Alguns Exemplos de Teoria dos Modelos
Some Examples of Model Theory

Vinicius Cifú Lopes*
Orientador: Prof. Dr. Francisco Miraglia†
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Novembro 2003

Resumo

Apresentamos, neste artigo, alguns exemplos de conceitos e construções importantes da Teoria dos Modelos. Inicialmente, exemplificamos e caracterizamos definições básicas como imersões e equivalência elementar. Estruturas curiosas são estudadas para ilustrar a definição de satisfação e responder negativamente a um problema de exponenciação devido a Tarski. Raciocínios fundamentais da teoria são explicitados no estudo de corpos reais fechados, ultraprodutos, uniões de cadeias e jogos. Como conseqüência dos Teoremas de Löwenheim–Skolem, apresentamos o Paradoxo de Skolem e a Aritmética Não-Standard. Sugerimos, ainda, uma aplicação da teoria à caracterização da imersão de um buraco negro no espaço-tempo.

Abstract

In this paper, we present some examples of important concepts and constructions in Model Theory. To begin with, we state examples and caracterizations of basic definitions like embeddings and elementary equivalence. Curious structures are studied in order to enlighten the definition of satisfaction and to answer negatively an exponentiation problem due to Tarski. Fundamental reasonings in the theory are made explicit in the study of real closed fields, ultraproducts, unions of chains and games. As consequences of Löwenheim–Skolem Theorems, we present Skolem's Paradox and Non-Standard Arithmetic. Further, we suggest an application to the caracterization of the embedding of a black hole in spacetime.

Conteúdo

*vclopes@ime.usp.br, ex-bolsista PIBIC – CNPq
†miraglia@ime.usp.br

Primeiras noções

A Teoria dos Modelos, em sua forma algébrica tradicional, estuda a generalização de conceitos como imersão, isomorfismo e satisfação de propriedades para estabelecer relações entre estruturas do cotidiano matemático e os axiomas que as descrevem, fazendo uso da Lógica (clássica) de primeira ordem.

O leitor encontrará no capítulo 3 de [Bell, Slomson] um desenvolvimento adequado do Cálculo de Predicados necessário para o estudo da Teoria dos Modelos e em seu capítulo 4 os conceitos básicos de que trataremos nesta seção. Esse texto contém uma teoria da prova formal, que não consta em [Chang, Keisler], a referência clássica; ambos trazem demonstrações, distintas, dos teoremas da Completude e Compacidade.

Exporemos alguns resultados de [Bell, Slomson] antepondo BS à sua numeração; seguimos sua notação, com exceção do símbolo $\sim$ para negação.

O elemento central da Teoria dos Modelos é a *estrutura relacional*, conjunto (*domínio*) não-vazio com relações: exemplos são conjuntos parcialmente ordenados, grupos, corpos, espaços vetoriais, planos geométricos e autômatos não-determinísticos. As estruturas relacionais, ou *modelos*, são *interpretações* ou *realizações* de linguagens[1] de primeira ordem de predicados com igualdade. Uma tal linguagem L é univocamente determinada por seu *tipo* $\mu \in \mathbb{N}^\alpha$, onde α é o cardinal dos predicados $\{P_\xi \mid \xi < \alpha\}$ de L, sendo $\mu(\xi)$ o grau do predicado P_ξ. Como são consideradas apenas fórmulas finitas, o cardinal $\rho = \max\{\alpha, \aleph_0\}$ do conjunto de símbolos de L é o mesmo que o do conjunto de fórmulas de L e é chamado *cardinal da linguagem* L. Uma L-*estrutura*, ou realização de L, é uma estrutura $\mathfrak{A} = (A, \{R_\xi \subseteq A^{\mu(\xi)} \mid \xi < \alpha\})$, $A \neq \emptyset$, para a qual L é *apropriada*.

Freqüentemente, fazemos uso de *constantes* e *operadores*. Não são realmente necessários, podendo ser substituídos por novos “axiomas” sem prejuízo para a teoria — mas alterando o cálculo de predicados pertinente[2] e a linguagem adequada (não seu cardinal).

Por exemplo, uma constante c pode ser eliminada adicionando-se um novo predicado unário C, incluindo-se na teoria a sentença

$$\exists x\, (C(x) \wedge \forall y\, (C(y) \rightarrow y = x))$$

e substituindo-se sentenças $\sigma(c)$ por sentenças $\forall x\, (C(x) \rightarrow \sigma(x))$. (Isso deve ser feito indutivamente, uma constante por vez.)

Podemos substituir $C(x)$ por uma fórmula $\gamma(x)$ em todas essas sentenças, se conveniente. Assim, na Teoria dos Conjuntos, $\forall v \sim(v \in x)$ define a constante $\emptyset$.

Analogamente se tratam operadores: um operador n-ário f pode ser substituído por um novo predicado F $(n+1)$-ário, de modo que $f(x_1, \ldots, f_n) = y$ e $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ tenham a mesma interpretação.

[1] Com número infinito enumerável de variáveis e (número finito de) conectivos lógicos usuais

[2] Quanto a, por exemplo, decidibilidade, isto é, a existência de um algoritmo que determine se uma sentença dessa linguagem é universalmente válida ou não: conforme [Bell, Slomson], pp. 72–3

Geralmente, indicam-se as relações (e operadores e constantes) de uma estrutura $\mathfrak{A}$ com índice superior — como $R_\xi^{\mathfrak{A}}$, correspondendo ao predicado P_ξ — ou adota-se o modo de [Bell, Slomson] de seguir a ordem alfabética: à relação R_ξ de $\mathfrak{A}$ corresponde S_ξ de $\mathfrak{B}$. Também se abandonam os índices das relações e das variáveis, usando-se letras diversas. O domínio de uma estrutura (em letra gótica) é indicado pela letra romana correspondente ou, em alguns textos, pelo próprio símbolo entre barras verticais.

Indicaremos o *fecho* $\forall v_1 \ldots \forall v_n\, \phi(v_1, \ldots, v_n)$ de uma fórmula ϕ por $\overline{\phi}$. (As variáveis livres de ϕ, aqui, são $v_1, \ldots, v_n$; em geral, suporemos apenas que estão dentre $v_1, \ldots, v_n$ indicadas.) Adotaremos a precedência usual entre conectivos lógicos e omitiremos os parênteses correspondentes.

Entre estruturas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ de mesmo tipo μ, definem-se algumas relações que generalizam as da Matemática cotidiana. Inicialmente, $\mathfrak{A}$ é *subestrutura* de $\mathfrak{B}$ ou $\mathfrak{B}$ é *extensão* de $\mathfrak{A}$, em símbolos $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, se $A \subseteq B$ e as relações de $\mathfrak{A}$ são simplesmente as restrições das correspondentes de $\mathfrak{B}$:

$$R_\xi = (S_\xi)|_A = S_\xi \cap A^{\mu(\xi)} .$$

Uma *imersão* $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ é uma injeção $h : A \to B$ que preserva as relações das estruturas:

$$(a_1, \ldots, a_{\mu(\xi)}) \in R_\xi \Leftrightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_{\mu(\xi)})) \in S_\xi .$$

(A igualdade também é preservada, pois h é injetora.) Temos, nesse caso, $\mathfrak{A} \simeq h[\mathfrak{A}] \subseteq \mathfrak{B}$, em que o símbolo $\simeq$ refere-se a uma imersão sobrejetora, chamada *isomorfismo*.

Considerando-se a linguagem L apropriada para o tipo μ, notamos que h preserva a validade[3] de fórmulas atômicas de L com parâmetros em A. Se preservar a validade de todas as fórmulas, é uma *imersão elementar*.

Se $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ e a identidade for (imersão) elementar, escreve-se $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, pospondo-se o adjetivo "elementar" aos termos "subestrutura" e "extensão".

Observamos que um isomorfismo é uma imersão elementar, o que pode ser verificado por indução na complexidade das fórmulas, e então uma imersão h é elementar se e somente se $\mathfrak{A} \simeq h[\mathfrak{A}] \prec \mathfrak{B}$, onde se entende o isomorfismo como aquele dado por h.

Define-se que $\mathfrak{A}$ é *elementarmente equivalente* a $\mathfrak{B}$ e indica-se $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ quando, para toda sentença σ de L,

$$\mathfrak{A} \models \sigma \Rightarrow \mathfrak{B} \models \sigma .$$

Lema 1. Suponha $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$: $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ se e somente se para toda fórmula $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ de L e $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$. Em geral, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ se e somente se, para toda sentença σ de L, $\mathfrak{A} \models \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \sigma$.

Basta tomar as negações das fórmulas e observar a definição de satisfação de uma fórmula em uma estrutura. QED

[3] Sobre satisfação e o símbolo $\models$, o leitor é remetido à nossa próxima seção, pág. 6

Finalmente, notamos que um isomorfismo, como toda imersão elementar, implica equivalência elementar. Recíprocas, contudo, não são válidas: $(\mathbb{Q}, <) \prec (\mathbb{R}, <)$ com $<$ usuais (Exemplo 4), mas tais estruturas não são isomorfas, e

Exemplo 2. Considerando-se $\mathbb{N}$ com a ordem $<$ usual, $(\mathbb{N}^*, <) \subseteq (\mathbb{N}, <)$ e $(\mathbb{N}^*, <) \simeq (\mathbb{N}, <)$, embora a primeira não seja subestrutura elementar da segunda.

De fato, a restrição de $<$ a $\mathbb{N}^*$ é a ordem usual neste conjunto. Considere a fórmula $\phi(v)$: $\sim\exists u\,(u < v)$, em que usamos a notação infixa e o mesmo símbolo da relação para o predicado. Temos que $(\mathbb{N}^*, <) \models \phi[1]$, já que 1 é o menor elemento de $\mathbb{N}^*$, mas <u>não</u> $(\mathbb{N}, <) \models \phi[1]$, pois $0 < 1$. Vemos também que $h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, $h(n) = n - 1$, é um isomorfismo de ordem.

Pela definição de satisfação de uma fórmula, se $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ então toda fórmula aberta (isto é, sem quantificadores) com parâmetros em A válida em $\mathfrak{A}$ permanece válida em $\mathfrak{B}$. Que a identidade não seja imersão elementar deve ser conseqüência, portanto, dos quantificadores: de fato, todos os elementos de $\mathfrak{A}$ terem uma dada propriedade não implica que tal propriedade se estenda a toda $\mathfrak{B}$, ou, inversamente, que exista um elemento em $\mathfrak{B}$ com uma dada propriedade não implica que haja um tal elemento em $\mathfrak{A}$. A situação é caracterizada pelo

Lema 3 (BS 4.1.8). Se $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, então: $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ se e somente se, dados quaisquer $\phi(v, v_1, \ldots, v_n)$ fórmula de L e $a_1, \ldots, a_n \in A$ de modo que $\mathfrak{B} \models \exists v\, \phi(v)[a_1, \ldots, a_n]$, existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{B} \models \phi[a, a_1, \ldots, a_n]$.

Suponha que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$: pelo Lema 1, $\mathfrak{A} \models \exists v\, \phi(v)[a_1, \ldots, a_n]$, donde existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \phi[a, a_1, \ldots, a_n]$ e assim $\mathfrak{B} \models \phi[a, a_1, \ldots, a_n]$.

Por indução na estrutura das fórmulas, provamos a recíproca. A caracterização do Lema 1 é satisfeita, evidentemente, por fórmulas abertas ($\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$) e também por conjunções e negações de fórmulas para as quais seja válida tal condição.

Suponha que valha para $\phi(v, v_1, \ldots, v_n)$. Se $\mathfrak{A} \models \exists v\, \phi(v)[a_1, \ldots, a_n]$, então existe $a \in A \subseteq B$ tal que $\mathfrak{A} \models \phi[a, a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \phi[a, a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \exists v\, \phi(v)[a_1, \ldots, a_n]$. Por outro lado, se $\mathfrak{B} \models \exists v\, \phi(v)[a_1, \ldots, a_n]$, por hipótese existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{B} \models \phi[a, a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \phi[a, a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \exists v\, \phi(v)[a_1, \ldots, a_n]$.

QED

Exemplo 4 (BS 4.1.3). $(\mathbb{Q}, <) \prec (\mathbb{R}, <)$ com $<$ usuais, mas tais estruturas não são isomorfas.

Sejam $\phi(v, v_1, \ldots, v_n)$ fórmula da linguagem adequada e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{R}$ tais que $(\mathbb{R}, <) \models \phi[b, a_1, \ldots, a_n]$. Permutando os índices das variáveis se necessário, podemos assumir que $a_1 < \ldots < a_n$. Aplicaremos agora o último lema.

Se $b \in \mathbb{Q}$, não há o que provar. Suponha então que b é irracional, $a_k < b < a_{k+1}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. (Os casos $b < a_1$ e $a_n < b$ são análogos.) Escolha, então, $c \in \mathbb{Q}$, $a_k < c < a_{k+1}$, e considere $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leqslant a_k \text{ ou } a_{k+1} \leqslant x \\ \frac{c-a_k}{b-a_k}(x - a_k) + a_k & \text{se } a_k < x \leqslant b \\ \frac{a_{k+1}-c}{a_{k+1}-b}(x - b) + c & \text{se } b < x < a_{k+1} \end{cases}.$$

Vemos que h é uma função crescente bijetora, ou seja, é um isomorfismo, que fixa cada a_i e $h(b) = c$. Assim, h é uma imersão elementar de $(\mathbb{R}, <)$ a $(\mathbb{R}, <)$, donde $(\mathbb{R}, <) \models \phi[h(b), h(a_1), \ldots, h(a_n)]$, isto é, $(\mathbb{R}, <) \models \phi[c, a_1, \ldots, a_n]$, com $c \in \mathbb{Q}$. Então, pelo lema, $(\mathbb{Q}, <) \prec (\mathbb{R}, <)$.

Não existe isomorfismo entre essas estruturas pois uma é enumerável e a outra não.

Outro resultado invoca a descrição de estruturas por um conjunto de constantes correspondendo ao próprio domínio:

Teorema 5. $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ é imersão elementar se e somente se $(\mathfrak{A}, (a)_{a\in A}) \equiv (\mathfrak{B}, (h(a))_{a\in A})$.

$(\mathfrak{A}, (a)_{a\in A})$ e $(\mathfrak{B}, (h(a))_{a\in A})$ são estruturas de uma nova linguagem L_A, obtida de L apropriada a $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ adicionado-se mais constantes, uma para cada elemento de A, e as interpretações de uma mesma constante são correspondentes, por exemplo a e $h(a)$. Referimo-nos à equivalência elementar em L_A.

Para a implicação direta, suponha $\sigma(c_1, \ldots, c_n)$ sentença de L_A, onde $c_1, \ldots, c_n$ são as novas constantes que ocorrem em σ. Note que, substituindo-se essas constantes por variáveis distintas que não ocorram em σ, obtemos uma fórmula de L: podemos, permutando variáveis se necessário, supor que seja $\sigma(v_1, \ldots, v_n)$. Se a_i corresponde à constante c_i, temos $(\mathfrak{A}, (a)_{a\in A}) \models \sigma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \sigma[a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \sigma[h(a_1), \ldots, h(a_n)] \Rightarrow (\mathfrak{B}, (h(a))_{a\in A}) \models \sigma$.

Reciprocamente, $\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow (\mathfrak{A}, (a)_{a\in A}) \models \phi(c_1, \ldots, c_n) \Rightarrow (\mathfrak{B}, (h(a))_{a\in A}) \models \phi(c_1, \ldots, c_n) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \phi[h(a_1), \ldots, h(a_n)]$. QED

Os teoremas BS 4.1.10, 11 e 12 prosseguem nessa direção e são freqüentemente lembrados em argumentos da teoria.

Um objeto sintático da Teoria dos Modelos é a *teoria*, conjunto consistente de sentenças de uma linguagem. Por exemplo, dada uma família $\mathcal{I}$ de estruturas relacionais de mesmo tipo, o conjunto $Th(\mathcal{I})$ de sentenças válidas em todas as estruturas de $\mathcal{I}$ é uma teoria. Define-se também $M(\Sigma)$, a classe dos modelos da teoria Σ.

Dada uma teoria Σ, definimos o conjunto Σ^* de todas as sentenças σ conseqüências de Σ por prova formal ($\Sigma \vdash \sigma$). Podemos enunciar, então, o importante Teorema da Completude deste modo:

Teorema 6 (BS 7.1.1: Completude). $\Sigma^* = Th(M(\Sigma))$. (Toda teoria tem modelo.)

Na determinação de propriedades de modelos de Σ, pressupomos suas particularidades e também dispomos de todos os métodos matemáticos, tanto de primeira como de segunda ordem, e conceitos como convergência, fecho algébrico e cardinalidade. Uma vez que se prove, assim, que uma sentença σ da linguagem apropriada (de primeira ordem) é válida nesses modelos (ou seja, como veremos depois, as estruturas de $M(\Sigma)$ têm a propriedade de primeira ordem dada por σ), conclui-se que $\Sigma \vdash \sigma$: existe uma prova *de primeira ordem* de σ a partir de Σ, como o Lema 16 exemplifica.

Uma teoria Σ é *completa* se, para toda sentença σ da linguagem de Σ, $\Sigma \vdash \sigma$ ou $\Sigma \vdash \sim\sigma$. Deixamos para o leitor demonstrar esta caracterização semântica, em oposição à definição sintática, das teorias completas:

Fato 7. Uma teoria Σ é completa se e somente se, dadas quaisquer $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \boldsymbol{M}(\Sigma)$, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Desse modo, pode-se estudar uma teoria completa Σ simplesmente se estudando um modelo seu, o mais simples ou conhecido possível, $\mathfrak{A}$ e concluindo-se que $\Sigma^* = Th(\mathfrak{A})$. A seção 9.1 de [Bell, Slomson] traz diversos exemplos de teorias completas (a partir da pág. 179).

Há outras situações em que o estudo de uma teoria é facilitado. Por exemplo, se Σ for *modelo-completa*, isto é, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ para todas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \boldsymbol{M}(\Sigma)$, então toda imersão entre modelos de Σ é elementar e, portanto, preserva a validade de fórmulas. Vários exemplos são apresentados na seção 9.5 de [Bell, Slomson].

Algumas teorias têm *modelos primos*: $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{M}(\Sigma)$ é modelo primo de Σ se todo modelo de Σ tem subestrutura isomórfica a $\mathfrak{A}$. Novamente, o leitor pode mostrar o

Fato 8. Uma teoria modelo-completa com modelo primo é completa.

Uma das conseqüências do Teorema da Completude é a Compacidade: um conjunto de sentenças tem modelo se e somente se é *finitamente satisfazível*, isto é, se todos os seus subconjuntos finitos têm modelo. Já que a Compacidade pode ser usada em uma demonstração da Completude, apresentamos uma prova independente no Teorema 30.

Observamos, finalmente, que um modelo para uma teoria faz parte, em geral, da Teoria dos Conjuntos. Por exemplo, com as interpretações usuais, $\mathbb{R}^2$ é um modelo para a Geometria Euclideana Plana supondo-se corretas as propriedades de $\mathbb{R}$ sobre as quais se fundamentam as verificações dos axiomas geométricos: $\mathbb{R}$ com essas propriedades é construído na Teoria dos Conjuntos, cuja consistência é indecidível. Entretanto, é relevante a consideração de estruturas cujos domínios não são conjuntos (mas são *classes* ou coleções de *átomos*), possivelmente *concretas*, embora não façam parte, formalmente, da Teoria dos Modelos. Veja Observação em [Bell, Slomson], pág. 65.

Digressão: a definição de satisfação — Teoremas de Löwenheim–Skolem

Não apresentamos, na primeira seção, uma definição de satisfação ou validade de uma fórmula em uma estrutura de tipo adequado, porque se trata de um conceito bastante divulgado nos cursos básicos de Matemática, como Álgebra Linear ou Geometria Não-Euclideana — verificar se uma dada estrutura é espaço vetorial ou se uma coleção de elementos rotulados pontos e retas com uma relação binária "pertence a" satisfaz os axiomas de geometria de incidência plana.

Aqui, explicitaremos a definição formal de satisfação de uma fórmula, devida a A. Tarski e cuja idéia central é  $\models$ "chove" $\Leftrightarrow$ , ou seja, o valor de uma fórmula é o mesmo de sua expressão metamatemática.[4] Observaremos, em um exemplo da Teoria dos Conjuntos, que a

[4] O ponto de partida de [Tarski], pág. 155, é exemplificado na página seguinte como " 'it is snowing' is a true sentence if and only if it is snowing". Precisamente, corresponde às Defs. 22 e 23, pp. 193–5, em relação a um "universo" completo (no caso específico, o universo de todas as classes), o que difere totalmente do conceito de validade universal. Por outro lado, as Defs. 24 e 25, pág. 200, tratam da satisfação em um domínio. (Nossa

única diferença real é, efetivamente, a generalidade e passaremos então a resultados de Löwenheim e Skolem sobre cardinalidade de modelos.

Fixada uma realização $\mathfrak{A}$ da linguagem em consideração, associamos a cada variável v_n um *parâmetro* $a_n \in A$. Tal associação x, chamada *valoração*, é considerada somente quanto a variáveis livres e indicada como $\phi[a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}]$, se ϕ é uma fórmula com variáveis livres $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$, ou como índice no símbolo $\models_x$. A valoração obtida de x substituindo-se a_n por $a \in A$ é indicada $x\binom{n}{a}$.

Procedemos, então, por indução na formação de fórmulas:[5] (Ao predicado k-ário P corresponde a relação k-ária R.)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models_x v_m = v_n \quad &\Leftrightarrow \quad a_m = a_n\ ;\\
\mathfrak{A} \models_x P(v_{n_1}, \ldots, v_{n_k}) \quad &\Leftrightarrow \quad (a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}) \in R\ ;\\
\mathfrak{A} \models_x (\phi \wedge \psi) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models_x \phi \text{ e } \mathfrak{A} \models_x \psi\ ;\\
\mathfrak{A} \models_x {\sim}\phi \quad &\Leftrightarrow \quad \text{não } \mathfrak{A} \models_x \phi\ ;\\
\mathfrak{A} \models_x \exists v_n\, \phi \quad &\Leftrightarrow \quad \text{existe } a \in A \text{ tal que } \mathfrak{A} \models_{x\binom{n}{a}} \phi\,.
\end{aligned}$$

Assim, dados $\mathfrak{A}$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ e uma fórmula $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ da linguagem apropriada, dizemos que ϕ é *válida* em $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}$ *satisfaz* ou *realiza* ou é *modelo* de ϕ com tais parâmetros, se $\mathfrak{A} \models_x \phi$ para uma valoração x com tais parâmetros, e escrevemos simplesmente $\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$. Se Σ é conjunto de sentenças, $\mathfrak{A} \models \Sigma$ se, para toda $\sigma \in \Sigma$, $\mathfrak{A} \models \sigma$.

Como exemplo, consideraremos esta estrutura de [Zimbarg]: $(\mathbb{N}, E)$, em que $E \subseteq \mathbb{N}^2$ e $(a, b) \in E \Leftrightarrow b = 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_m}$, $0 \leqslant a_1 < \ldots < a_m$ e $a = a_i$ para algum $1 \leqslant i \leqslant m$. (Chamamos a atenção para as desigualdades estritas, que deixaremos implícitas a seguir. Assim, todas as somatórias nesta seção são consideradas sem repetição.)

Veremos que tal estrutura verifica todos os axiomas usuais de Teoria dos Conjuntos, com exceção do Axioma da Infinidade. Ao enunciá-los, faremos uso das abreviações usuais.

O Axioma de Existência é imediatamente verificado. Na forma $\exists x\,(x = x)$, basta tomar para x qualquer elemento de $\mathbb{N} \neq \emptyset$; na forma $\exists x \forall z\, {\sim}(z \in x)$ (Axioma do Vazio), tomamos $x = 0$.

A validade do Axioma da Extensionalidade $\forall x \forall y\,(x = y \leftrightarrow \forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y))$ é imediata se lembrarmos as propriedades de representação binária dos naturais.

Este é o Axioma do Par: $\forall x \forall y \exists w \forall z\,(z \in w \leftrightarrow (z = x \vee z = y))$. Se $x \neq y$, tome $w = 2^x + 2^y$; se $x = y$, tome $w = 2^x$.

Axioma das Partes: $\forall x \exists w \forall z\,(z \in w \leftrightarrow \forall y\,(y \in z \rightarrow y \in x))$. Dado $x = 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_m}$, tome $w = \sum 2^\alpha$, onde α percorre sem repetição todos os $\sum 2^{a_i}$ dados pelos arranjos de $1 \leqslant i \leqslant m$ sem repetição.

Axioma da União: $\forall x \exists w \forall z\,(z \in w \leftrightarrow \exists y\,(y \in x \wedge z \in y))$. Dado $x = 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_m}$, $a_i = 2^{a_{i1}} + \ldots + 2^{a_{im_i}}$, tome $w = \sum 2^{a_{ij}}$, somatória (sem repetição) sobre todos $1 \leqslant j \leqslant m_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

representação pictórica coloca-se entre as duas possibilidades.) Finalmente, a pág. 221 conclui: "The method of construction sketched there can be applied as a whole to other languages of the 1st order."

[5] Usaremos essa definição explicitamente na seção "Ultraprodutos e infinitésimos", pág. 17, na demonstração do Teorema de Loś

O Axioma da Separação é, na verdade, um esquema (coleção) de axiomas. Se $\phi(v)$ é uma fórmula qualquer de uma variável livre da linguagem em consideração, devemos verificar $\forall x \exists y \forall t\,(t \in y \leftrightarrow t \in x \wedge \phi(t))$. Com $x = 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_m}$, temos $y = \sum 2^{a_i}$, onde a soma é feita sobre os i tais que $(\mathbb{N}, E) \models \phi[a_i]$. Analogamente, podem-se verificar formulações mais complexas desse axioma.

Axioma da Regularidade: $\forall x\,(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y\,(y \in x \wedge x \cap y = \emptyset))$. Com $x = 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_m}$, tome $y = a_1$ (de fato existe pois $x \neq 0$). Por definição, $(y, x) \in E$; suponha $z \in \mathbb{N}$ tal que $(z, x), (z, y) \in E$: então $z = a_i$ para algum i e, como $(z, a_1) \in E$, $2^z \leqslant a_1 \leqslant a_i = z$, absurdo.

O Axioma da Infinidade usa também a abreviação $x' : x \cup \{x\}$ e escreve-se $\exists x\,(\emptyset \in x \wedge \forall y\,(y \in x \rightarrow y' \in x))$. Suponha agora que $b \in \mathbb{N}$ satisfaça essa propriedade de x. Como $(0, b) \in E$, existe de fato a_m o maior elemento de b com respeito à ordem usual em $\mathbb{N}$. Mas $(a_m, a'_m) \in E \Rightarrow a'_m \geqslant 2^{a_m} > a_m$, donde $(a'_m, b) \notin E$, contra a hipótese (falsa) original.

Os Axiomas da Escolha e da Substituição exigem mais abreviações, de modo que não escreveremos as sentenças correspondentes.

O Axioma da Substituição é também um esquema de axiomas. Suponha que $\phi(u, v)$ é uma fórmula de modo que para todo $a \in \mathbb{N}$ existe um único $b \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathbb{N}, E) \models \phi[a, b]$. Dado $x \in \mathbb{N}$, devemos mostrar que existe $y \in \mathbb{N}$ obtido substituindo-se cada elemento de x por sua "imagem" por ϕ: se $x = 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_m}$, tome $y = \sum 2^{b_i}$, onde $b_i \in \mathbb{N}$ é tal que $(\mathbb{N}, E) \models \phi[a_i, b_i]$ e a soma é sem repetição sobre todos $1 \leqslant i \leqslant m$.

O Axioma da Escolha, em uma de suas formas, enuncia-se deste modo: para todo $x \neq \emptyset$ tal que $\forall y \in x\ (y \neq \emptyset)$, existe $f : x \rightarrow \bigcup x$ tal que $\forall y \in x\ (f(y) \in y)$. Lembrando que, em $(\mathbb{N}, E)$, f deve ser um elemento de $\mathbb{N}$, dado $x = 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_m}$, tome

$$f = \sum 2^{2^{2^{a_i}} + 2^{2^{a_i} + 2^{b_i}}} ,$$

onde b_i é o menor elemento de a_i. (Assumimos a definição $\{\{a_i\}, \{a_i, b_i\}\}$ de par ordenado.)

Concluímos que o Axioma da Infinidade não é conseqüência dos demais e que estes são consistentes entre si. Exibindo-se também um modelo de todos os axiomas, concluiríamos que o Axioma da Infinitude é *independente* dos demais.

É um bom momento para apresentarmos o Teorema de Löwenheim–Skolem, fundamental em diversos argumentos da Teoria dos Modelos e que, em seu enunciado, requer apenas o conceito de satisfação:

Teorema 9 (BS 4.3.5: Löwenheim–Skolem). Se Σ é uma teoria com modelo infinito, Σ tem modelos de todos os cardinais $\geqslant \aleph_0$, card Σ.

Frisamos que não se faz qualquer alusão à linguagem nem no enunciado do teorema nem no contexto em que for utilizado: a teoria Σ define a linguagem L dos predicados que contém (que será sublinguagem de todas as linguagens que possam ter Σ como teoria).

Esta é uma aplicação simples do teorema, enunciada para a Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel, ZF, mas válida para outras teorias semelhantes ou mais fracas:

Exemplo 10 (Paradoxo de Skolem). Se ZF for consistente, terá modelo enumerável, em que existem elementos não-enumeráveis.

Pela Completude (Teorema 6), uma teoria consistente tem modelo. No caso de ZF, como $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$ são todos distintos, tal modelo é infinito.

Observe que ZF é enumerável: como a linguagem apropriada tem um número finito de predicados, suas fórmulas (finitas) são em quantidade enumerável; portanto, os axiomas (incluindo os de esquemas) são em quantidade enumerável. Assim, existe um modelo enumerável $\mathfrak{A}$ de ZF.

Pelos axiomas usuais, $\mathfrak{A}$ contém (uma "cópia" de) $\mathbb{N}$ e portanto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, que é não-enumerável. Contudo, os conjuntos pertencentes a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ são elementos de A enumerável.

Não há nada paradoxal — mostra-se somente que o conceito "enumerável" não é *absoluto* ou independente da interpretação $\mathfrak{A}$.

De fato, suponha que $\mathfrak{A}$ é um modelo transitivo *standard* de ZF, isto é, $x \in y \in A \Rightarrow x \in A$ e sua relação de pertinência E é dada por $(x, y) \in E \Leftrightarrow x \in y$. Seja α um ordinal não-enumerável com uma interpretação $\alpha^{\mathfrak{A}} \in A$. Já que $\alpha^{\mathfrak{A}} \subseteq A$, $\alpha^{\mathfrak{A}}$ é enumerável: existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to \alpha^{\mathfrak{A}}$. Concluímos que $f \notin A$, pois $\alpha^{\mathfrak{A}}$ é não-enumerável em $\mathfrak{A}$.

Entretanto, o conceito "ter n elementos", para cada $n \in \mathbb{N}$, é absoluto (para modelos transitivos *standard*). Assim, embora cardinais infinitos possam colapsar em $\aleph_0$, o mesmo não ocorre com cardinais finitos.

O Teorema de Löwenheim–Skolem que enunciamos é, na prática, apenas um corolário de dois outros, que carregam o mesmo nome, distinguidos pelos rótulos de "para cima" e "para baixo". Estes podem ser encontrados na seção 4.3 de [Bell, Slomson], juntamente com os dois teoremas que os provam e que nos provêem de extensões elementares para várias cardinalidades: considerando-se estruturas de um mesmo tipo cuja linguagem tenha cardinal ρ,

Teorema 11 (BS 4.3.1). Sejam $\mathfrak{A}$ estrutura infinita e $C \subseteq A$. Para todo cardinal β que satisfaça $\operatorname{card} C, \rho \leqslant \beta \leqslant \operatorname{card} A$, existe uma estrutura $\mathfrak{B}$ de cardinal β tal que $\mathfrak{A}|_C \subseteq \mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$.[6]

Teorema 12 (BS 4.3.3). Uma estrutura infinita $\mathfrak{A}$ tem extensão elementar de qualquer cardinal $\geqslant \rho$, $\operatorname{card} A$.

Nesta seção, vimos um modelo para quase todos os axiomas da Teoria dos Conjuntos. Do mesmo modo, estudam-se modelos das teorias de espaços vetoriais, planos de incidência, corpos algebricamente fechados, etc. Em tais casos, contudo, as estruturas consideradas são elas próprias espaços, planos e corpos. É um caso vazio caracterizar estruturas que sejam conjuntos, pois todo domínio é, por definição, um conjunto: a linguagem adequada para tratar conjuntos não tem predicados (nem mesmo $\in$), mas apenas o símbolo de igualdade; a teoria satisfeita por conjuntos não-vazios é vazia (não tem sentenças); isomorfismo caracteriza mesma cardinalidade. Finalmente, observamos que nem todas as propriedades que são formuladas em Teoria dos Conjuntos podem

[6] $\mathfrak{A}|_C = (C, \{R_\xi \cap C^{\mu(\xi)} \mid \xi < \alpha\})$, na notação de nossa primeira seção

ser formuladas nesta linguagem: veremos na próxima seção que, por exemplo, "ser finito" não é axiomatizável.

Algumas sentenças e teorias importantes

Para cada $n \geqslant 2$, a sentença

$$\exists^{\geqslant n} : \exists v_1 \ldots \exists v_n \bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \sim(v_i = v_j)$$

é satisfeita apenas por domínios com n ou mais elementos. Consideremos também a sentença $\exists!^n : \exists^{\geqslant n} \wedge \sim\exists^{\geqslant n+1}$, satisfeita por domínios com exatamente n elementos. Para $n = 1$, escrevemos $\exists!^1 : \sim\exists^{\geqslant 2}$, já que todo domínio é, por definição, não-vazio (não é necessário definir $\exists^{\geqslant 1}$).

A importância dessas sentenças é que, para $n \geqslant 1$ finito fixado, à propriedade "ter n elementos" corresponde uma sentença (em linguagem de primeira ordem) que é satisfeita por uma estrutura relacional se e somente se essa estrutura tem tal propriedade, dita então de *primeira ordem*.

Esse conceito é o mesmo de propriedade *finitamente axiomatizável*, ou caracterizada por um número finito de sentenças: basta considerar sua conjunção.

Generalizando-se, a propriedade "ser infinito" é chamada de *primeira ordem geral*, porque há uma teoria cujos modelos são precisamente aqueles que têm domínios infinitos: $\infty = \{\exists^{\geqslant n} \mid n \geqslant 2\}$.

A propriedade "ser finito", entretanto, não é de primeira ordem geral, isto é, não há teoria (em particular, sentença) que a caracterize. Isso porque

Teorema 13 (BS 5.3.4). Se uma teoria tem modelos finitos arbitrariamente grandes, então essa teoria tem um modelo infinito.

Suponha que Σ é uma teoria com modelos finitos arbitrariamente grandes: então o conjunto de sentenças $\Sigma \cup \infty$ é finitamente satisfazível. Pela Compacidade (Teorema 30), $\Sigma \cup \infty$ tem um modelo, obrigatoriamente infinito.

QED

Quando aplicamos esse resultado a uma teoria Σ que pretensamente significasse "ser finito", concluímos que Σ admitiria um modelo infinito finito, um absurdo. Por negação de sentenças, temos também que "ser infinito" não é uma propriedade finitamente axiomatizável.

Esse teorema é demonstrado de outro modo em [Chang, Keisler] (Corolário 2.1.5): adicionamos constantes c_n, $n \in \mathbb{N}$, à linguagem da teoria em questão e tomamos $\infty = \{\sim(c_n = c_m) \mid n, m$ distintos em $\mathbb{N}\}$. O modelo infinito para a teoria é a *redução* (simplesmente desprezamos as novas constantes) daquele obtido pela Compacidade.

Outros exemplos e contra-exemplos de propriedades de primeira ordem são dados na seção 5.3 de [Bell, Slomson].

No estudo de corpos, a linguagem apropriada tem duas constantes, 0 e 1, e dois operadores binários (infixos), + e . — omitiremos parênteses correspondentes à precedência usual e também o símbolo da segunda operação, indicando-a pelo modo usual de justaposição. A propriedade "ser corpo" é caracterizada pela teoria cujas sentenças são os fechos destas fórmulas:

$$x + y = y + x,\ xy = yx,\ x + (y + z) = (x + y) + z,\ x(yz) = (xy)z,\ 1x = x,$$
$$0 + x = 0,\ x(y + z) = xy + xz,\ \exists y\,(x + y = 0),\ {\sim}(x = 0) \to \exists y\,(xy = 1),\ {\sim}(0 = 1)\ .$$

Os números naturais podem ser introduzidos na linguagem dos corpos pelo modo natural e comum: n abrevia $(0 + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\ \text{vezes}})$.[7] Para cada p natural primo, a sentença $C_p : p = 0$ é satisfeita por corpos somente de característica p. Os corpos de característica 0 são aqueles que satisfazem $C_0 = \{{\sim}C_p \mid p \text{ natural primo}\}$.

Podemos também introduzir a abreviatura $x^n : (1.\underbrace{x \ldots x}_{n\ \text{vezes}})$. Assim, a teoria ACF dos corpos algebricamente fechados é obtida adicionando-se aos axiomas de corpo as sentenças

$$\tau_n : \forall x_0 \ldots \forall x_n\,({\sim}(x_n = 0) \to \exists y\,(x_0 y^0 + \ldots + x_n y^n = 0))$$

para $n \geqslant 2$. Por exemplo,

Teorema 14. ACF é modelo-completa.

Uma prova, através do Teste de Robinson (BS 9.4.6), é dada no item j), seção 5 do Capítulo 9 de [Bell, Slomson].

Corolário 15. As teorias dos corpos algebricamente fechados de característica especificada são completas.

Basta observar que, para cada p primo, todo modelo de $ACF \cup \{C_p\}$ contém o corpo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e todo modelo de $ACF \cup C_0$ contém o corpo $\mathbb{Q}$, contendo então seus fechos algébricos, que são os modelos primos das teorias correspondentes. QED

Observamos que $\mathbb{C}$ é um modelo de $ACF \cup C_0$ mais bem conhecido que $\overline{\mathbb{Q}}$; portanto, em vários casos, é mais interessante escrever $(ACF \cup C_0)^* = Th(\mathbb{C})$.

A linguagem apropriada para falarmos de ordens contém um predicado binário $\leqslant$, que escreveremos infixo. Uma ordem linear é caracterizada pelos fechos das fórmulas

$$x \leqslant x,\ x \leqslant y \wedge y \leqslant x \to x = y,\ x \leqslant y \wedge y \leqslant z \to x \leqslant z,\ x \leqslant y \vee y \leqslant x\ .$$

Como usual, $x < y$ abrevia $(x \leqslant y \wedge {\sim}(x = y))$.

Na linguagem de corpos ordenados, às sentenças vistas para corpos e ordens adicionam-se os fechos de

$$x < y \to x + z < y + z,\ 0 < x \wedge 0 < y \to 0 < xy$$

[7] Formalmente, 0 como a própria constante e o sucessor de n como $(n+1)$, por exemplo, $3 : (((0+1)+1)+1)$. Tal rigor não é necessário devido à associatividade do operador $+$. Poderíamos também definir precedência (interna) de operadores da esquerda para a direita, como em algumas linguagens de programação. Considerações análogas devem ser feitas para x^n, a seguir

para caracterizar-se os corpos ordenados, sendo que $\leqslant$, logo $<$, como relação não tem precedência sobre operadores. Essa teoria acrescida das sentenças τ_n, n ímpar, e $\forall x\,(0 < x \to \exists y\,(x = y^2))$ constitui a teoria RCF dos corpos reais fechados. Por exemplo, com as interpretações usuais de ordem e operações, $\mathbb{R}$ é modelo de RCF.

As convenções mencionadas quanto a $+$, $.$ e $\leqslant$, $<$ a respeito de infixação, justaposição e precedência serão adotadas em todo o texto.

Veremos, nas próximas seções, duas aplicações da Teoria dos Modelos que fazem uso do que já desenvolvemos.

Princípio da transferência de Tarski

Na linguagem L da teoria RCF, termos são polinômios e fórmulas atômicas são comparações $\leqslant$ ou $=$ entre esses termos; podemos substituir os axiomas de modo que sejam comparações $<$ ou $=$. (Na teoria ACF, observamos que se fazem somente comparações do tipo $=$.)

Lema 16. $RCF \vdash ((p_1 = 0) \wedge \ldots \wedge (p_s = 0) \leftrightarrow (\sum_{i=1}^{s} p_i^2 = 0))$, em que $p_1, \ldots, p_s$ são termos da linguagem em consideração.

O fecho da fórmula em questão é válido em todos os corpos reais fechados: como observamos, RCF prova sintaticamente essa fórmula. (A importância desse lema reside em que simplificamos $p_1, \ldots, p_s$ a um único polinômio nulo.) QED

Demonstraremos o *princípio da transferência de Tarski*: os corpos reais fechados são aqueles elementarmente equivalentes a $\mathbb{R}$ (nessa linguagem), isto é, $RCF^* = Th(\mathbb{R})$. (Adaptamos material de [Prestel], a cuja numeração referimos os resultados desta seção.)

Primeiramente, estabelecemos uma importante caracterização topológica da Compacidade, para mostrarmos o Lema da Separação. Como conjunção de sentenças é sentença e $\forall x\,(x = x)$ é uma sentença universalmente válida, a coleção $\{M(\sigma) \mid \sigma$ sentença da linguagem de tipo $\mu\}$ é base para uma topologia na classe de todas as estruturas de tipo μ.

Lema 17. Se Σ é um conjunto de sentenças, $M(\Sigma)$ é compacto na topologia gerada pelas classes $M(\sigma)$, σ sentença da linguagem de Σ.

Suponha K um conjunto de sentenças de modo que $M(\Sigma) \subseteq \bigcup_{\sigma \in K} M(\sigma)$. Então $\Sigma \cup \{\sim\sigma \mid \sigma \in K\}$ não tem modelo: pelo Teorema 30, $\Sigma \cup \{\sim\sigma \mid \sigma \in K_0\}$ não tem modelo para algum subconjunto finito K_0 de K. Assim, $M(\Sigma) \subseteq \bigcup_{\sigma \in K_0} M(\sigma)$. QED

Lema 18 (2.8: Separação). Sejam Σ_1, Σ_2 teorias e Γ um conjunto de sentenças, que definem uma linguagem comum. Assuma que para todos $\mathfrak{A} \in M(\Sigma_1)$ e $\mathfrak{B} \in M(\Sigma_2)$ exista $\gamma \in \Gamma$ tal que $\mathfrak{A} \models \gamma$ e $\mathfrak{B} \models \sim\gamma$. Então existem $\gamma_{ij} \in \Gamma$, $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, $m, n \in \mathbb{N}$, de modo que para $\gamma^* : \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} \gamma_{ij}$ temos $M(\Sigma_1) \subseteq M(\gamma^*)$ e $M(\Sigma_2) \subseteq M(\sim\gamma^*)$.

Fixe $\mathfrak{A} \in M(\Sigma_1)$ e escolha para cada $\mathfrak{B} \in M(\Sigma_2)$ uma sentença $\gamma_{\mathfrak{B}} \in \Gamma$ separando $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ como no enunciado. Então $\bigcup_{\mathfrak{B} \in M(\Sigma_2)} M(\sim\gamma_{\mathfrak{B}})$ é uma cobertura por abertos de $M(\Sigma_2)$ compacto:

existem $\gamma_{\mathfrak{B}_1}, \ldots, \gamma_{\mathfrak{B}_n} \in \Gamma$ de modo que $M(\Sigma_2) \subseteq M(\sim\gamma_{\mathfrak{B}_1}) \cup \ldots \cup M(\sim\gamma_{\mathfrak{B}_n})$. Seja $\gamma_{\mathfrak{A}}$ a conjunção dessas sentenças: $\mathfrak{A} \in M(\gamma_{\mathfrak{A}})$ e $M(\Sigma_2) \subseteq M(\sim\gamma_{\mathfrak{A}})$.

Novamente, $\bigcup_{\mathfrak{A}\in M(\Sigma_1)} M(\gamma_{\mathfrak{A}})$ é uma cobertura por abertos de $M(\Sigma_1)$ compacto: podemos escrever $M(\Sigma_1) \subseteq M(\gamma_{\mathfrak{A}_1}) \cup \ldots \cup M(\gamma_{\mathfrak{A}_m})$. Tomando γ^* a disjunção de $\gamma_{\mathfrak{A}_1}, \ldots, \gamma_{\mathfrak{A}_m}$, obtemos a separação desejada. Note que γ^* é a disjunção de conjunções de sentenças de Γ, como enunciado.

QED

[Prestel] adota esta notação: para Γ conjunto de sentenças da linguagem apropriada, $\mathfrak{A} \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} \mathfrak{B}$ se, para toda $\gamma \in \Gamma$, $\mathfrak{A} \models \gamma \Rightarrow \mathfrak{B} \models \gamma$.

Corolário 19 (2.9). Sejam Σ e Γ conjuntos de sentenças e assuma que existem $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma$ tais que γ_0 é falsa e γ_1 é válida em todo modelo de Σ. Se existe uma sentença σ de modo que, para todos $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ modelos de Σ, $\mathfrak{A} \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} \mathfrak{B}$ implica $\mathfrak{A} \overset{\sigma}{\rightsquigarrow} \mathfrak{B}$, então existem $\gamma_{ij} \in \Gamma$, $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, $m, n \in \mathbb{N}$, tais que $(\sigma \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} \gamma_{ij}) \in Th(M(\Sigma))$.

Tome $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\sigma\}$ e $\Sigma_2 = \Sigma \cup \{\sim\sigma\}$. Se Σ_1 ou Σ_2 é inconsistente, temos respectivamente $(\sigma \leftrightarrow \gamma_0) \in Th(M(\Sigma))$ ou $(\sigma \leftrightarrow \gamma_1) \in Th(M(\Sigma))$. Se Σ_1, Σ_2 forem consistentes, podemos aplicar o lema anterior: se $\mathfrak{A} \in M(\Sigma_1)$ e $\mathfrak{B} \in M(\Sigma_2)$, então $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in M(\Sigma)$ e $\mathfrak{A} \models \sigma$ e $\mathfrak{B} \models \sim\sigma$, donde <u>não</u> $\mathfrak{A} \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} \mathfrak{B}$. Obtendo γ^*, note que $M(\Sigma \cup \{\sigma\}) \subseteq M(\gamma^*)$ e $M(\Sigma \cup \{\sim\sigma\}) \subseteq M(\sim\gamma^*)$ implicam $(\sigma \rightarrow \gamma^*) \in Th(M(\Sigma))$ e $(\sim\sigma \rightarrow \sim\gamma^*) \in Th(M(\Sigma))$. QED

Agora, podemos provar o teorema proposto:

Teorema 20 (3.2: Eliminação de quantificadores). Para toda $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ fórmula de L, existe γ fórmula (da mesma linguagem) sem quantificadores e sem variáveis livres exceto $v_1, \ldots, v_n$ tal que $RCF \vdash \forall v_1 \ldots \forall v_n\, (\phi \leftrightarrow \gamma)$.

O que de fato mostraremos é como eliminar um quantificador, sendo um passo da indução que tem como base as fórmulas abertas da linguagem. Assim, consideramos $\phi : \exists v\, \psi(v, v_1, \ldots, v_n)$, ψ sem quantificadores.

Adicionamos a L as constantes $c_1, \ldots, c_n$, obtendo uma linguagem L$'$. Uma estrutura dessa linguagem é da forma $(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n)$, em que $\mathfrak{A}$ é uma estrutura de L e $a_1, \ldots, a_n \in A$. Evidentemente, as sentenças de L são sentenças de L$'$.

Seja $\Gamma(v_1, \ldots, v_n)$ o conjunto de todas as fórmulas sem quantificadores de L com variáveis livres entre $v_1, \ldots, v_n$: $\Gamma(c_1, \ldots, c_n)$ é um conjunto de sentenças de L$'$. Provaremos que, dados $(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n), (\mathfrak{B}, b_1, \ldots, b_n) \in M(RCF)$, temos

$$(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n) \overset{\Gamma(c_1,\ldots,c_n)}{\rightsquigarrow} (\mathfrak{B}, b_1, \ldots, b_n) \;\Rightarrow\; (\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n) \overset{\phi(c_1,\ldots,c_n)}{\rightsquigarrow} (\mathfrak{B}, b_1, \ldots, b_n)\,.$$

Feito isso, como $\Gamma(c_1, \ldots, c_n)$ é fechada sob conjunções e disjunções, o corolário acima afirma que existe $\gamma \in \Gamma(c_1, \ldots, c_n)$ (a sentença γ^* de sua demonstração) tal que

$$(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n) \models \phi(c_1, \ldots, c_n) \leftrightarrow \gamma(c_1, \ldots, c_n)$$

para todo modelo $(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n)$ de RCF. Como as constantes $c_1, \ldots, c_n$ podem ser quaisquer (RCF é uma teoria de L), vem o que nos propusemos a mostrar (bastando recordar a Completude, Teorema 6):

$$\mathfrak{A} \models \forall v_1 \ldots \forall v_n \left(\phi(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \gamma(v_1, \ldots, v_n)\right) .$$

Então, suponha $(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n), (\mathfrak{B}, b_1, \ldots, b_n) \in M(RCF)$ tais que $(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n) \overset{\Gamma(c_1,\ldots,c_n)}{\rightsquigarrow} (\mathfrak{B}, b_1, \ldots, b_n)$. Pelas sentenças atômicas de L$'$, $\rho(a_i) = b_i$ para $1 \leqslant i \leqslant n$ define um isomorfismo (que preserva ordem) $\rho : R \to S$ do subanel R de $\mathfrak{A}$ gerado por $a_1, \ldots, a_n$ ao subanel S de $\mathfrak{B}$ gerado por $b_1, \ldots, b_n$. ρ pode ser estendido aos corpos de frações de R e de S, respectivamente, e, mais ainda, aos fechos reais E, F desses corpos. Desse modo, temos $\rho : E \to F$ isomorfismo entre subcorpos reais fechados de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, $\rho(a_i) = b_i$ para $1 \leqslant i \leqslant n$.

Assumindo agora que $(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n) \models \phi(c_1, \ldots, c_n)$, isto é, $\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$, basta mostrar que $(\mathfrak{B}, b_1, \ldots, b_n) \models \phi(c_1, \ldots, c_n)$, isto é, $\mathfrak{B} \models \phi[b_1, \ldots, b_n]$. Lembramos que $\phi : \exists v\, \psi$, ψ aberta: assim, podemos assumir que ψ está na *forma disjuntiva normal* $\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m$, onde cada ψ_i é uma conjunção de fórmulas atômicas[8] (as negações de fórmulas atômicas, nessa linguagem L, são equivalentes a disjunções de outras atômicas, usando-se as propriedades de ordem). Então, como $\exists v\, \psi$ equivale a $\exists v\, \psi_1 \vee \ldots \vee \exists v\, \psi_m$, podemos assumir ainda que $\phi : \exists v\, \psi_i$, ψ_i conjunção de atômicas (omitiremos o índice i).

Como observamos antes sobre L e a teoria RCF, vemos que ψ é da forma $(0 = p(v, v_1, \ldots, v_n)) \wedge \bigwedge_{j=1}^{r} (0 < q_j(v, v_1, \ldots, v_n))$, p, q_j polinômios. Com a interpretação dada às constantes $c_1, \ldots, c_n$, por hipótese existe $a \in A$ tal que $p(a, a_1, \ldots, a_n) = 0$ e $q_j(a, a_1, \ldots, a_n) > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$. Resta mostrar que existe $b \in B$ tal que $p(b, b_1, \ldots, b_n) = 0$ e $q_j(b, b_1, \ldots, b_n) > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$.

Note que, de fato, p, q_j são polinômios em v com coeficientes $v_1, \ldots, v_n$ e "naturais" $(1 + \ldots + 1)$.

Se p não é o polinômio identicamente nulo, então $a \in E$, já que E constitui-se dos reais algébricos sobre A e p tem coeficientes em E: tome $b = \rho(a)$.

Se p é o polinômio identicamente nulo (ou se não existe p, caso em que ψ não tem subfórmula $0 = p$), sejam $r_1 < \ldots < r_t$ as raízes dos q_j em $\mathfrak{A}$: $r_1, \ldots, r_t \in E$; como a não é raiz desses polinômios, $a < r_1$ ou $r_i < a < r_{i+1}$ $(1 \leqslant i < t)$ ou $r_t < a$. Tome $b \in F$ como $\rho(r_1) - 1$ ou $\rho(r_i + r_{i+1})/2$ ou $\rho(r_t) + 1$, correspondentemente.

Assim, cada q_j tem o mesmo sinal em $b, b_1, \ldots, b_n$ que em $a, a_1, \ldots, a_n$, pois ρ é um isomorfismo.

QED

Corolário 21. *RCF é modelo-completa.*

Dada ϕ, tome γ resultado da eliminação de quantificadores. Suponha que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ modelos de RCF e que $\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$. Então $\mathfrak{A} \models \gamma[a_1, \ldots, a_n]$ e, como γ é aberta, $\mathfrak{B} \models \gamma[a_1, \ldots, a_n]$. Assim, $\mathfrak{B} \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$. QED

[8] A prova da Proposição 1.4 de [Mendelson], pág. 24, mostra que toda fórmula aberta é semanticamente equivalente a outra (também aberta) na forma disjuntiva normal

Corolário 22 (3.3). $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ corpos reais fechados com $\mathfrak{C}$ subcorpo ordenado comum: para toda fórmula $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ de L e quaisquer $c_1, \ldots, c_n \in C$, $\mathfrak{A} \models \phi[c_1, \ldots, c_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi[c_1, \ldots, c_n]$.

Corolário 23 (3.1: Princípio da transferência). $\mathfrak{A}$ é um corpo real fechado $\Leftrightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathbb{R}$.

Todo corpo real fechado, por ser ordenado, tem característica 0; portanto, podemos concluir que, como $\mathbb{R}$, contém $\mathbb{Q}$ (por isomorfismo). Aplica-se, então, o corolário anterior a sentenças.

Alternativamente, RCF é modelo-completa e tem um modelo primo: o fecho real de $\mathbb{Q}$. Assim, RCF é completa e sabemos que $\mathbb{R} \models RCF$. QED

Esta é uma conseqüência do que trabalhamos:

Sejam R um corpo real fechado e $n \in \mathbb{N}$: os subconjuntos *semi-algébricos* de R^n são aqueles gerados por união finita, intersecção finita e complementação a partir de $\{a \in R^n \mid 0 \leqslant f(a)\}$, $f \in R[x_1, \ldots, x_n]$; os *definíveis* sobre R são $\{a \in R^n | R \models \phi[a, b]\}$, $b \in R^m$ e $\phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ fórmula de L. Temos o

Teorema 24 (4.1). Os conceitos de conjuntos semi-algébricos e definíveis coincidem.

Pela eliminação de quantificadores, podemos assumir que ϕ é uma fórmula sem quantificadores, ou seja, uma combinação booleana de fórmulas atômicas que são comparações de polinômios redutíveis (pelas relações de ordem) à forma $0 \leqslant p$. Esses polinômios têm coeficientes em R: $b \in R^m$ e $(1 + \ldots + 1) \in R$.

Do mesmo modo, um conjunto semi-algébrico é definido por uma combinação booleana de comparações $0 \leqslant p$ de polinômios com coeficientes em R. QED

Corolário 25. Os semi-algébricos são fechados sob operações booleanas, fecho, interior e fronteira (na topologia de intervalo), projeções e imagens sob funções definíveis.

Uma projeção é obtida sobre uma fórmula quantificando-se existencialmente uma das variáveis livres; funções definíveis são aquelas determinadas por fórmulas da linguagem.

O problema colegial de Tarski

Para discutirmos exponenciação de números naturais, precisamos de uma linguagem L com uma constante 1 e as operações binárias infixas +, . e ^, esta indicada pelo usual "elevamento". Também adotaremos a precedência usual ^, ., +.

A teoria em consideração EXP contém os fechos destas fórmulas:

$$\begin{array}{rl} \text{i)} & x + y = y + x,\ xy = yx,\ x + (y + z) = (x + y) + z, \\ & x(yz) = (xy)z,\ x(y + z) = xy + xz,\ 1x = x,\ x^1 = x, \\ \text{ii)} & 1^x = 1, \\ \text{iii)} & (xy)^z = x^z y^z, \\ \text{iv)} & x^{y+z} = x^y x^z, \\ \text{v)} & (x^y)^z = x^{yz}. \end{array}$$

Evidentemente, o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ com as interpretações usuais de 1, +, . e $\wedge$ (indicaremos tal estrutura também como $\mathbb{N}$) é modelo de EXP, adotando-se $0^0 = 1$.

O problema colegial de Tarski simplesmente pergunta se $\mathbb{N} \models \overline{f = g} \Rightarrow EXP \vdash \overline{f = g}$ para todos os termos f, g da linguagem L.

Responderemos negativamente a essa questão, seguindo a construção de [Wilkie]. Consideremos os termos

$$f_0(x,y) : ((x+1)^x + (x^2+x+1)^x)^y \, ((x^3+1)^y + (x^4+x^2+1)^y)^x$$

e

$$g_0(x,y) : ((x+1)^y + (x^2+x+1)^y)^x \, ((x^3+1)^x + (x^4+x^2+1)^x)^y \, .$$

Primeiro, mostramos que $\mathbb{N} \models \forall x \forall y \, (f_0(x,y) = g_0(x,y))$. De fato, $f_0(x,y) = ((x+1)^x + (x^2+x+1)^x)^y \, (((x+1)(x^2-x+1))^y + ((x^2+x+1)(x^2-x+1))^y)^x = ((x+1)^x + (x^2+x+1)^x)^y \, (((x+1)^y + (x^2+x+1)^y)(x^2-x+1)^y)^x = ((x+1)^x + (x^2+x+1)^x)^y \, ((x+1)^y + (x^2+x+1)^y)^x \, (x^2-x+1)^{xy} = (x^2-x+1)^{xy} \, ((x+1)^x + (x^2+x+1)^x)^y \, ((x+1)^y + (x^2+x+1)^y)^x = ((x^2-x+1)^x((x+1)^x + (x^2+x+1)^x))^y \, ((x+1)^y + (x^2+x+1)^y)^x = ((x^3+1)^x + (x^4+x^2+1)^x)^y \, ((x+1)^y + (x^2+x+1)^y)^x = g_0(x,y)$.

Observamos que, apresentado um modelo de EXP em que não valha $\overline{f_0 = g_0}$, conclui-se que não $EXP \vdash \overline{f_0 = g_0}$. Construir tal modelo, entretanto, é extremamente complicado, sendo interessante considerar a teoria mais fraca EXP^- obtida removendo-se de EXP a última sentença, isto é, $EXP^- = EXP - \{\overline{(x^y)^z = x^{yz}}\}$.

O Lema 6.9 de [Wilkie] é coroação de um argumento sobre provas sintáticas e afirma que

Lema 26. $EXP \vdash f_0 = g_0 \Rightarrow EXP^- \vdash f_0 = g_0$.

Agora, construímos um modelo $\mathfrak{A}$ de EXP^- em que seja satisfeita a sentença $\exists x \exists y \sim (f_0(x,y) = g_0(x,y))$, equivalente à negação de $\overline{f_0 = g_0}$.

Como domínio, consideramos $A = \mathbb{N}[z]$ o conjunto dos polinômios de coeficientes naturais na variável z. Interpretamos 1, + e . como o polinômio constante 1 e as operações usuais de soma e produto de polinômios.

Resta interpretar apenas $\wedge$, o que faremos por indução na complexidade do expoente: se $m \in \mathbb{N}$, $p(z) \wedge m = \underbrace{p(z). \ldots .p(z)}_{m \text{ vezes}}$. Em particular, $p(z) \wedge 0 = 1$.

$p(z) \wedge z = z^{k_1}$, com $k_1 \in \mathbb{N}$ o maior tal que $(z^2 - z + 1)^{k_1} | p(z)$ na teoria usual de polinômios (existe, pois $k_1 = 0 \Rightarrow (z^2 - z + 1)^{k_1} = 1$).

$p(z) \wedge z^2 = (z+1)^{k_2}$, com $k_2 \in \mathbb{N}$ o maior tal que $z^{k_2} | p(z)$ (novamente, existe).

Se $m > 2$, definimos $p(z) \wedge z^m = 1$, e fazemos, de modo natural,

$$p(z) \wedge \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = \prod_{i=0}^{n} (p(z) \wedge z^i) \wedge a_i$$

quando $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, ou seja, $p(z) \wedge (a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n) = (p(z))^{a_0} (p(z) \wedge z)^{a_1} (p(z) \wedge z^2)^{a_2} = (p(z))^{a_0} z^{k_1 a_1} (z+1)^{k_2 a_2}$.

$\mathfrak{A}$ é modelo de EXP^-: verificar que $\mathfrak{A}$ satisfaz os fechos das fórmulas do grupo i) é imediato pelas interpretações dessa estrutura. A fórmula ii) também é trivialmente verificada: as definições de exponenciação aplicadas à base 1 levam, respectivamente, a $1\wedge m = 1$, $1\wedge z = z^0 = 1$, $1\wedge z^2 = (z+1)^0 = 1$ e $1\wedge z^m = 1$ para $m > 2$.

Para o fecho da fórmula iii), observemos que, para a base produto de polinômios pq, $k_1 = k_{1p} + k_{1q}$ e $k_2 = k_{2p} + k_{2q}$. Então $(pq)\wedge(a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n) = (pq)^{a_0} z^{k_1 a_1}(z+1)^{k_2 a_2} = p^{a_0} q^{a_0} z^{k_{1p}a_1 + k_{1q}a_1}(z+1)^{k_{2p}a_2 + k_{2q}a_2} = p^{a_0} z^{k_{1p}a_1}(z+1)^{k_{2p}a_2} q^{a_0} z^{k_{1q}a_1}(z+1)^{k_{2q}a_2} = p\wedge(a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n)\, q\wedge(a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n)$, usando-se apenas as regras usuais de polinômios.

Do mesmo modo, vemos que quaisquer polinômios satisfazem a fórmula iv). Com a notação original, $p\wedge(a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + b_0 + b_1 z + \ldots + b_r z^r) = p^{a_0+b_0} z^{k_1(a_1+b_1)}(z+1)^{k_2(a_2+b_2)} = p^{a_0} z^{k_1 a_1}(z+1)^{k_2 a_2} p^{b_0} z^{k_1 b_1}(z+1)^{k_2 b_2} = p\wedge(a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n)\, p\wedge(b_0 + b_1 z + \ldots + b_r z^r)$.

(Embora seja desnecessário, verifica-se que a fórmula v) não é válida em geral em $\mathfrak{A}$.)

Voltando agora à notação "elevada", temos em $\mathfrak{A}$: $f_0[z, z^2] = ((z+1)^z + (z^2+z+1)^z)^{z^2}((z^3+1)^{z^2} + (z^4+z^2+1)^{z^2})^z = (1+1)^{z^2}(1+1)^z = 2^{z^2}2^z = 1.1 = 1$ e $g_0[z, z^2] = ((z+1)^{z^2} + (z^2+z+1)^{z^2})^z((z^3+1)^z + (z^4+z^2+1)^z)^{z^2} = (1+1)^z(z+z)^{z^2} = 2^z(2z)^{z^2} = 1(z+1) = z+1 \neq 1$.

Então $\mathfrak{A} \models EXP^-$ e $\mathfrak{A} \models \exists x \exists y \sim(f_0 = g_0)$, donde, pelo lema acima, <u>não</u> $EXP \vdash \overline{f_0 = g_0}$.

[Wilkie] apresenta uma teoria mais forte que EXP com resposta positiva para o problema de Tarski: no que se segue, sua notação original * foi substituída por $'$.

Um polinômio ρ de n variáveis com coeficientes inteiros é dito *positivo* se $\rho(a_1, \ldots, a_n) > 0$ para todos $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$. Sejam t_ρ um novo operador n-ário e L$'$ a linguagem obtida de L adicionando-se todos os t_ρ, qualquer $n \in \mathbb{N}^*$. Assim, a interpretação natural de t_ρ em $\mathbb{N}^*$ é ρ.

Define-se EXP' adicionado-se a EXP os fechos em $Th(\mathbb{N}^*)$ de todas as fórmulas $f = g$ em que f, g são termos de L$'$ <u>sem</u> $\wedge$. Então o Teorema 1.9 de [Wilkie] enuncia-se

Teorema 27. Para todos os termos f, g da linguagem L, $\mathbb{N}^* \models \overline{f = g} \Rightarrow EXP' \vdash \overline{f = g}$.

Ultraprodutos e infinitésimos

O principal tema de [Bell, Slomson] é a construção de estruturas por ultraprodutos. Assim, resumiremos aqui as seções 1, 2 e 4 de seu capítulo 5.

Dado um conjunto índice $I \neq \emptyset$, um *ultrafiltro* F sobre I é $F \subseteq \mathcal{P}(I)$ tal que i) $X, Y \in F \Rightarrow X \cap Y \in F$; ii) $X \in F$ e $X \subseteq Y \subseteq I \Rightarrow Y \in F$; iii) $X \in F \Leftrightarrow I - X \notin F$ $(X \subseteq I)$.

Fixamos agora um tipo μ e estruturas $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, desse tipo. Sejam $A = \prod_{i \in I} A_i$ e $\sim_F$ esta relação em A:

$$f \sim_F g \Leftrightarrow \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in F\ .$$

Não é difícil mostrar que $\sim_F$ é, de fato, uma relação de equivalência em A. De um modo intuitivo, podemos pensar em F como o conjunto dos subconjuntos "grandes" de I e em $\sim_F$ como uma relação de igualdade "quase sempre", ou em "quase todas" as coordenadas.

Para simplificar a exposição, a partir de agora assumiremos que o tipo fixado contém um único predicado P binário. Sejam $R_i \subseteq A_i^2$, $i \in I$, as relações correspondentes: defina sobre A a relação R dada por

$$(f, g) \in R \Leftrightarrow \{i \in I \mid (f(i), g(i)) \in R_i\} \in F \,.$$

Novamente, mostra-se que $\sim_F$ é uma relação de congruência quanto a R, isto é, $f \sim_F f'$, $g \sim_F g'$ e $(f, g) \in R \Rightarrow (f', g') \in R$.

Denote f/F a classe de $f \in A$ quanto a $\sim_F$ e $\prod_{i\in I} A_i \big/ F = A/F$ o conjunto dessas classes. Nesse domínio, portanto, a relação R_F dada por

$$(f/F, g/F) \in R_F \Leftrightarrow (f, g) \in R$$

está bem definida.

O *ultraproduto* das estruturas dadas quanto ao *par ultrafiltro* I, F é a estrutura (de tipo μ)

$$\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i \big/ F = \Big(\prod_{i\in I} A_i \big/ F,\ R_F\Big) \,.$$

(Essa notação é reduzida a $\prod_F \mathfrak{A}_i$ em [Chang, Keisler], já que $I = \bigcup F$, apesar de ser ambígua, conforme sua pág. 215.)

A noção de "quase sempre" se estende a todas as fórmulas:

Teorema 28 (BS 5.2.1: Łoś). Para todos $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ fórmula da linguagem adequada e $f_1/F, \ldots, f_n/F \in \prod_{i\in I} A_i \big/ F$,

$$\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i \big/ F \models \phi[f_1/F, \ldots, f_n/F] \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \phi[f_1(i), \ldots, f_n(i)]\} \in F \,.$$

Como definimos a satisfação de uma fórmula por indução em sua complexidade, a demonstração natural desse resultado é também por indução na formação de fórmulas.

É mais conveniente, no argumento, indexar a valoração no símbolo $\models$. Sendo $x = (f_n/F)_{n\in\mathbb{N}}$ seqüência arbitrária de elementos de $\prod_{i\in I} A_i \big/ F$ e $x_i = (f_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ a seqüência correspondente em A_i, $i \in I$, devemos mostrar que $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i \big/ F \models_x \phi \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models_{x_i} \phi\} \in F$.

O caso das fórmulas atômicas $v_m = v_n$ e $P(v_m, v_n)$ é imediato a partir da definição das classes $f_m/F, f_n/F$ e da relação R_F. Por ilustração, eis a primeira situação:

$$\begin{aligned}
\textstyle\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i \big/ F \models_x v_m = v_n \quad &\Leftrightarrow \quad f_m/F = f_n/F \\
&\Leftrightarrow \quad f_m \sim_F f_n \\
&\Leftrightarrow \quad \{i \in I \mid f_m(i) = f_n(i)\} \in F \\
&\Leftrightarrow \quad \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models_{x_i} v_m = v_n\} \in F
\end{aligned}$$

Para fórmulas da forma $\psi \wedge \chi$, usamos as propriedades i) e ii) dos ultrafiltros, considerando que $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models_{x_i} \psi \wedge \chi\} = \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models_{x_i} \psi\} \cap \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models_{x_i} \chi\}$.

Para $\sim\psi$, usamos a propriedade iii), em $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models_{x_i} \sim\psi\} = I - \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models_{x_i} \psi\}$.[9]

Finalmente, consideramos a forma $\exists v_n\, \psi$. Denote $D = \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models_{x_i} \exists v_n\, \psi\}$.

Suponha que $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i \big/ F \models_x \exists v_n\, \psi$. Então existe $a \in A$ tal que $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i \big/ F \models_{x\binom{n}{a/F}} \psi$. Por hipótese de indução para $x\binom{n}{a/F}$, $E = \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models_{x_i\binom{n}{a(i)}} \psi\} \in F$, já que poderíamos tomar uma valoração em que o n-ésimo termo fosse a/F. Mas $E \subseteq D$, donde $D \in F$, o que devíamos mostrar.

Suponha agora que $D \in F$. Se $i \in D$, então $\mathfrak{A}_i \models_{x_i} \exists v_n\, \psi$, donde existe $b_i \in A_i$ tal que $\mathfrak{A}_i \models_{x_i\binom{n}{b_i}} \psi$. Pelo Axioma da Escolha, existe $b \in A$ tal que $i \in D \Rightarrow b(i) = b_i$, sendo $b(i)$ um elemento qualquer de $A_i \neq \emptyset$ se $i \notin D$. Então $D \subseteq C = \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models_{x_i\binom{n}{b(i)}} \psi\}$, donde $C \in F$. Pela hipótese de indução para $x\binom{n}{b/F}$, $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i \big/ F \models_{x\binom{n}{b/F}} \psi$, donde $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i \big/ F \models_x \exists v_n\, \psi$. QED

Corolário 29 (BS 5.2.2). Se σ é uma sentença da linguagem apropriada, $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i \big/ F \models \sigma \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \sigma\} \in F$.

Dado $I \neq \emptyset$, diz-se que uma família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ tem a *propriedade da intersecção finita* se qualquer subconjunto seu finito tem intersecção não vazia. Em suas primeiras seções, o capítulo 1 de [Bell, Slomson] ocupa-se de mostrar, por meio do Lema de Zorn, que toda família com tal propriedade pode ser estendida a um ultrafiltro sobre I.

Podemos agora demonstrar o

Teorema 30 (BS 5.4.1: Compacidade). Um conjunto Σ de sentenças é satisfazível se e somente se é finitamente satisfazível.

A implicação direta é imediata. Para a recíproca, tome I como o conjunto dos subconjuntos finitos de Σ. Assim, todo $\Delta \in I$ tem modelo $\mathfrak{A}_\Delta$.

Considere $\Delta^* = \{\Delta' \in I \mid \Delta \subseteq \Delta'\}$. A coleção $\{\Delta^* \in \mathcal{P}(I) \mid \Delta \in I\}$ pode ser estendida a um ultrafiltro F sobre I, pois tem a propriedade da intersecção finita: $\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n \in \Delta_1^* \cap \ldots \cap \Delta_n^*$.

Mostremos que $\prod_{\Delta\in I} \mathfrak{A}_\Delta \big/ F \models \Sigma$. Fixe $\sigma \in \Sigma$: denote $\Delta_0 = \{\sigma\} \in I$. Assim, se $\Delta_0 \subseteq \Delta' \in I$ então $\mathfrak{A}_{\Delta'} \models \sigma$, donde $\Delta_0^* \subseteq \{\Delta' \in I \mid \mathfrak{A}_{\Delta'} \models \sigma\}$. Já que $\Delta_0^* \in F$, $\{\Delta' \in I \mid \mathfrak{A}_{\Delta'} \models \sigma\} \in F$; pelo corolário acima, $\prod_{\Delta\in I} \mathfrak{A}_\Delta \big/ F \models \sigma$. QED

Quando todas as estruturas $\mathfrak{A}_i$ são uma mesma $\mathfrak{A}$, indicamos o ultraproduto por $\mathfrak{A}^I \big/ F$, a *ultrapotência* de $\mathfrak{A}$ quanto ao par I, F.

Defina, para $a \in A$, a função constante $a^* \in A^I$, $a^*(i) = a$, e a *imersão canônica* $d : A \to A^I \big/ F$, $d(a) = a^*/F$.

[9] Este é o único ponto em que se usa a propriedade iii); o restante da demonstração indica para quais fórmulas vale o enunciado em caso de um produto reduzido por um filtro. A Definição 6.3.1 e as Proposições 6.3.2 e 3 de [Chang, Keisler] apresentam uma caracterização completa

Lema 31 (BS 5.2.3). $d : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^I\big/F$ é uma imersão elementar.

Pois $\mathfrak{A}^I\big/F \models \phi[a_1^*/F, \ldots, a_n^*/F] \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathfrak{A} \models \phi[a_1^*(i), \ldots, a_n^*(i)]\} \in F \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n]\} \in F \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$, já que $\emptyset \notin F$.[10] Note que esta prova já demonstra que d é injetora e preserva relações, isto é, que d é uma imersão. QED

Corolário 32. Por isomorfismo, podemos considerar $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}^I\big/F$.

É fácil mostrar que, se um ultrafiltro contém um conjunto finito, contém um conjunto unitário, donde se pode concluir que o ultraproduto construído será isomorfo a um dos fatores.

Portanto, devemos procurar por ultrafiltros sem conjuntos finitos, ditos *não-principais*. Já que os subconjuntos *co-finitos* (complementos de finitos) do conjunto índice formam uma família com a propriedade da intersecção finita, existe um ultrafiltro não-principal sobre todo conjunto infinito.

Aqui, não desenvolveremos a classificação de ultrafiltros, disponível na seção 6.1 de [Bell, Slomson], restringindo-nos a identificar a noção "quase sempre" como conseqüência de "exceto em um número finito de coordenadas".

Por exemplo, tome $\mathbb{N}$ como conjunto índice e U ultrafiltro não-principal sobre $\mathbb{N}$. Vimos, nos últimos lema e corolário, que podemos considerar $\mathbb{R} \prec \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big/U$, identificando $a \in \mathbb{R}$ com $a^*/U = (a, a, \ldots)_{/U}$. Pela definição do ultraproduto, as relações são consideradas coordenada a coordenada: $1 = (1, 1, \ldots)_{/U}$ é a unidade e

$$(1, 3, 2, 19, -56, \pi, 2, 2, 2, \ldots)_{/U} = (2, 2, 2, 27, -e^4, 5, 2, 2, 2, \ldots)_{/U}$$

pois essas seqüências diferem apenas em um conjunto finito de coordenadas, que não pertence a U.

Do mesmo modo, considerando-se $+$, $\cdot$, $<$ usuais em $\mathbb{R}$, temos que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big/U$ é um corpo ordenado, mas não arquimediano: o módulo de $(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)_{/U}$ é menor que $1/m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ não-nulo[11], ou seja, $(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)_{/U}$ é um *infinitésimo*.

Se $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big/U$, definimos que $x \approx y$ se $x - y$ é um infinitésimo. $\approx$ é uma relação de equivalência e permite-nos dar outra caracterização do conceito de continuidade.

Como observamos na primeira seção, a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ corresponde uma relação $F \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $f(x) = y \Leftrightarrow (x, y) \in F$. Em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big/U$, a relação correspondente F_U origina outra função $f_U : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big/U \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big/U$ extensão da primeira.

Teorema 33. f é contínua em $x_0 \in \mathbb{R}$ se e somente se $f_U(x) \approx f_U(x_0)$ para todo $x \approx x_0$, $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big/U$.

Considere a fórmula $\phi(\varepsilon, \delta) : \forall x\, (|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$, extraída da definição usual de continuidade.[12]

[10]Pois $\emptyset \in F \Rightarrow I \notin F$, mas também $\emptyset \subseteq I \subseteq I \Rightarrow I \in F$

[11]Tal m é da forma $(m, m, m, \ldots)_{/U}$ e não é qualquer $m \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\big/U \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big/U$

[12]É, de fato, uma fórmula de lógica de primeira ordem, apenas abreviada, com as variáveis livres ε, δ e x_0: esta última não será indicada. Em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big/U$, a interpretação de f é f_U

Fixe $\varepsilon > 0$ real e suponha que f é contínua em $x_0 \in \mathbb{R}$. Então existe $\delta > 0$ real tal que $\mathbb{R} \models \phi[\varepsilon, \delta]$; pelo fato da extensão ser elementar, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/U \models \phi[\varepsilon, \delta]$. Considere $x \approx x_0$: como $x - x_0$ é infinitesimal, seu módulo é menor que δ real, donde $|f_U(x) - f_U(x_0)| < \varepsilon$. Como ε é qualquer real positivo, $f_U(x) \approx f_U(x_0)$.

Por outro lado, suponha que $f_U(x) \approx f_U(x_0)$ para todo $x \approx x_0$ e fixe um infinitésimo positivo $\theta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/U$. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$ real, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/U \models \phi[\varepsilon, \theta]$, donde $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/U \models \exists\delta > 0\ \phi[\varepsilon](\delta)$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$ real, $\mathbb{R} \models \exists\delta > 0\ \phi[\varepsilon](\delta)$, ou seja, f é contínua em x_0. QED

Considerando-se 0 um infinitésimo, o conjunto de infinitésimos é um anel M_1. Sendo M_0 o conjunto dos números finitos de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/U$, M_1 é um ideal em M_0 e M_0/M_1 (anel quociente, ou também $M_0/\approx$) é isomorfo a $\mathbb{R}$, como indicam as pp. 56–7 de [Robinson].

O Cálculo Infinitesimal recebeu tratamento rigoroso em [Robinson], fazendo uso da Lógica de ordens mais altas, e a nova área, Análise Não-Standard, não só fornece demonstrações mais elegantes como também já decidiu problemas de diversas áreas.

Uma apresentação sem recurso à Teoria dos Modelos e construções lógicas é feita em [Keisler], um curso básico de Cálculo (incluindo limites) baseado em infinitésimos. Assume, além dos axiomas usuais para $\mathbb{R}$, outros para um conjunto de "hiperreais" para os quais a ultrapotência $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/U$ (apresentada apenas em seu Epílogo) é um modelo.

Mais Teoria dos Modelos

A Teoria dos Modelos caracteriza-se por sua generalidade e pela amplitude de suas ferramentas. Apresentamos nesta seção mais alguns exemplos.

Aritmética Não-Standard

Na Teoria dos Números, usam-se os operadores + e . usuais, a constante 0 e o operador unário s (*sucessor*). Reescrevemos de [Mendelson], pág. 103, os axiomas da Teoria da Aritmética Formal, Teoria dos Números ou Aritmética de Peano: são os fechos de

$$\sim(0 = s(x)),\ s(x) = s(y) \to x = y,\ x + 0 = x,\ x + s(y) = s(x + y),$$
$$x.0 = 0,\ x.s(y) = (x.y) + x,\ \phi(0) \to (\forall v\, (\phi(v) \to \phi(s(v)))) \to \forall v\, \phi(v)) ,$$

em que ϕ é fórmula da linguagem em consideração.[13]

Resumimos agora a discussão na seção 12.2 de [Bell, Slomson].

Pela Incompletude de Gödel–Rosser (veja [Mendelson], pág. 145), a Aritmética Formal não é completa se for consistente; existiriam então dois modelos não elementarmente equivalentes da Aritmética Formal (pelo Teorema de Löwenheim–Skolem, podemos considerá-los enumeráveis).

[13] Os axiomas (S1) e (S2) do sistema S de [Mendelson] são, no Cálculo de Predicados com igualdade, substituídos pelo Exercício BS 3.3.5 e pelo axioma PC11 de [Bell, Slomson]. (Adotamos S tendo em vista uma referência a uma prova da Incompletude de Gödel.) No Exemplo 1.4.11 de [Chang, Keisler], a fórmula ϕ pode ter parâmetros

O *modelo standard* da Aritmética Formal é $\mathbb{N}$ com as interpretações usuais de $+$, $.$ e s. O fato de $\mathbb{N}$ ser modelo dessa teoria e, portanto, ela ser consistente, é uma hipótese explicitamente assumida; o último parágrafo de nossa primeira seção aplica-se nesse caso.

As sentenças dessa linguagem válidas no modelo *standard* formam a Teoria da Aritmética Completa ou Teoria dos Números Completa $Th(\mathbb{N})$.

Se F é ultrafiltro não-principal sobre $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/F$ é modelo da Aritmética Completa, mas não isomorfo a $\mathbb{N}$, pois tem cardinalidade $2^{\aleph_0}$ (BS 6.1.10 e BS 6.3.13).

Mostraremos ainda que $Th(\mathbb{N})$ não é nem mesmo $\aleph_0$-*categórica*, isto é, não tem a propriedade de todos os seus modelos infinitos enumeráveis serem isomorfos.

Consideramos a imersão canônica $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/F$ e a fórmula $\chi(x, y) : \exists z\,(\sim(z = 0) \wedge (x + z = y))$. $\mathbb{N} \models \chi[m, n] \Leftrightarrow m < n$, donde χ induz em $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{M}(Th(\mathbb{N}))$ uma ordem <u>total</u> dada por $a < b \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \chi[a, b]$. Considere $m^* = (0, 1, 2, 3, \ldots)_{/F}$: $m^* \notin d[\mathbb{N}]$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/F \models \chi[d(n), m^*]$.[14] Tome $X = d[\mathbb{N}] \cup \{m^*\}$: pelo Teorema 11, existe $\mathfrak{A}$ <u>enumerável</u> tal que $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/F)|_X \subseteq \mathfrak{A} \prec \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/F$ e, assim, $\mathfrak{A} \models Th(\mathbb{N})$. Como $m^* \in A$, $\mathfrak{A} \not\cong \mathbb{N}$: se $h : \mathfrak{A} \to \mathbb{N}$ é um isomorfismo, $h(m^*)$ é finito, mas $d(n) < m^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde m^* é infinito. (Assim, a propriedade "ser número finito" não pode ser expressa nessa linguagem: se $\psi(x)$ representasse tal propriedade, $\mathbb{N} \models \forall x\, \psi(x) \Rightarrow \overline{\psi} \in Th(\mathbb{N})$, mas $\mathfrak{A} \models \sim\psi[m^*]$.)

Note que $d : \mathbb{N} \to \mathfrak{A}$ é ainda imersão elementar: podemos considerar $\mathbb{N} \prec \mathfrak{A}$ e $<$ estendida a A. Todos os elementos de $A - \mathbb{N}$ são *finais*, ou seja, são precedidos por todos os elementos de $\mathbb{N}$. De fato, note que $\mathbb{N} \models \forall v\,(v = 0 \vee \chi(0, v))$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \models \sim\exists v\,(\chi(\underbrace{s \ldots s}_{n \text{ vezes}}(0), v) \wedge \chi(v, \underbrace{s \ldots s}_{n+1 \text{ vezes}}(0)))$; logo, essas sentenças são válidas em $\mathfrak{A}$. Os elementos de $A - \mathbb{N}$ são também chamados "infinitos" ou "não-standard".

Uniões de Cadeias

Ao lado dos Teoremas de Löwenheim–Skolem e dos ultraprodutos, outros métodos para a construção de estruturas relacionais com propriedades específicas foram desenvolvidos; a união de cadeia elementar é um dos mais utilizados em argumentação por indução transfinita.

Uma seqüência de estruturas $\mathfrak{A}_\zeta = (A_\zeta, \{R_{\zeta\beta} \mid \beta < \alpha\})$, $\zeta < \xi$, de mesmo tipo $\mu \in \mathbb{N}^\alpha$ é uma *cadeia* se $\mathfrak{A}_\zeta \subseteq \mathfrak{A}_\eta$ para quaisquer $\zeta \leqslant \eta < \xi$. Sua *união* é a estrutura (de tipo μ)

$$\bigcup_{\zeta<\xi} \mathfrak{A}_\zeta = \Big(\bigcup_{\zeta<\xi} A_\zeta, \Big\{\bigcup_{\zeta<\xi} R_{\zeta\beta} \mid \beta < \alpha\Big\}\Big)\,.$$

Uma interessante propriedade das uniões de cadeias é dada pelo Lema 3.1.8 de [Chang, Keisler]:

Lema 34. A união da cadeia é a única estrutura com domínio $\bigcup_{\zeta<\xi} A_\zeta$ da qual cada elemento da cadeia é subestrutura.

Desta vez, suporemos que μ contém um único predicado P unário. Comparemos a união $(\bigcup_{\zeta<\xi} A_\zeta, \bigcup_{\zeta<\xi} R_\zeta)$ e a estrutura $(\bigcup_{\zeta<\xi} A_\zeta, S)$. Para que esta seja extensão de cada estrutura da

[14] Com $z = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n+1 \text{ vezes}}, 1, 2, 3, \ldots)_{/F} \neq 0$, temos $z + d(n) = m^*$

cadeia, devemos ter $S \cap A_\zeta = R_\zeta$, donde $\bigcup_{\zeta<\xi} R_\zeta = S$: se $a \in S$, então $a \in A_\zeta$ para algum $\zeta < \xi$ e, portanto, $a \in R_\zeta = S \cap A_\zeta$, sendo a recíproca imediata. (Vemos que $\mathfrak{A}_\zeta \subseteq \bigcup_{\zeta<\xi} \mathfrak{A}_\zeta$.) QED

Exemplo 35. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{GF}(p^{2^n})$ é um corpo infinito de característica p.

A seção 8.5 de [Dean] trata dos corpos finitos, ou de Galois, de característica p prima e de p^m elementos, denotados $\mathrm{GF}(p^m)$, mostrando que $\mathrm{GF}(p^m) \subseteq \mathrm{GF}(p^n) \Leftrightarrow m \mid n$. Então, $m \leqslant n \Leftrightarrow \mathrm{GF}(p^{2^m}) \subseteq \mathrm{GF}(p^{2^n})$.

Assim, $\mathrm{GF}(p^{2^n})$, $n \in \mathbb{N}$, formam uma cadeia enumerável cuja união é extensão de cada desses corpos e, portanto, é um corpo de característica p infinito enumerável.

Em comparação, o Teorema 13 afirma não-construtivamente a existência de um corpo infinito de característica p.[15]

A cadeia $\mathfrak{A}_\zeta$, $\zeta < \xi$, é *elementar* se, para todos $\zeta \leqslant \eta < \xi$, $\mathfrak{A}_\zeta \prec \mathfrak{A}_\eta$. (A cadeia desse exemplo <u>não</u> é elementar, pois $\mathrm{GF}(p^m) \models \exists!^{p^m}$.) O teorema em questão é:

Teorema 36 (BS 4.2.1). A união de uma cadeia elementar é extensão elementar de todo elemento da cadeia.

Seja $\mathfrak{A}$ a união da cadeia elementar $\mathfrak{A}_\zeta$, $\zeta < \xi$. Dados uma fórmula $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ da linguagem adequada e parâmetros $a_1, \ldots, a_n \in A_\zeta$, devemos mostrar que $\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{A}_\zeta \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$.

Procedendo por indução na complexidade de ϕ, vemos novamente que os casos de negação e conjunção são imediatos. Para as fórmulas atômicas, lembramos que $\mathfrak{A}$ é extensão de $\mathfrak{A}_\zeta$.

Resta-nos considerar o caso em que ϕ é da forma $\exists v\, \psi(v, v_1, \ldots, v_n)$. $\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$ implica existir $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi[a, a_1, \ldots, a_n]$. Mas, por se tratar de uma cadeia, $a \in A_\eta$ para algum $\zeta \leqslant \eta < \xi$, donde (por hipótese de indução) $\mathfrak{A}_\eta \models \psi[a, a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow \mathfrak{A}_\eta \models \exists v\, \psi(v)[a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow \mathfrak{A}_\zeta \models \exists v\, \psi(v)[a_1, \ldots, a_n]$, já que $\mathfrak{A}_\zeta \prec \mathfrak{A}_\eta$.

A recíproca é mais fácil: se $\mathfrak{A}_\zeta \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$, então existe $a \in A_\zeta$ de modo que $\mathfrak{A}_\zeta \models \psi[a, a_1, \ldots, a_n]$; por hipótese, $\mathfrak{A} \models \psi[a, a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$ (pois $a \in A$ união).

QED

Jogos

Exemplificaremos uma conexão entre as teorias dos Modelos e dos Jogos com um teorema de [Ehrenfeucht]: em suas palavras, "a new formulation of the condition given by Fraïssé". Adaptamos, na argumentação, a exposição de [Ebbinghaus, Flum], pp. 18–9. Aplicaremos tal resultado em um jogo não muito artificial.

Em um jogo em que dois jogadores se revezam, ao primeiro jogador geralmente cabe iniciativa e, ao segundo, ações defensivas. Assim, convém rotular o primeiro jogador como $\forall$ e o segundo como $\exists$. Veremos que essa convenção adapta-se ao conceito de "estratégia" para o segundo jogador.

[15] A existência do ultrafiltro usado na Compacidade (Teorema 30) depende do Axioma da Escolha

Assuma agora que L é uma linguagem com número finito de predicados e constantes, mas sem operadores, de modo que é finito o número de fórmulas atômicas de L em cada combinação de variáveis. Suponha $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ realizações de L.

O *número de quantificadores aninhados* q de uma fórmula atômica é 0 e, em geral, $q[\phi \wedge \psi] = \max\{q[\phi], q[\psi]\}$, $q[\sim\phi] = q[\phi]$, $q[\exists v\, \phi] = q[\phi] + 1$.

Definimos o jogo $G_n(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ de $n \geqslant 1$ jogadas, em que cada uma consiste em $\forall$ escolher $\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{B}$ e x em seu domínio, e $\exists$ escolher y no outro domínio, pondo-o em correspondência com x. (O jogo é de *informação perfeita*, isto é, cada jogador conhece as escolhas efetuadas anteriormente por seu adversário e por si mesmo.) Quando o jogo acaba, temos n pares $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$, $a_i \in A$ e $b_i \in B$: $\forall$ pode escolher elementos em ambas as estruturas, por exemplo a_1, b_2, a_3 etc. Diz-se que $\exists$ *vence* se a correspondência $a_i \mapsto b_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, é um isomorfismo de $\mathfrak{A}|_{\{a_1,\ldots,a_n\}}$ a $\mathfrak{B}|_{\{b_1,\ldots,b_n\}}$.[16] Caso contrário, $\forall$ vence — não há empates.

Uma *estratégia de* $\exists$ *para vencer* $G_n(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, segundo [Ehrenfeucht], são funções $g_i : (A \times B)^{i-1} \times ((\{\mathfrak{A}\} \times A) \cup (\{\mathfrak{B}\} \times B)) \to A \cup B$, $1 \leqslant i \leqslant n$, de modo que g_i descreve a resposta de $\exists$ em seu i-ésimo lance, culminando com sua vitória. (Cada g_i é extensão das g_j, $j < i$.) O argumento de cada g_i divide-se em três partes: as jogadas já efetuadas $(a_1, b_1), \ldots, (a_{i-1}, b_{i-1})$ formam um vetor de $(A \times B)^{i-1}$; a estrutura $\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{B}$ escolhida por $\forall$ em seu i-ésimo lance; o elemento x do domínio correspondente, também indicado por $\forall$. O valor de g_i é, então, a resposta adequada de $\exists$. (Para tanto, $g_i(\xi, \mathfrak{A}, x) \in B$ e $g_i(\xi, \mathfrak{B}, x) \in A$.) Intuitivamente, são as funções da *tranformada de Skolem* de $\forall x_1 \exists y_1 \ldots \forall x_n \exists y_n$ "$\exists$ vence respondendo y_1 a x_1 e … e y_n a x_n".

Podemos caracterizar $\mathfrak{A}$ quanto a jogos nas fórmulas dadas por este lema:

Lema 37. Estas conjunções e disjunções são finitas e, portanto, estas fórmulas estão bem definidas: para $k \geqslant 1$ e $a_1, \ldots, a_k \in A$,

$$\phi_{0;a_1,\ldots,a_k}(v_1, \ldots, v_k) : \bigwedge \{\phi(v_1, \ldots, v_k) \mid \phi \text{ é atômica ou negação de atômica e } \mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_k]\}$$

e, para $k \geqslant 0$ e $a_1, \ldots, a_k \in A$,

$$\begin{aligned} \phi_{n;a_1,\ldots,a_k}(v_1, \ldots, v_k) : \bigwedge_{a \in A} \exists v_{k+1}\, \phi_{n-1;a_1,\ldots,a_k,a}(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}) \wedge \\ \wedge\ \forall v_{k+1} \bigvee_{a \in A} \phi_{n-1;a_1,\ldots,a_k,a}(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1})\ . \end{aligned}$$

As fórmulas ϕ_0 estão bem definidas, pois o número de fórmulas atômicas em $v_1, \ldots, v_k$ é finito e não-nulo, já que $k \geqslant 1$ (se $k = 0$ e L não tem constantes, esse número é nulo).

Por indução em n, para cada k o conjunto $\{\phi_{n;a_1,\ldots,a_k} \mid a_1, \ldots, a_k \in A\}$ é finito. De fato, para $n = 0$ e $k \geqslant 1$, como o número de fórmulas atômicas em $v_1, \ldots, v_k$ é finito, também o é o número de combinações possíveis de atômicas válidas em $\mathfrak{A}$ com parâmetros $a_1, \ldots, a_k$. Se $n > 0$ e $k \geqslant 0$, supondo-se $\{\phi_{n-1;a_1,\ldots,a_{k+1}}\}$ finito, vemos que $\{\phi_{n;a_1,\ldots,a_k}\}$ é finito. QED

[16] Note que, nesse caso, para todo predicado P_α de L e quaisquer $1 \leqslant k_1, \ldots, k_{\mu(\alpha)} \leqslant n$, $\mathfrak{A} \models P_\alpha[a_{k_1}, \ldots, a_{k_{\mu(\alpha)}}] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models P_\alpha[b_{k_1}, \ldots, b_{k_{\mu(\alpha)}}]$; condições análogas escrevem-se para constantes e a relação de igualdade. Esta é a caracterização usada por [Ehrenfeucht]

Para demonstrar o próximo teorema, observamos que cada ϕ_n tem n quantificadores aninhados; $\mathfrak{A} \models \phi_{n;a_1,\ldots,a_k}[a_1,\ldots,a_k]$; $\mathfrak{B} \models \phi_{0;a_1,\ldots,a_k}[b_1,\ldots,b_k] \Leftrightarrow a_i \mapsto b_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, é um isomorfismo de $\mathfrak{A}|_{\{a_1,\ldots,a_k\}}$ a $\mathfrak{B}|_{\{b_1,\ldots,b_k\}}$.

Teorema 38 (Ehrenfeucht). Equivalem, para cada $n \geqslant 1$ e $k \geqslant 0$:

i) $\exists$ tem uma estratégia para vencer $G_n((\mathfrak{A}, a_1,\ldots,a_k),(\mathfrak{B}, b_1,\ldots,b_k))$;

ii) $\mathfrak{B} \models \phi_{n;a_1,\ldots,a_k}[b_1,\ldots,b_k]$;

iii) Se $\phi(v_1,\ldots,v_k)$ tem até n quantificadores aninhados, então $\mathfrak{A} \models \phi[a_1,\ldots,a_k] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi[b_1,\ldots,b_k]$.

Pelo que observamos, iii) $\Rightarrow$ ii). Por indução em n, mostramos que i) $\Rightarrow$ iii). Esse é o Teorema 5 de [Ehrenfeucht] e independe do número de predicados e constantes de L. Como usual, é de importância apenas ϕ da forma $\exists v\, \psi(v_1,\ldots,v_k,v)$, mas então ψ tem até $n-1$ quantificadores aninhados. Para $n = 1$, $\mathfrak{A} \models \phi[a_1,\ldots,a_k] \Rightarrow$ existe $a \in A$ de modo que $\mathfrak{A} \models \psi[a_1,\ldots,a_k,a]$; pela estratégia de $\exists$ para G_1, existe $b \in B$ tal que as relações correspondentes são válidas em $\mathfrak{B}$: ψ é aberta $\Rightarrow \mathfrak{B} \models \psi[b_1,\ldots,b_k,b] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \phi[b_1,\ldots,b_k]$; do mesmo modo, com $\exists$ escolhendo $a \in A$, obtém-se a implicação inversa.

Para $n > 1$, assuma que $\mathfrak{A} \models \phi[a_1,\ldots,a_k]$: seja $a_{k+1} \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi[a_1,\ldots,a_k,a_{k+1}]$. Já que $\exists$ tem uma estratégia para vencer $G_n((\mathfrak{A}, a_1,\ldots,a_k),(\mathfrak{B}, b_1,\ldots,b_k))$, existe $b_{k+1} \in B$ de modo que $\exists$ tem uma para $G_{n-1}((\mathfrak{A}, a_1,\ldots,a_k,a_{k+1}),(\mathfrak{B}, b_1,\ldots,b_k,b_{k+1}))$: basta, antes das $n-1$ jogadas, supor que $\forall$ escolheu a_{k+1} e, pela estratégia para G_n, escolher b_{k+1}; então jogar este G_{n-1} reduz-se a jogar aquele G_n. Por hipótese de indução, $\mathfrak{B} \models \psi[b_1,\ldots,b_k,b_{k+1}]$ porque ψ tem até $n-1$ quantificadores aninhados; então $\mathfrak{B} \models \phi[b_1,\ldots,b_k]$.

Também por indução em n, i) $\Leftrightarrow$ ii). (Teorema 8 de [Ehrenfeucht].) Se $n = 1$, $\exists$ tem uma estratégia para vencer $G_1((\mathfrak{A}, a_1,\ldots,a_k),(\mathfrak{B}, b_1,\ldots,b_k)) \Leftrightarrow \forall a \in A\ \exists b \in B\ a \mapsto b$ é um isomorfismo e $\forall b \in B\ \exists a \in A\ a \mapsto b$ é um isomorfismo $\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \bigwedge_{a\in A} \exists v_{k+1}\, \phi_{0;a_1,\ldots,a_k,a}[b_1,\ldots,b_k](v_{k+1})$ e $\mathfrak{B} \models \forall v_{k+1} \bigvee_{a\in A} \phi_{0;a_1,\ldots,a_k,a}[b_1,\ldots,b_k](v_{k+1})$ (de modo que as relações entre a e as constantes $a_1,\ldots,a_k$ são as mesmas correspondentes entre b e $b_1,\ldots,b_k$) $\Leftrightarrow \mathfrak{B}\phi_{1;a_1,\ldots,a_k}[b_1,\ldots,b_k]$.

Se $n > 1$, notamos que $\exists$ tem uma estratégia para vencer $G_n((\mathfrak{A}, a_1,\ldots,a_k),(\mathfrak{B}, b_1,\ldots,b_k))$ se e somente se, como vimos,

$$\forall a \in A\ \exists b \in B \text{ e } \forall b \in B\ \exists a \in A \text{ ele tem uma para } G_{n-1}((\mathfrak{A}, a_1,\ldots,a_k,a),(\mathfrak{B}, b_1,\ldots,b_k,b))$$

$\Leftrightarrow \forall a \in A\ \exists b \in B\ \mathfrak{B} \models \phi_{n-1;a_1,\ldots,a_k,a}[b_1,\ldots,b_k,b]$ e $\forall b \in B\ \exists a \in A\ \mathfrak{B} \models \phi_{n-1;a_1,\ldots,a_k,a}[b_1,\ldots,b_k,b]$ $\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \bigwedge_{a\in A} \exists v\, \phi_{n-1;a_1,\ldots,a_k,a}[b_1,\ldots,b_k](v)$ e $\mathfrak{B} \models \forall v \bigvee_{a\in A} \phi_{n-1;a_1,\ldots,a_k,a}[b_1,\ldots,b_k](v) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi_{n;a_1,\ldots,a_k}[b_1,\ldots,b_k]$. QED

Corolário 39. $\exists$ tem, para cada $n \geqslant 1$, uma estratégia para vencer $G_n(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ se e somente se $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Com $k = 0$ em i) $\Leftrightarrow$ iii). (Teorema 10 de [Ehrenfeucht].)

Exemplo 40. $\forall$ sempre pode vencer em $G_3((\mathbb{Z},<),(\mathbb{Q},<))$.

De fato, basta que jogue $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ e, sendo b_1, b_2 as respostas de $\exists$, jogue então $b_3 = \frac{b_1+b_2}{2}$, para a qual $\exists$ não terá uma resposta a_3. Isso corresponde ao fato de que $(\mathbb{Z},<) \not\equiv (\mathbb{Q},<)$. (Note que $\exists$ sempre pode vencer em G_2.)

Vemos também, com esse exemplo, que o teorema não continua válido se fixarmos que $\forall$ escolhe apenas em $\mathfrak{A}$ e $\exists$ em $\mathfrak{B}$.

Como aplicação, descrevemos o jogo "21", disputado em um percurso de 21 casas.[17] Dois jogadores posicionam seus marcadores na casa 1 e, alternadamente, cada um pode avançar seu marcador uma, duas ou três casas à frente do marcador de seu adversário. Ganha aquele que chegar à casa 21.

(1)	2	3	4	$\boxed{5}$	6	7	8	$\boxed{9}$	10
									11
$\boxed{21}$	20	19	18	$\boxed{17}$	16	15	14	$\boxed{13}$	12

$\exists$ tem uma única estratégia vencedora: independentemente de como joga seu oponente, ele deve ocupar sucessivamente as casas 5, 9, 13, 17 e 21. (Se errar, $\forall$ passa a ter uma estratégia vencedora.) Notamos também que esse jogo não tem um número fixo de jogadas e que não há empates.

De modo a trabalhar com os conceitos definidos, observamos que, se $\exists$ não chegar à casa 21 em exatamente cinco jogadas, ele cometeu algum erro, que dá a vitória a $\forall$ (se este não errar). Assim, podemos redefinir o jogo de modo que $\exists$ ganha se e somente se chega à casa 21 na 5ª jogada; de outro modo, $\forall$ ganha.

Agora, o jogo "21" corresponde ao jogo $G_5(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$, em que $A = B = \{1,2,3\}$ (os elementos dos domínios corresponderão ao número de casas avançadas) e $\mathfrak{A} = (A,1,2,3)$, $\mathfrak{B} = (B,3,2,1)$, com constantes c_1, c_2, c_3. (Note que $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $h(a) = 4 - a$, é um isomorfismo, donde $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.) De fato, $\exists$ vence $G_5 \Leftrightarrow [\mathfrak{A} \models c_i = a_j \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models c_i = b_j]$ para $1 \leqslant i \leqslant 3$ e $1 \leqslant j \leqslant 5 \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} a_j = 1 \Leftrightarrow b_j = 3 \\ a_j = 2 \Leftrightarrow b_j = 2 \\ a_j = 3 \Leftrightarrow b_j = 1 \end{array}\right\} \text{ para } 1 \leqslant j \leqslant 5$$

$\Leftrightarrow [b_j = 4 - a_j]$ para $1 \leqslant j \leqslant 5 \Rightarrow 1 + \sum_{j=1}^{5}(a_j + b_j) = 21 \Rightarrow \exists$ vence o jogo "21" e vemos que a estratégia é, quando $\forall$ avançar x casas, $\exists$ avança $4 - x$ casas. Por outro lado, $\exists$ vence o jogo "21" (nesta forma) $\Rightarrow 1 + \sum_{j=1}^{5}(a_j + b_j) = 21 \Rightarrow \sum_{j=1}^{5}(a_j + b_j) = 20$. Mas podemos supor que $\exists$ não erra (caso contrário, $\forall$ pode ganhar), donde $[b_j = 4 - a_j]$ para $1 \leqslant j \leqslant 5$. (Nessas implicações, usamos repetidamente a definição dos domínios e das interpretações das constantes em $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$.)

Alguns Teoremas

A Teoria dos Modelos tomou forma e emancipou-se do corpo de conhecimentos da Lógica moderna pelos esforços de Alfred Tarski nas décadas de 40 e 50. Muito do desenvolvimento da

[17] Este jogo foi extraído do *Kit Gabriela: O Computador que "Aprende"*, da Série Jogos e Descobertas da Fundação Brasileira para o Desenvolvimento do Ensino de Ciências — FUNBEC (criação de Isaac Epstein)

teoria deveu-se a problemas por ele colocados, como uma caracterização algébrica da equivalência elementar. Uma resposta a este, em particular, foi apresentada por Keisler em 1961: duas estruturas são elementarmente equivalentes se e somente se têm ultrapotências isomórficas. O Teorema da Ultrapotência de Keisler é demonstrado, assumindo-se a Hipótese Generalizada do Contínuo, na seção 7.2 de [Bell, Slomson]; na seção 8.1, são apresentados os "lemas básicos" de Frayne e Scott, sobre imersões elementares. O Lema de Frayne tem como conseqüência

Fato 41 (BS 8.1.2). Quaisquer duas estruturas finitas elementarmente equivalentes são isomorfas.

Atualmente, tem grande desenvolvimento a Teoria dos Modelos na forma geométrica, que se dedica a estudar a definibilidade de subconjuntos de estruturas. São importantes, nessa área, os conceitos de *saturação* e *estabilidade*. A saturação é uma característica de estruturas *homôgeneas* e *universais* sobre a qual se encontram definições no Capítulo 11 de [Bell, Slomson]. Assim como a estabilidade, a saturação emergiu como subproduto da demonstração original do Teorema de Morley (1962), cujo enunciado passamos a descrever.

Uma teoria é *categórica no cardinal* α se todos os seus modelos de cardinalidade α são isomorfos. (Os Teoremas de Löwenheim–Skolem tornam inviável a categoricidade usual de estruturas infinitas, em primeira ordem.) Michael Morley respondeu afirmativamente a uma questão colocada por Łoś: uma teoria enumerável categórica em um cardinal não-enumerável é categórica em todo cardinal não-enumerável.

Um exercício envolvendo categoricidade é o

Fato 42 (BS 9.1.9: Teste de Vaught). Uma teoria enumerável, sem modelos finitos, categórica em um cardinal infinito é completa.

Corolário 43. A teoria $\infty = \{\exists^{\geqslant n} \mid n \geqslant 2\}$ é completa.

Concluímos esta seção estabelecendo o importante conceito de diagrama, devido a A. Robinson. Dada uma L-estrutura $\mathfrak{A}$, seja $(a)_{a \in A}$ uma enumeração sem repetições de seu domínio. Adicione novas constantes a L, uma para cada $a \in A$, obtendo a linguagem L_A. O *diagrama* de $\mathfrak{A}$ é o conjunto $D(\mathfrak{A})$ das sentenças atômicas e negações de atômicas de L_A satisfeitas por $(\mathfrak{A}, (a)_{a \in A})$. (Trata-se de uma "descrição" de $\mathfrak{A}$.) Note que $\mathfrak{A}$ é imersível em $\mathfrak{B}$ se e somente se, com alguma interpretação para as novas constantes, $\mathfrak{B}$ satisfaz $D(\mathfrak{A})$. Temos, então, esta explicação para o termo "modelo-completude":

Fato 44 (BS 9.2.1). Uma teoria Σ é modelo-completa se e somente se, para cada $\mathfrak{A}$ modelo de Σ, a teoria $\Sigma \cup D(\mathfrak{A})$ é completa em L_A.

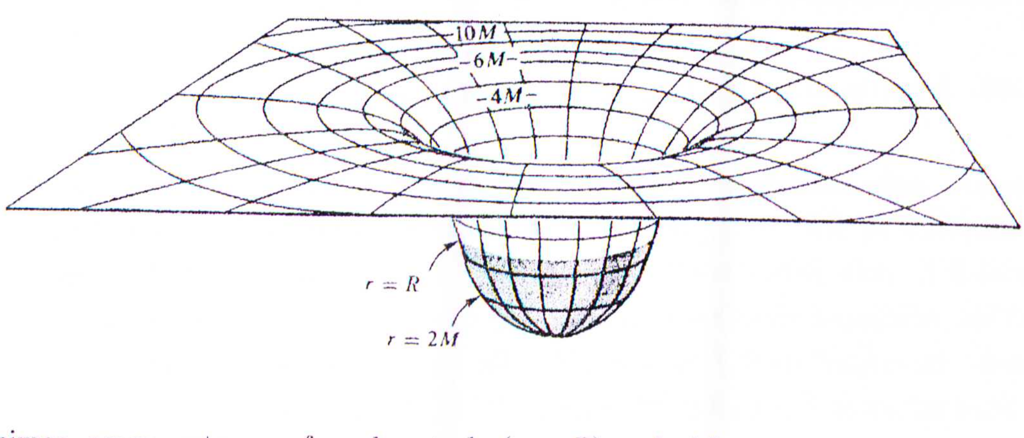
Buracos negros

Nesta seção, discutiremos a imersão de um buraco negro no espaço-tempo. Referências de páginas são feitas a [Misner, Thorne, Wheeler]; também [O'Neill] contém o necessário a nosso desenvolvimento.

Na Mecânica de Newton, define-se assim velocidade de escape de uma distância r da atração de um corpo de massa M: é a velocidade v necessária para se chegar ao infinito (energia potencial nula) com velocidade zero (energia cinética nula). Pela conservação da energia mecânica, $\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = 0 \Rightarrow v^2 = 2GM/r$ ou, como será melhor escrever, $r = 2GM/v^2$. Qualquer corpo com velocidade estritamente menor que $v = \sqrt{2GM/r}$ *pode inclusive afastar-se*, mas voltará em órbita fechada, o que não ocorre com uma velocidade maior ou igual. Já que a luz tem a maior velocidade possível (esta não é uma afirmação newtoniana), nada escapa de uma distância a M menor que $r = 2GM/c^2$. É usual, em Física, escrever-se $G = c = 1$: nesse caso, $r = 2M$.

Um *buraco negro* é formado por uma estrela de massa M que se tenha contraído a um raio menor que $r = 2M$. Considerando que de um buraco negro nada escapa, pergunta-se se podemos considerá-lo uma subestrutura do Universo, pois de um subcorpo ou subespaço não conhecemos, ou "escapamos" para, um corpo ou espaço maior. Naturalmente, coloca-se também o problema de caracterizar tal inclusão.

Na Relatividade, temos $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$. Em um referencial esférico centrado em uma estrela de raio R, com r e t medidos por um observador muito distante, obtemos $ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) - dt^2$. Os efeitos causados pela gravidade são a dilatação (ou contração) de tempo e distância, ou seja, estes são multiplicados por $e^{\Phi}, e^{\Lambda} > 0$, onde Φ, Λ são funções de r apenas: $ds^2 = -e^{2\Phi}\, dt^2 + e^{2\Lambda}\, dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$. A figura abaixo, adaptada da pág. 614, apresenta qualitativamente esses efeitos, com $dt = 0$, $\theta = \pi/2$.



Assumimos, agora, estarmos fora da estrela ($r > R$): seja M a massa-energia total da estrela dada pela terceira lei de Kepler para planetas distantes (massa-energia em repouso + energia interna + energia potencial gravitacional). Das páginas 602 a 607, temos $\Lambda = -\ln(1 - \frac{2M}{r})/2$ e $\Phi = \ln(1 - \frac{2M}{r})/2$.

Então a *Geometria de Schwarzschild* é dada por

$$ds^2 = -(1 - \tfrac{2M}{r})\, dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}\, dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\ .$$

Uma nota de cuidado: essa geometria é *exterior* à estrela; em seu interior, Λ e Φ sujeitam-se a fatores como pressão estelar e massa da estrela compreendida na esfera interior a r. Assim, as estrelas brilhantes não têm singularidades em seu centro, por exemplo. Veja discussão nas pp. 600–6.

A singularidade $r = 2M$ é o chamado *raio de Schwarzschild*. Veremos que esse raio corresponde ao *horizonte de eventos* relativístico e sua coincidência com o newtoniano vem do fato de r ser medido por um observador muito distante, que não sofre os efeitos relativísticos da estrela.

Temos $g_{tt} = -(1 - \frac{2M}{r})$ e $g_{rr} = 1/(1 - \frac{2M}{r})$. Para $r > 2M$, $g_{tt} < 0$ e $g_{rr} > 0$; para $r < 2M$, os sinais são trocados. Este fenômeno tem a seguinte interpretação: t e r trocam entre si as características de coordenadas de tempo e espaço. Assim, tal qual a passagem do tempo é inexorável ($g_{tt} < 0$) em $r > 2M$, r sempre diminui até $r = 0$ em $r < 2M$ pois $g_{rr} < 0$, ou seja, nada escapa da atração de M (em contraste com a teoria newtoniana). Notamos que a própria geometria também colapsa em $r = 0$. Contudo, $r = 2M$ é uma singularidade do sistema de coordenadas, mas não do espaço-tempo. (Conforme pp. 820–3.)

A fim de tranformar a geometria de Schwarzschild em estruturas relacionais, suporemos (como tacitamente na discussão acima) que a massa M está fixa na origem do sistema de coordenadas e sempre foi e sempre será um buraco negro de raio $r = 2M$.

Consideraremos os domínios $U = (\mathbb{R}^3)|_{r>0} \times \mathbb{R}$ e $B = (\mathbb{R}^3)|_{0<r<2M} \times \mathbb{R} \subseteq U$, em que $\mathbb{R}^3$ é o espaço tri-dimensional (x, y, z), com r dado pelo referencial esférico, e $\mathbb{R}$ a dimensão temporal t. Elementos de U e B serão escritos $p = (s_p, t_p) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ e são chamados *eventos*.

É natural tomar o predicado binário P de modo que $P(p, q)$ seja interpretado como "p pode influenciar q". O modo usual de escrever-se é $p \leqslant q$ ou $q \in J^+(p)$ (pp. 922–3), onde $p \leqslant q \Leftrightarrow p = q$ ou, no caso $p < q$, há uma trajetória de partícula material ou fóton de p a q para o futuro.

Sejam R e S as interpretações de $\leqslant$ em U e B respectivamente: R e S devem, portanto, ser relações binárias reflexivas.

Como vimos, o fato de que $g_{rr} < 0$ em B tem esta conseqüência: se $p \in U - B$ e $q \in B$, (p, q) pode ou não pertencer a R, mas $(q, p) \notin R$. Já que R e S são relações correspondendo ao mesmo fenômeno em B, temos que $R|_B = S$.

Então, escrevemos $\mathfrak{U} = (U, R)$ e $\mathfrak{B} = (B, S)$, obtendo

Resultado 45. $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{U}$, mas não $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{U}$, na linguagem do predicado $\leqslant$.

Vimos que $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{U}$. Sejam agora $\phi(v_1, v_2) : \exists v\,(v \leqslant v_1 \wedge v \leqslant v_2)$ fórmula dessa linguagem e $b_1, b_2 \in B$ de modo que seus *passados causais* $J^-(b_1) = \{p \mid p \leqslant b_1\}$ e $J^-(b_2)$ não se intersectem em B, mas sim em $U - B$. Então $\mathfrak{U} \models \phi[b_1, b_2]$, mas $\mathfrak{B} \models \sim\phi[b_1, b_2]$. QED

Notamos que, embora tais $b_1, b_2 \in B$ existam, as escalas envolvidas podem não permitir uma experiência física que distingua $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{U}|_{U-B}$. Lembramos que nada há em especial ao cruzar-se o horizonte de eventos $r = 2M$.

Está aberta a possibilidade de $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{U}$. Conjecturamos que o Corolário 39 leve a uma resposta afirmativa.

Adicionamos à linguagem um novo predicado, não tão natural, em que isso não ocorre. Considere o predicado binário Q, que indicaremos $|$ infixo, com $p|v$ tendo a interpretação de $s_p = s_v$, ou seja, "p e v têm a mesma posição espacial". Sejam Q_U e Q_B as interpretações de Q em U e B: evidentemente, $Q_B = (Q_U)|_B$. Com $\mathfrak{U}' = (U, R, Q_U)$ e $\mathfrak{B}' = (B, S, Q_B)$, temos

Resultado 46. $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{U}'$, mas $\mathfrak{B}' \not\equiv \mathfrak{U}'$, na linguagem dos predicados $\leqslant$ e $|$.

De fato, considere a sentença $\sigma : \exists p \exists q \exists v\, (\sim(p = q) \wedge p \leqslant q \wedge q \leqslant v \wedge p|v)$. Tome agora p com s_p muito distante de $r = 0$, em comparação com $2M$. Nesse local, o espaço-tempo é aproximadamente *Minkowskiano*: considere $q > p$ e muito próximo nessa escala. O próprio $J^+(q)$ intersecta a reta (s_p, t), $t \in \mathbb{R}$, em um evento v. Com esses p, q e v, vemos que $\mathfrak{U}' \models \sigma$.

Por outro lado, $\mathfrak{B}' \models \forall p \forall q \forall v\, (\sim(p = q) \wedge p \leqslant q \wedge p|v \rightarrow \sim(q \leqslant v))$, pois $g_{rr} < 0$ em B, donde $\mathfrak{B}' \models \sim\sigma$.

QED

Referências

[Bell, Slomson] J. L. Bell, A. B. Slomson, *Models and Ultraproducts: An Introduction*, 2ª impressão revisada, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1971.

[Chang, Keisler] C. C. Chang, H. J. Keisler, *Model Theory*, 3ª edição, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1990.

[Dean] Richard A. Dean, *Elements of Abstract Algebra*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1966.

[Ebbinghaus, Flum] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum, *Finite Model Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[Ehrenfeucht] A. Ehrenfeucht, *An Application of Games to the Completeness Problem for Formalized Theories*, Fundamenta Mathematicae 49, pp. 129-141, 1961.

[Keisler] H. J. Keisler, *Elementary Calculus*, Prindle, Weber and Schmidt Inc., Boston, 1976.

[Mendelson] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1964.

[Misner, Thorne, Wheeler] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler, *Gravitation*, 19ª impressão, W. H. Freeman and Company, New York, 1995.

[O'Neill] Barrett O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry, with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[Prestel] Alexander Prestel, *Model Theory for the Real Algebraic Geometer*, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, Pisa, 1998.

[Robinson] A. Robinson, *Non-Standard Analysis*, 2ª edição, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1974.

[Tarski] Alfred Tarski, *The Concept of Truth in Formalized Languages*, in J. H. Woodger (trad.), *Logic, Semantics, Metamathematics — Papers from 1923 to 1938 by Alfred Tarski*, Oxford University Press, London, 1956.

[Wilkie] Alex Wilkie, *On Exponentiation — A Solution to Tarski's High School Algebra Problem*, in Angus Macintyre (ed.), *Connections between Model Theory and Algebraic and Analytic Geometry*, Dipartimento di Matematica, Seconda Università di Napoli, Caserta, 2000.

[Zimbarg] Jacob Zimbarg Sobrinho, *Introdução à Lógica Matemática*, IMPA, Rio de Janeiro, 1973.

"Para surpresa de todos que nos ajudaram, dedicamos nosso livro a todos os modelo-teóricos que nunca dedicaram um livro a si próprios." — de [Chang, Keisler]

Idealizamos esta representação da definição de satisfação de Tarski para a exposição em painel no 11º Simpósio de Iniciação Científica da USP: