the initial conditions. The right panel illustrates the most common situation, in which there are no coexistence fixed points. In this context, it can be seen that, in the presence of cooperators, a larger number of punishers are needed to eliminate the defectors, since z^* is bigger in the no-defectors fixed point than in the no-cooperators fixed point.

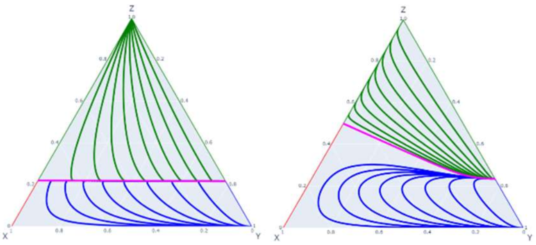

Figure 1: Population dynamics in the case of bistability between defectors and punishers.

The separatrices delimit the basins of attraction of the stable fixed point, i.e. $y^* = 1$ and $z^* = 1$. This implies that there is a limit z^* above which the extinction of offenders is guaranteed. Figure 2 exposes how increasing the punishment values for cooperators and defectors influences the size of the punisher's basins of attraction. In it, the variation occurs by increasing α, on the left image, and β, on the right image, from top to bottom, keeping the other parameters of the model constant.

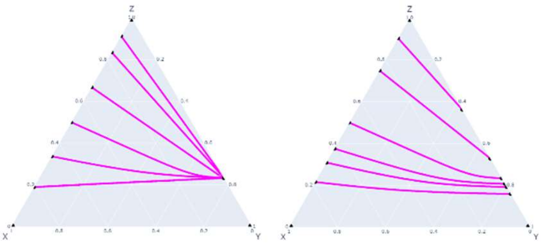

Figure 2: Separatrices for different α e β.

Figure 3 shows the dynamics when $y^* = 1$ is the only stable fixed point. In this case, there is the domination over the punishers by the cooperators, on the right, and by the defectors, on the left. In both images, the frequencies x and y increase as z vanishes; once the punishers are extinct, the defectors quickly dominate the population.

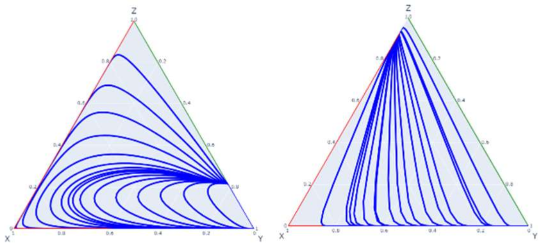

Figure 3: Population dynamics in the case that $y^* = 1$ is the only stable point of the model.

The model studied here presents similar conclusions to Thomas Hobbes' theory, according to which individuals have a selfish nature, and that it would be up to governance mechanisms such as the State to maintain an "artificial peace" [1].

Conclusions

The bistability between y and z reveals the presence of cases in which there is no domination by the defectors. The stability of $y^* = 0$, however, exists for any parameter configuration and demonstrates the social dilemma of public goods, evidenced by the conflict of collective and individual interests.
Finally, it should be noted that this model is quite similar to the Brazilian reality. Nevertheless, other elements can be considered in order to make the modeling even more realistic – such as, for instance, the study of a finite population or how the severity of the punishment impacts the dynamics.

References

[1] BHUIYAN, Bellal Ahmed. An overview of game theory and some applications. **Philosophy and Progress**, p. 111-128, 2016.
[2] ISHIKAWA, Bianca; FONTANARI, José F. Revisiting institutional punishment in the N-person prisoner's dilemma. **arXiv preprint arXiv:2406.05884**, 2024.
[3] NOWAK, Martin A. **Evolutionary dynamics: exploring the equations of life**. Harvard University Press, 2006.