

Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Antônio de Pádua Franco Filho

Orientadora: Élvia Mureb Sallum

Simbologia:

$$\begin{aligned} B^n &= \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq 1\} \\ S^{n-1} &= \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\} \end{aligned}$$

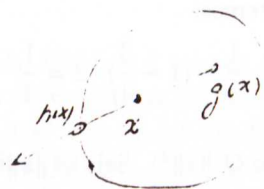
onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $\|x\| = \{x_1^2 + \dots + x_n^2\}^{1/2}$.

Teorema: Toda função contínua $f : B^n \rightarrow B^n$ admite um ponto fixo.

Este Teorema decorre da seguinte proposição:

Proposição 1: Não existe uma função contínua $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$ que satisfaça $f(x) = x \quad \forall x \in S^{n-1}$.

Prova do Teorema. Por absurdo, suponhamos que exista $g : B^n \rightarrow B^n$ contínua, tal que $\forall x \in B^n \quad g(x) \neq x$. Então a semi-reta de origem em $g(x)$ que passa por x determina um ponto $h(x)$ em S^{n-1} , $h : B^n \rightarrow S^{n-1}$ é contínua e $h(x) = x \quad \forall x \in S^{n-1}$, o que contradiz a Proposição 1.



A Proposição 1, decorre dos dois Lemas seguintes:

Lema 1. Se existir $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$ contínua tal que $f(x) = x \quad \forall x \in S^{n-1}$, então existirá $h : B^n \rightarrow S^{n-1}$ de classe C^1 tal que $h(x) = x \quad \forall x \in S^{n-1}$.

Lema 2. Não existe uma função $h : B^n \rightarrow S^{n-1}$ de classe C^1 tal que $h(x) = x \quad \forall x \in S^{n-1}$.

Prova do Lema 1. Seja $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$ contínua tal que $f(x) = x \quad \forall x \in S^{n-1}$. Procuraremos uma função $R(x) = (R_1(x), \dots, R_n(x))$ cujos componentes $R_j : B^n \rightarrow \mathbb{R}$ sejam polinômios e tal que:

$$R(x) = 0, \quad \forall x \in S^{n-1} \quad \text{e} \quad g(x) = x + R(x) \neq 0 \quad \forall x \in B^n.$$

Nestas condições, podemos definir $h(x) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|}$ em B^n , de classe C^1 e com $h(x) = x, \forall x \in S^{n-1}$.

Para obter $R(x)$, seja $P(x) = (P_1(x), \dots, P_n(x))$ uma função cujos componentes são polinômios, tal que

$$\|f(x) - x - P(x)\| < 1/4, \forall x/\|x\| \leq 1$$

conforme nos permite o Teorema de aproximação de Weierstrass.

Procuramos um polinômio real $Q(\|x\|^2)$ tal que $Q(1) = 0$ e a função $g(x) = x + R(x) = x + Q(\|x\|^2)P(x)$ não se anule em B^n .

Como $y = f(x) - x$ é contínua no compacto B^n e $y(x) = 0, \forall x \in S^{n-1}$, dado $\varepsilon = 1/4$, existe $\delta > 0$, que podemos supor $\delta < 1/4$, tal que para $t \in S^{n-1}$

$$\|x - t\| < \delta < 1/4 \Rightarrow \|y(x) - y(t)\| = \|f(x) - x\| < 1/4.$$

Logo, para todo x com $1 \geq \|x\| \geq \theta = 1 - \delta > 3/4$ temos $\|f(x) - x\| < 1/4$. Então impondo $|Q(\|x\|^2)| \leq 1 \quad \forall x \in B^n$, teremos que para $\theta \leq \|x\| \leq 1$

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &= \|x + Q(\|x\|^2)\{f(x) - x\} - Q(\|x\|^2)\{f(x) - x - P(x)\}\| \\ \|g(x)\| &\geq \|x\| - |Q(\|x\|^2)| \|f(x) - x\| - |Q(\|x\|^2)| \|f(x) - x - P(x)\| \\ &\geq \frac{3}{4} - 1 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Para $\|x\| \leq \theta$ escrevemos:

$$g(x) = x + Q(\|x\|^2)P(x) = f(x) - Q(\|x\|^2)\{f(x) - x - P(x)\} - \{1 - Q(\|x\|^2)\}\{f(x) - x\}.$$

Impondo $Q(\|x\|^2) \geq 3/4$ temos:

$$\|g(x)\| \geq \|f(x)\| - Q(\|x\|^2)\|f(x) - x - P(x)\| - (1 - Q(\|x\|^2))\|f(x) - x\|$$

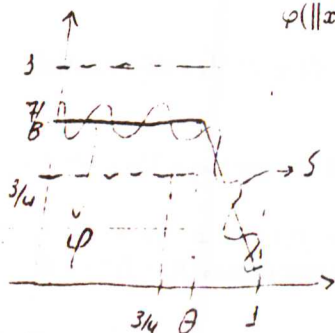
e como $\|f(x) - x\| \leq \|f(x)\| + \|x\| \leq 2$, temos:

$$\|g(x)\| \geq 1 - 1 \cdot \frac{1}{4} - (1 - \frac{3}{4}) \cdot 2 = \frac{1}{4}$$

Portanto $\|g(x)\| \geq 1/4, \forall x \in B^n$.

Resta mostrar como obter o polinômio $Q(\|x\|^2)$. Seja $\varphi(\|x\|^2)$ contínua.

$$\varphi(\|x\|^2) = \begin{cases} \frac{7}{8}; & 0 \leq \|x\|^2 \leq \theta < 1 \\ \frac{7(1-\|x\|^2)}{8(1-\theta)}, & \frac{3}{4} < \theta \leq \|x\|^2 \leq 1 \end{cases}$$



Pelo Teorema de aproximação de Weierstrass, existe um polinômio $S(\|x\|^2)$ tal que

$|\varphi(\|x\|^2) - S(\|x\|^2)| < \frac{1}{16}$. O polinômio $Q(\|x\|^2) = S(\|x\|^2) - S(1)$ satisfaz

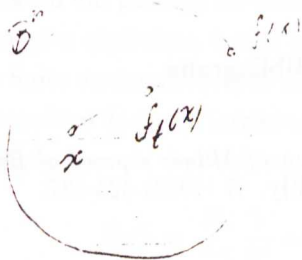
$$Q(1) = 0, |Q(\|x\|^2)| \leq 1 \quad \forall x \in B^n \quad \text{e} \quad Q(\|x\|^2) \geq 3/4 \quad \forall x/\|x\|^2 \leq \theta < 1.$$

□

Prova do Lema 2. Suponhamos por absurdo, que exista $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$ de classe C^1 , tal que $f(x) = x, \forall x \in S^{n-1}$.

Consideremos em B^n as funções $g(x) = f(x) - x$ e $f_t(x) = x + t(f(x) - x), \forall t \in [0, 1]$, que são de classe C^1 . Observemos a seguir algumas de suas propriedades:

1. $f_0(x) = x$ e $f_1(x) = f(x)$.
2. $\forall t, f_t(x) \in B^n$ e $\forall x \in S^{n-1} f_t(x) = x$.
3. $df_t(x) = I_n + t dg(x)$ onde I_n denota a identidade de $\mathbb{R}^n$.
4. $J(t, x) = \det[df_t(x)] = 1 + A_n(x)t^n + \dots + A_1(x)t$ onde cada $A_j : B^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.



Afirmamos que, existe $t_0, 0 < t_0 < 1$ tal que $J(t, x) > 0 \quad \forall t \in [0, t_0]$.

Com efeito, como cada A_j é contínua no compacto B^n , estas assumem seus mínimos a_j e temos $J(t, x) \geq 1 + a_n t^n + \dots + a_1 t$ em $[0, 1]$. Basta tomar $0 < t_0 < 1$ tal que $1 + a_n t^n + \dots + a_1 t > 0$ em $[0, t_0]$.

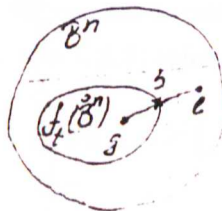
Podemos ainda tomar t_0 , de sorte que f_t seja bijetora $\forall t \in [0, t_0]$.

Com efeito, como g é C^1 no compacto B^n , $\exists M > 0/\forall x, y \in B^n, \|g(x) - g(y)\| \leq M\|x - y\|$.

Tomando, $0 \leq t < t_0 < 1/M$, teremos que f_t é injetora. pois $f_t(x) = f_t(y) \Rightarrow \|x - y\| = t\|g(x) - g(y)\| \leq tM\|x - y\| \Rightarrow x = y$.

Para $0 \leq t < t_0$, o Teorema da função inversa, assegura que $f_t(\overset{\circ}{B}^n)$ é aberto. Mostrando que $f_t(\overset{\circ}{B}^n) = \overset{\circ}{B}^n$, teremos $f_t(B^n) = B^n$.

Por absurdo, suponhamos que $f_t(\overset{\circ}{B}^n) \subsetneq \overset{\circ}{B}^n$.



Sejam $e \in \overset{\circ}{B}^n \setminus f_t(\overset{\circ}{B}^n)$ e $g \in f_t(\overset{\circ}{B}^n)$. O segmento de reta $[e, g]$ determina o ponto $b \in \varphi f_t(\overset{\circ}{B}^n)$. Seja $f_t(x)$ com $x_n \in \overset{\circ}{B}^n$ uma sequência convergente para b . Como B^n é compacto, a sequência x_n admite uma sub-sequência $x_{n_k} \rightarrow x \in B^n$. Logo $f_t(x) = b$. Mas $b \notin f_t(\overset{\circ}{B}^n)$ portanto $x \in S^{n-1}$ e temos $b = x = f_t(x)$. Absurdo pois $b \in \overset{\circ}{B}^n$.

Portanto, $\forall t \in [0, t_0[$, $f_t(x)$ é bijetora.

Definimos a função polinomial $I : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$I(t) = \int_{B^n} J(t, x) dx.$$

Para $0 \leq t < t_0$, $I(t) = I_0 = n\text{-volume de } B^n > 0$, e como $I(t)$ é um polinômio constante em $[0, t_0[$, é constante em $[0, 1]$. Logo $I(1) = I(0) > 0$.

Mas $J(1, x) = \det[df(x)] = 0$. De fato, como $\langle f(x), f(x) \rangle = 1$ então $\langle \frac{\varphi f(x)}{\varphi x_i}, f(x) \rangle = 0$, isto é $\left\{ \frac{\varphi f}{\varphi x_1}, \dots, \frac{\varphi f}{\varphi x_n} \right\}$ é L.D.

Logo $I(1) = \int_{B^n} 0 dx = 0$, absurdo.

Portanto, $\text{not} \exists f : B^n \rightarrow S^{n-1}$ de classe C^1 tal que $f(x) = x, \forall x \in S^{n-1}$. □

Bibliografia

- [1] C.A. Rogers. *A less strong version of Milnor's proof of Brouwer's Fixed-point theorem* Amer. Math. Monthly, 87 (1980) 525-527.