

Nota sobre a atração entre carga e folha dielétrica: Uma errata comentada

(Note on the attraction between charge and a dielectric foil: A commented errata)

Guilherme F. Leal Ferreira¹

Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil

Recebido em 03/09/14; Aceito em 16/09/14; Publicado em 31/3/2015

Corrige-se e comenta-se resultado obtido em artigo publicado nesta revista sobre a atração entre carga elétrica e folha dielétrica – Revista Brasileira de Ensino de Física **24**, 285 (2002). O caso de folhas condutoras também é discutido.

Palavras-chave: força eletrostática, carga elétrica; folha dielétrica.

Results of an article published in this journal, Revista Brasileira de Ensino de Física **24**, 285 (2002), concerning the attraction between a charge and a dielectric foil are corrected and commented. The case of a conducting foil is also discussed.

Keywords: electrostatic force, electric charge; dielectric foil.

1. Introdução

No artigo “Carga em presença de folha dielétrica e a atração entre elas” [1], usou-se o método das imagens para se obter a solução do problema eletrostático. Na Fig. 1 mostra-se a disposição entre elas, sendo h a distância da carga q ao plano médio da folha, de espessura s . (e não à superfície da folha como na Ref. [1]). Na Fig. 2 mostram-se as cargas e dipolos imagens – com orientações convencionadas –, para as três regiões de continuidade do campo elétrico, com a notação em que as grandezas com linha estão abaixo da folha e os sub-índices designam a região a que se aplicam. A região I é aquela onde está colocada a carga q , a região II a do interior da folha, e a III é a livre, abaixo da folha. Para a região I usou-se, além da carga q , carga q'' simetricamente a q , (que resultou nula, e será ignorada aqui), e dipolo m'_I em III, simulando a reação da folha. Para a região II, usou-se carga q_{ii} e dipolo m_{ii} na posição de q e carga q'_{II} e dipolo m'_{II} na posição simétrica, abaixo da folha. Finalmente, para a região III, carga q e dipolo m_{III} na posição de q . Impôs-se a seguir a continuidade do potencial e da componente normal do deslocamento elétrico nas interfaces da folha, sendo k a constante dielétrica da folha. Os termos referentes às cargas foram desenvolvidas até a ordem de s , obtendo-se na Ref. [1], para as grandezas m'_I , q_{II} , m_{II} , q'_{II} , m'_{II} e m_{III} , as equações Eqs. (25)

a (28), com sua solução nas Eqs. (24) e (29), com a particularidade de fazer a força de atração finita para h tendendo a infinito (Eqs. (30) e (31) da Ref. [1]). Porém, os momentos de dipolo resultantes não coincidiram com aqueles induzidos da solução de Smythe [2] para blocos dielétricos no limite em que suas espessuras se tornam desprezíveis em relação à distância da carga à folha. Mas neste caso, a força tende para infinito para $k \rightarrow \infty$, para distâncias finitas, fato este fisicamente inaceitável. O artigo termina confessando não saber a razão da discrepância e implicitamente promovendo a solução obtida pelo método das imagens como a correta (porque finita).

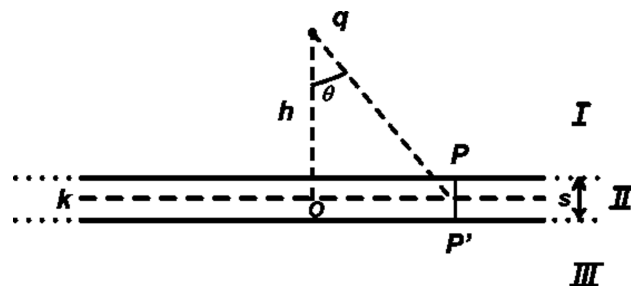


Figura 1 - Carga q à distância h do ponto O do plano médio da folha dielétrica de constante k e espessura s ($\ll h$). P e P' são pontos na superfície da folha para aplicação das condições de contorno. I, II e III são as regiões contínuas do potencial e campo elétrico onde agem cargas e dipolos convenientemente dispostos, como na Fig. 2.

¹E-mail: guilherm@ifsc.usp.br.

Presentemente retomamos o problema e verificamos que a Eq. (26) do sistema na Ref. [1] apresentava erro e o sistema a ser resolvido tornou-se então

$$\begin{aligned} m'_I - m_{II} - m'_{II} &= \frac{qs}{2}(-1 + \frac{1}{k}), \\ -m'_I - km_{II} + km''_{II} &= \frac{qs}{2}(-1 + k), \\ -m_{II} - m'_{II} + m_{III} &= \frac{qs}{2}(1 - \frac{1}{k}), \\ -km_{II} + km'_{II} + m_{III} &= \frac{qs}{2}(1 - k), \end{aligned}$$

com a confirmação dos valores das cargas, $q_{II} = q(k + 1)/2k$, $q'_{II} = q(k - 1)/2$ e $q_{III} = q$. Do sistema corrigido acima, resultaram os momentos de dipolo

$$\begin{aligned} m'_I &= -\frac{k^2 - 1}{2k}qs, \\ m_{II} &= -\frac{(k - 1)(k^2 - 1)}{4k^2}qs, \\ m'_{II} &= -\frac{(k - 1)^2(k^2 + 1)}{4k^2}qs, \end{aligned}$$

e

$$m_{III} = -\frac{(k - 1)^2}{2k}qs, \quad (1)$$

dos quais m_{III} em especial coincide com aquele advindo do tratamento de Smythe [2], Eq. (33) na Ref. [1]. Note-se que os dipolos na Fig. 2 devem ser revertidos e se anulam para $k = 1$. Com o valor de m'_I negativo, obtém-se a força de atração F entre a carga e a folha,

$$F = \frac{(k^2 - 1)q^2s}{16kh^3}, \quad (2)$$

em vez do valor na Eq. (30) na Ref. [1].

2. Discutindo a aparente divergência da força de atração para $k \rightarrow \infty$

E. Durand [3] no seu tratamento do mesmo problema, carga indutora-bloco dielétrico, dá explicitamente o valor do potencial, V'_1 , na região I. Com os símbolos das Figs. 1-2, em coordenadas cilíndricas, ρ e z , com origem no ponto simétrico de q (onde foi colocado q'_I) e exclusive da ação direta de q , esse potencial é dado por

$$\begin{aligned} V'_1 &= -2\beta q \int_0^\infty \frac{(\sinh ms) \cdot e^{-mz} J_0(m\rho)}{1 - \beta^2 e^{-2ms}} dm, \quad (3) \\ h + \frac{s}{2} &< z < \infty, \end{aligned}$$

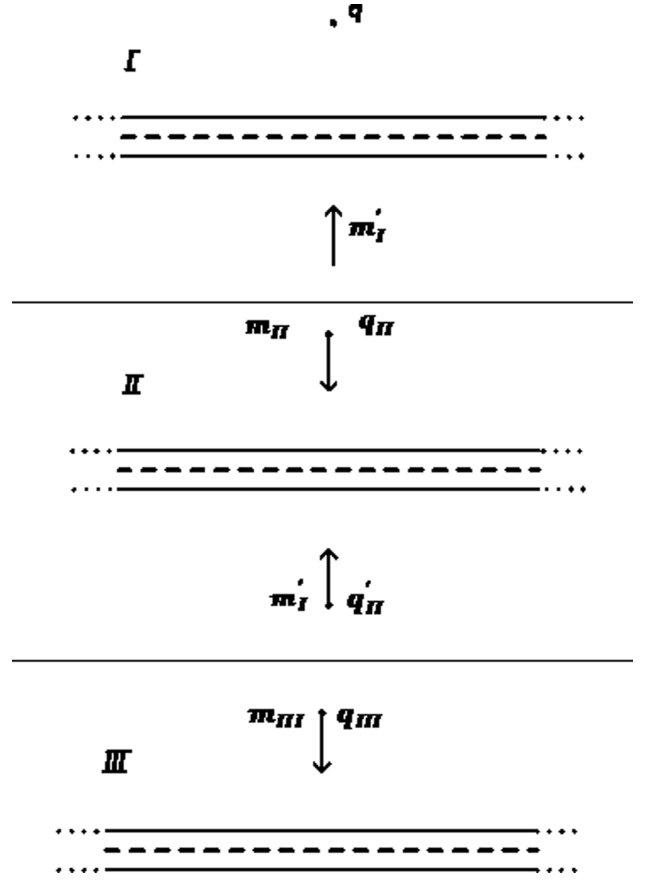


Figura 2 - Cargas e dipolos usados para obtenção dos campos para as regiões I, acima da folha, II, no interior da folha, e III, abaixo da folha.

em que J_0 é a função de Bessel de ordem 0, e $\beta = (k - 1)/(k + 1)$. Devemos recorrer ao tratamento analítico (de Durand ou Smythe) para avaliar a região de validade dos momentos de dipolo obtidos, em relação aos parâmetros do problema, em especial ao da constante dielétrica k , permitindo saber a aproximação com que foram calculados. Para simplificar, notemos logo que para o cálculo da força necessitamos apenas do potencial em pontos do eixo, o que nos permite impor $\rho = 0$ e assim $J_0(0) = 1$ no integrando da Eq. (1). Façamos além disso a mudança de notação

$$m = M/h, \quad S = s/h \quad \text{e} \quad Z = z/h. \quad (4)$$

Com isto, temos para V'_1

$$V'_1(Z) = \frac{-2\beta q}{h} \int_0^\infty \frac{(\sinh MS) e^{-MZ}}{1 - \beta^2 e^{-2MS}} dM \quad (5)$$

Notemos ainda que a força e os momentos de dipolo calculados derivam da aproximação $\sinh MS \cong MS$ na Eq. (5) e $e^{-2MS} \cong 1$ e, por conseguinte, uma melhor aproximação seria $e^{-2MS} \cong 1 - 2MS$. Nesse caso temos

$$V_1'(Z) = \frac{-2\beta q}{h(1-\beta^2)} \left[S \int_0^\infty M e^{-MZ} dM - \frac{2\beta^2 S^2}{1-\beta^2} \int_0^\infty M^2 e^{-MZ} dM + \dots \right] \quad (6)$$

que depois das integrações pode ser escrito como

$$V_1'(Z) = \frac{-2\beta q}{(1-\beta^2)} \left[\frac{s}{z^2} - \frac{4\beta^2 s^2}{1-\beta^2} \frac{1}{z^3} + \dots \right]. \quad (7)$$

em série alternada, com o primeiro termo correspondendo ao do dipolo m_1^1 , Eq. (1), já calculado. Se nos restringimos a este termo de dipolo, o erro incorrido será da ordem do segundo termo, como propriedade das séries inteiras em $(1/z)$ decrescentes alternadas. Assim, o momento de dipolo m_1^1 será representativo se for muito maior que o segundo, em $z=2h$, posição da carga q ,

$$\frac{s}{h^2} \gg \frac{4\beta^2 s^2}{1-\beta^2} \frac{1}{h^3}, \quad (8)$$

ou seja,

$$\frac{s}{h} \ll \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\beta^2} - 1 \right] = \frac{2k}{(k-1)^2} \quad (9)$$

e que para folhas finas e situações usuais em folhas de polímeros (espessuras da ordem de dezenas de micra e cargas a centímetros de distância), pequenos valores de

β (ou k próximo a 1) satisfazem confortavelmente esta relação, mas não para valores β 's próximos de 1, isto é, para altas constantes dielétricas, resolvendo-se assim o problema da divergência para os momentos de dipolo na Eq. (1).

Por outro lado, obtém-se para $\beta \rightarrow 1$ (folhas condutoras), diretamente da Eq. (2), que a reação da folha vem de uma carga $-q$ colocada especularmente em relação à superfície mais próxima da folha ($h-s/2$ na Fig. 1), independentemente de sua espessura.

Agradecimentos

Agradecemos ao Prof. José Alberto Giacometti pela ajuda na preparação desta Nota e ao Luiz Nunes de Oliveira pelas muitas discussões proveitosas sobre o assunto, ajudas ambas, inestimáveis.

Nota do Editor

Lamentamos registrar o falecimento do autor, ocorrido em São Carlos, no último dia 10 de janeiro. O professor Guilherme F. Leal Ferreira era um colaborador atuante da RBEF.

Referências

- [1] G.F. Leal Ferreira, Revista Brasileira de Ensino de Física **24**, 285 (2002).
- [2] W.R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity* (McGraw Hill Book Co., New York, 1950), chap. 5.
- [3] E. Durand, *Électrostatique* (Masson Éditeurs, Paris, 1966), v. 3, p. 233.