

# MAT-6678 - Topics on $C^\infty$ -Rings

## Aula 2

24 de julho de 2019



# Anéis $\mathcal{C}^\infty$

Conforme vimos na Aula 1, os anéis  $\mathcal{C}^\infty$  podem ser usados para construir modelos para a Geometria Diferencial Sintética.



Conforme vimos na Aula 1, os anéis  $C^\infty$  podem ser usados para construir modelos para a Geometria Diferencial Sintética.

Na aula de hoje veremos formalmente a definição de anel  $C^\infty$  dos pontos de vista funtorial e algébrico, priorizando este último.



# Teorias Algébricas

Há classes de teorias algébricas que podem ser expressas por certos objetos munidos de uma ou várias operações que são funções e cujos axiomas são expressos por equações.



# Teorias Algébricas

Há classes de teorias algébricas que podem ser expressas por certos objetos munidos de uma ou várias operações que são funções e cujos axiomas são expressos por equações. Por exemplo:

- ▶ A Teoria dos Grupos;



# Teorias Algébricas

Há classes de teorias algébricas que podem ser expressas por certos objetos munidos de uma ou várias operações que são funções e cujos axiomas são expressos por equações. Por exemplo:

- ▶ A Teoria dos Grupos;
- ▶ A Teoria dos Anéis;



# Teorias Algébricas

Há classes de teorias algébricas que podem ser expressas por certos objetos munidos de uma ou várias operações que são funções e cujos axiomas são expressos por equações. Por exemplo:

- ▶ A Teoria dos Grupos;
- ▶ A Teoria dos Anéis;
- ▶ A Teoria dos Módulos;



# Teorias Algébricas

Há classes de teorias algébricas que podem ser expressas por certos objetos munidos de uma ou várias operações que são funções e cujos axiomas são expressos por equações. Por exemplo:

- ▶ A Teoria dos Grupos;
- ▶ A Teoria dos Anéis;
- ▶ A Teoria dos Módulos;
- ▶ A Teoria dos Reticulados;



# Teorias Algébricas

Há classes de teorias algébricas que podem ser expressas por certos objetos munidos de uma ou várias operações que são funções e cujos axiomas são expressos por equações. Por exemplo:

- ▶ A Teoria dos Grupos;
- ▶ A Teoria dos Anéis;
- ▶ A Teoria dos Módulos;
- ▶ A Teoria dos Reticulados;
- ▶ A Teoria das Álgebras de Boole



# Teorias Algébricas

Note, no entanto, que a Teoria dos Corpos não pode ser expressa dessa forma, uma vez que a “operação” de tomar o inverso multiplicativo:



# Teorias Algébricas

Note, no entanto, que a Teoria dos Corpos não pode ser expressa dessa forma, uma vez que a “operação” de tomar o inverso multiplicativo:

$$\begin{array}{lcl} \text{inv} : \mathbb{K} \setminus \{0\} & \rightarrow & \mathbb{K} \\ k & \mapsto & k^{-1} \end{array}$$



# Teorias Algébricas

Note, no entanto, que a Teoria dos Corpos não pode ser expressa dessa forma, uma vez que a “operação” de tomar o inverso multiplicativo:

$$\begin{array}{rcl} \text{inv} : \mathbb{K} \setminus \{0\} & \rightarrow & \mathbb{K} \\ k & \mapsto & k^{-1} \end{array}$$

só está definida para elementos não nulos, não sendo assim uma função de  $\mathbb{K}$  em  $\mathbb{K}$ .



# Teorias Algébricas

## Definição

Uma *teoria algébrica* é uma categoria pequena,  $\mathbf{T}$  com produtos finitos.



# Teorias Algébricas

## Definição

Uma *teoria algébrica* é uma categoria pequena,  $\mathbf{T}$  com produtos finitos.

## Exemplo

Considere a categoria  $\mathbf{Pol}$  cujos objetos são potências cartesianas de  $\mathbb{R}$ , ou seja,  $\text{Obj}(\mathbf{Pol}) = \{\{*\}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n, \dots\}$ , e cujos morfismos são funções polinomiais entre estes objetos, ou seja, para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ ,



# Teorias Algébricas

## Definição

Uma *teoria algébrica* é uma categoria pequena,  $\mathbf{T}$  com produtos finitos.

## Exemplo

Considere a categoria  $\mathbf{Pol}$  cujos objetos são potências cartesianas de  $\mathbb{R}$ , ou seja,  $\text{Obj}(\mathbf{Pol}) = \{\{*\}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n, \dots\}$ , e cujos morfismos são funções polinomiais entre estes objetos, ou seja, para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{Hom}_{\mathbf{Pol}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \{\mathbb{R}^m \xrightarrow{p} \mathbb{R}^n \mid p \text{ é polinomial}\}$$

Como  $\mathbf{Pol}$  é uma categoria pequena ( $\text{Obj}(\mathbf{Pol})$  é enumerável) e tem todos os produtos finitos, segue que  $\mathbf{Pol}$  é uma teoria algébrica.



# Anéis $C^\infty$ como Teoria Algébrica

## Exemplo

Considere a categoria  $\mathbf{C}^\infty$  cujos objetos são potências cartesianas de  $\mathbb{R}$ , ou seja,  $\text{Obj}(\mathbf{C}^\infty) = \{ \{*\}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n, \dots \}$ , e cujos morfismos são funções de classe  $C^\infty$  entre estes objetos, ou seja, para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ ,



# Anéis $C^\infty$ como Teoria Algébrica

## Exemplo

Considere a categoria  $\mathbf{C}^\infty$  cujos objetos são potências cartesianas de  $\mathbb{R}$ , ou seja,  $\text{Obj}(\mathbf{C}^\infty) = \{\{*\}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n, \dots\}$ , e cujos morfismos são funções de classe  $C^\infty$  entre estes objetos, ou seja, para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}^\infty}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

Como  $\mathbf{C}^\infty$  é uma categoria pequena e tem todos os produtos finitos, segue que  $\mathbf{C}^\infty$  é uma teoria algébrica.



# Exemplos de Teorias Algébricas

## Definição

Sejam  $\mathbf{T}$  uma teoria algébrica e  $\mathcal{E}$  um topos. Um **modelo da teoria  $\mathbf{T}$**  em  $\mathcal{E}$  é um funtor:

$$A : \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{E}$$

que preserva produtos finitos.



# Anéis $\mathcal{C}^\infty$ como Teoria Algébrica

Neste curso nos restringiremos a  $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$ .



# Anéis $\mathcal{C}^\infty$ como Teoria Algébrica

Neste curso nos restringiremos a  $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$ .

## Exemplo

*Um modelo de **Pol** é um funtor que preserva produtos:*



# Anéis $C^\infty$ como Teoria Algébrica

Neste curso nos restringiremos a  $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$ .

## Exemplo

*Um modelo de  $\mathbf{Pol}$  é um funtor que preserva produtos:*

$$A : \mathbf{Pol} \rightarrow \mathbf{Set}$$

*e é denominado uma  $\mathbb{R}$ -álgebra.*

*Um modelo de  $\mathbf{C}^\infty$  é um funtor que preserva produtos:*



# Anéis $C^\infty$ como Teoria Algébrica

Neste curso nos restringiremos a  $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$ .

## Exemplo

Um modelo de  $\mathbf{Pol}$  é um funtor que preserva produtos:

$$A : \mathbf{Pol} \rightarrow \mathbf{Set}$$

e é denominado uma  $\mathbb{R}$ -álgebra.

Um modelo de  $\mathbf{C}^\infty$  é um funtor que preserva produtos:

$$A : \mathbf{C}^\infty \rightarrow \mathbf{Set}$$

e é denominado um *anel*  $C^\infty$ .



# Anéis $\mathcal{C}^\infty$ como Teoria Algébrica

Neste contexto temos a seguinte:



# Anéis $C^\infty$ como Teoria Algébrica

Neste contexto temos a seguinte:

## Definição

Um *anel*  $C^\infty$  é um funtor que preserva produtos finitos:

$$A : C^\infty \rightarrow \mathbf{Set}$$

Um *morfismo de anéis*  $C^\infty$   $A$  e  $B$  é uma transformação natural,  $A \xRightarrow{\eta} B$ .



# Anéis $C^\infty$ como Teoria Algébrica

Ainda no contexto da definição acima, podemos pensar em uma  $\mathbb{R}$ -álgebra como um functor capaz de interpretar todas as funções polinomiais.



# Anéis $\mathcal{C}^\infty$ como Teoria Algébrica

Ainda no contexto da definição acima, podemos pensar em uma  $\mathbb{R}$ -álgebra como um functor capaz de interpretar todas as funções polinomiais.

Um anel  $\mathcal{C}^\infty$  é, portanto, um functor capaz de interpretar todas as funções de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .



# Anéis $C^\infty$ como Teoria Algébrica

Ainda no contexto da definição acima, podemos pensar em uma  $\mathbb{R}$ -álgebra como um functor capaz de interpretar todas as funções polinomiais.

Um anel  $C^\infty$  é, portanto, um functor capaz de interpretar todas as funções de classe  $C^\infty$ .

Neste sentido, anéis  $C^\infty$  generalizam  $\mathbb{R}$ -álgebras: como toda função polinomial é, em particular, de classe  $C^\infty$ , segue que a todo anel  $C^\infty$  subjaz uma estrutura de  $\mathbb{R}$ -álgebra.



# Exemplo de Anel $\mathcal{C}^\infty$

## Exemplo (Versão Funtorial)

Dado qualquer  $m \in \mathbb{N}$ , pode-se demonstrar que o funtor:

$$\begin{array}{ccc} A : \mathbf{C}^\infty & \rightarrow & \mathbf{Set} \\ \mathbb{R} & \mapsto & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \\ \mathbb{R}^n & \mapsto & (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m))^n \\ \downarrow f & & \downarrow f_* = f \circ - \\ \mathbb{R}^p & & (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m))^p \end{array}$$

*preserva produtos finitos.*



# Anéis $C^\infty$ como Álgebra Universal

## Definição (operação $n$ -ária)

Sejam  $A$  um conjunto e  $n \in \mathbb{N}$ . Uma **operação  $n$ -ária** em  $A$  é uma função  $f : A^n \rightarrow A$ . O número  $n$  é a **aridade** da operação  $f$ .



# Anéis $C^\infty$ como Álgebra Universal

## Definição (operação $n$ -ária)

Sejam  $A$  um conjunto e  $n \in \mathbb{N}$ . Uma **operação  $n$ -ária** em  $A$  é uma função  $f : A^n \rightarrow A$ . O número  $n$  é a **aridade** da operação  $f$ .

## Definição (tipo de similaridade)

Um **tipo de similaridade**,  $\mathcal{T}$ , é um par  $(T, \text{ar} : T \rightarrow \mathbb{N})$ , onde  $T$  é um conjunto de símbolos e  $\text{ar} : T \rightarrow \mathbb{N}$  é uma função que a cada símbolo associa uma aridade. Costuma-se denotar  $T_n = \text{ar}^{-1}[\{n\}]$ , de modo que  $T = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$



# Anéis $\mathcal{C}^\infty$ como Álgebra Universal

## Definição (álgebra de tipo $\mathcal{T}$ )

Seja  $\mathcal{T} = (T, \text{ar} : T \rightarrow \mathbb{N})$  um tipo de similaridade. Uma **álgebra de tipo  $\mathcal{T}$**  consiste de um par  $(A, \Phi)$ , onde  $A$  é um conjunto e:

$$\begin{aligned} \Phi : \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} T_n &\rightarrow \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Fun}(A^n, A) \\ (t, n) &\mapsto \Phi(t) : A^n \rightarrow A \end{aligned}$$

é uma função que “interpreta” os símbolos  $n$ -ários de  $T$  como operações  $n$ -árias.



# Anéis $C^\infty$ como Álgebra Universal

## Definição (estrutura $C^\infty$ )

Uma *estrutura  $C^\infty$*  é uma *álgebra de tipo*  $\mathcal{T} = (T, \text{ar} : T \rightarrow \mathbb{N})$ , onde:



# Anéis $C^\infty$ como Álgebra Universal

## Definição (estrutura $C^\infty$ )

Uma **estrutura**  $C^\infty$  é uma **álgebra de tipo**  $\mathcal{T} = (T, \text{ar} : T \rightarrow \mathbb{N})$ , onde:

$$T = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

e

$$\text{ar}(f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}) = n$$



# Anéis $\mathcal{C}^\infty$ como Álgebra Universal

## Definição (estrutura $\mathcal{C}^\infty$ )

Uma **estrutura  $\mathcal{C}^\infty$**  é uma **álgebra de tipo**  $\mathcal{T} = (T, \text{ar} : T \rightarrow \mathbb{N})$ , onde:

$$T = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

e

$$\text{ar}(f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}) = n$$

Desta forma, uma estrutura  $\mathcal{C}^\infty$  é um par  $(A, \Phi)$ , onde  $A$  é um conjunto não vazio e:

$$\begin{aligned} \Phi : \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &\rightarrow \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Fun}(A^n, A) \\ (\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}) &\mapsto (A^n \xrightarrow{\Phi(f)} A) \end{aligned}$$



# Anéis $C^\infty$ como Álgebra Universal

## Definição (morfismo de estruturas $C^\infty$ )

Sejam  $\mathfrak{A} = (A, \Phi)$  e  $\mathfrak{B} = (B, \Psi)$  duas estruturas  $C^\infty$ . Um  $C^\infty$ -**morfismo** é uma função  $\varphi : A \rightarrow B$  tal que para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  e qualquer  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  o seguinte diagrama comuta:



# Anéis $C^\infty$ como Álgebra Universal

## Definição (morfismo de estruturas $C^\infty$ )

Sejam  $\mathfrak{A} = (A, \Phi)$  e  $\mathfrak{B} = (B, \Psi)$  duas estruturas  $C^\infty$ . Um  $C^\infty$ -**morfismo** é uma função  $\varphi : A \rightarrow B$  tal que para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  e qualquer  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{\varphi^n} & B^n \\ \Phi(f) \downarrow & & \downarrow \Psi(f) \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$



# Categoria das Estruturas $\mathcal{C}^\infty$

É rotineiro demonstrar que a classe das  $\mathcal{C}^\infty$ –estruturas e dos  $\mathcal{C}^\infty$ –morfismos constituem uma categoria, que denotamos por  $\mathcal{C}^\infty\mathbf{Str}$ . (Verifique!)



# Anéis $\mathcal{C}^\infty$ como Álgebra Universal

## Definição (**Anel** $\mathcal{C}^\infty$ )

Um *anel*  $\mathcal{C}^\infty$  é uma estrutura  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $\mathfrak{A} = (A, \Phi)$  tal que:



# Anéis $C^\infty$ como Álgebra Universal

## Definição (**Anel $C^\infty$** )

Um *anel  $C^\infty$*  é uma estrutura  $C^\infty$ ,  $\mathfrak{A} = (A, \Phi)$  tal que:

- ▶ Dados quaisquer  $n, k \in \mathbb{N}$  e qualquer projeção na  $k$ -ésima coordenada,  $p_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(p_k) : A^n \rightarrow A$  for a projeção na  $k$ -ésima coordenada;



# Anéis $C^\infty$ como Álgebra Universal

## Definição (Anel $C^\infty$ )

Um *anel*  $C^\infty$  é uma estrutura  $C^\infty$ ,  $\mathfrak{A} = (A, \Phi)$  tal que:

- ▶ Dados quaisquer  $n, k \in \mathbb{N}$  e qualquer projeção na  $k$ -ésima coordenada,  $p_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(p_k) : A^n \rightarrow A$  for a projeção na  $k$ -ésima coordenada;
- ▶ Dados quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ , para quaisquer  $f, g_1, \dots, g_n \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  e qualquer  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  tais que  $f = h \circ (g_1, \dots, g_n)$  tem-se:

$$\Phi(f) = \Phi(h) \circ (\Phi(g_1), \dots, \Phi(g_n))$$



# Anéis $C^\infty$ como Álgebra Universal

## Exemplo (Versão Álgebra Universal)

Dado qualquer  $m \in \mathbb{N}$ , notamos que o conjunto  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  pode ser munido de uma estrutura  $C^\infty$ :

$$\begin{array}{ccc} \Omega : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) & \rightarrow & \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Func}(C^\infty(\mathbb{R}^m)^n, C^\infty(\mathbb{R}^m)) \\ (\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}) & \mapsto & f_* : C^\infty(\mathbb{R}^m)^n \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^m) \\ & & (h_1, \dots, h_n) \mapsto f \circ (h_1, \dots, h_n) \end{array}$$

de modo que é fácil ver que  $(C^\infty(\mathbb{R}^m), \Omega)$  é um anel  $C^\infty$ . A estrutura  $\Omega$  é denominada por nós como a **estrutura  $C^\infty$  canônica de  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$** .



# Anéis $C^\infty$ como Álgebra Universal

Observe que os exemplos dados na versão funtorial e na versão via Álgebra Universal codificam exatamente as mesmas informações.

Se denotarmos por  $\mathbf{FPPF}(C^\infty, \mathbf{Set})$  a categoria dos funtores que preservam produtos finitos (“Finite Product Preserving Functors”) de  $C^\infty$  em  $\mathbf{Set}$ , existe uma equivalência de categorias:



# Anéis $C^\infty$ como Álgebra Universal

Observe que os exemplos dados na versão funtorial e na versão via Álgebra Universal codificam exatamente as mesmas informações.

Se denotarmos por  $\mathbf{FPPF}(C^\infty, \mathbf{Set})$  a categoria dos funtores que preservam produtos finitos (“Finite Product Preserving Functors”) de  $C^\infty$  em  $\mathbf{Set}$ , existe uma equivalência de categorias:

$$\mathcal{V} : \mathbf{FPPF}(C^\infty, \mathbf{Set}) \simeq C^\infty \mathbf{Rng}$$



# Anéis $C^\infty$ como Álgebra Universal

## Definição (homomorfismo de anéis $C^\infty$ )

Sejam  $\mathfrak{A} = (A, \Phi)$  e  $\mathfrak{B} = (B, \Psi)$  dois anéis  $C^\infty$ . Um  $C^\infty$ -homomorfismo é um um  $C^\infty$ -morfismo entre  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$ , ou seja, uma função  $\varphi : A \rightarrow B$  tal que para qualquer  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{\varphi^n} & B^n \\ \Phi(f) \downarrow & & \downarrow \Psi(f) \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

comuta.



# Anéis $C^\infty$ como Álgebra Universal

## Definição (homomorfismo de anéis $C^\infty$ )

Sejam  $\mathfrak{A} = (A, \Phi)$  e  $\mathfrak{B} = (B, \Psi)$  dois anéis  $C^\infty$ . Um  $C^\infty$ -homomorfismo é um  $C^\infty$ -morfismo entre  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$ , ou seja, uma função  $\varphi : A \rightarrow B$  tal que para qualquer  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{\varphi^n} & B^n \\ \Phi(f) \downarrow & & \downarrow \Psi(f) \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

comuta.

- Definimos, assim, a categoria dos anéis  $C^\infty$  e dos  $C^\infty$ -homomorfismos, que denotaremos por  $C^\infty \mathbf{Rng}$ .



# Anéis $C^\infty$ como Álgebra Universal

## Definição (homomorfismo de anéis $C^\infty$ )

Sejam  $\mathfrak{A} = (A, \Phi)$  e  $\mathfrak{B} = (B, \Psi)$  dois anéis  $C^\infty$ . Um  $C^\infty$ -homomorfismo é um  $C^\infty$ -morfismo entre  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$ , ou seja, uma função  $\varphi : A \rightarrow B$  tal que para qualquer  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{\varphi^n} & B^n \\ \Phi(f) \downarrow & & \downarrow \Psi(f) \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

comuta.

- Definimos, assim, a categoria dos anéis  $C^\infty$  e dos  $C^\infty$ -homomorfismos, que denotaremos por  $C^\infty\mathbf{Rng}$ .
- É de imediata constatação que  $C^\infty\mathbf{Rng}$  é uma subcategoria plena de  $C^\infty\mathbf{Str}$ .



# Principais Construções

Uma vez que  $\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng}$  é uma teoria equacional,  $\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng}$  é fechada em  $\mathcal{C}^\infty\mathbf{Str}$  por muitas construções algébricas.



# Subanéis $C^\infty$

## Definição

Sejam  $\mathfrak{A} = (A, \Phi)$  um anel  $C^\infty$  – e  $B \subseteq A$ . Dizemos que  $(B, \Phi')$  é um **subanel**  $C^\infty$  de  $(A, \Phi)$  se, e somente se, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  e  $(b_1, \dots, b_n) \in B^n$  tivermos:

$$\Phi(f)(b_1, \dots, b_n) \in B$$



# Subanéis $C^\infty$

## Definição

Sejam  $\mathfrak{A} = (A, \Phi)$  um anel  $C^\infty$  – e  $B \subseteq A$ . Dizemos que  $(B, \Phi')$  é um **subanel**  $C^\infty$  de  $(A, \Phi)$  se, e somente se, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  e  $(b_1, \dots, b_n) \in B^n$  tivermos:

$$\Phi(f)(b_1, \dots, b_n) \in B$$

$B$  é fechado por qualquer funcional  $C^\infty$   $n$ -ário.



# Subanéis $C^\infty$

Note que a estrutura  $C^\infty$  de  $B$  é virtualmente a mesma estrutura  $C^\infty$  de  $(A, \Phi)$ , uma vez que ambas interpretam os símbolos da mesma forma.



## Subanéis $C^\infty$

Note que a estrutura  $C^\infty$  de  $B$  é virtualmente a mesma estrutura  $C^\infty$  de  $(A, \Phi)$ , uma vez que ambas interpretam os símbolos da mesma forma.

Entretanto,  $\Phi'$  tem um codomínio diferente, uma vez que:

$$\begin{aligned} \Phi' : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &\rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Func}(B^n, B) \\ (\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}) &\mapsto (\Phi(f) \upharpoonright_{B^n} : B^n \rightarrow B) \end{aligned}$$



# Subanéis $\mathcal{C}^\infty$

## Proposição

Seja  $\{(A_\alpha, \Phi_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$  uma família de subanéis  $\mathcal{C}^\infty$  de  $(A, \Phi)$ , de modo que:

$$(\forall \alpha \in \Lambda)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))(\Phi_\alpha(f) = \Phi(f) \upharpoonright_{A_\alpha^n}: A_\alpha^n \rightarrow A_\alpha)$$

Temos que:

$$\left( \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha, \Phi' \right)$$

onde:

$$\begin{aligned} \Phi' : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &\rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Func} \left( \left( \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right)^n, \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) \\ \left( \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \right) &\mapsto \Phi(f) \upharpoonright_{\left( \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right)^n} \end{aligned}$$

é um subanel  $\mathcal{C}^\infty$



# Subanel $\mathcal{C}^\infty$ Gerado por um Conjunto

## Definição

Seja  $(A, \Phi)$  um anel  $\mathcal{C}^\infty$  e  $X \subseteq A$ . O subanel  $\mathcal{C}^\infty$  de  $(A, \Phi)$  gerado por  $X$  é:

$$\langle X \rangle = \bigcap_{\substack{X \subseteq A_i \\ (A_i, \Phi_i) \preceq (A, \Phi)}} (A_i, \Phi_i),$$

onde  $(A_i, \Phi_i) \preceq (A, \Phi)$  significa que  $(A_i, \Phi_i)$  é um subanel  $\mathcal{C}^\infty$  de  $(A, \Phi)$

juntamente com a estrutura  $\mathcal{C}^\infty$  dada na proposição anterior.



# Reunião Dirigida de Anéis $\mathcal{C}^\infty$

## Proposição

Sejam  $(A, \Phi)$  um anel  $\mathcal{C}^\infty$  e  $\{(A_\alpha, \Phi_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ,  $\Lambda \neq \emptyset$  uma família dirigida de subanel  $\mathcal{C}^\infty$  de  $(A, \Phi)$ , ou seja, uma família tal que para cada par de índices  $(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda$  existe algum  $\gamma \in \Lambda$  tal que:

$$A_\alpha \subseteq A_\gamma \text{ e } A_\beta \subseteq A_\gamma$$

Temos que  $(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha, \Phi')$ , onde:

$$\begin{aligned} \Phi' : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &\rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Func} \left( (\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha)^n, \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) \\ (\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}) &\mapsto \Phi(f) \upharpoonright_{(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha)^n} \end{aligned}$$

é um subanel  $\mathcal{C}^\infty$  de  $(A, \Phi)$ .



# Observação

Note que dada uma família infinita de variedades de classe  $C^\infty$ ,  $\{M_\alpha \mid \alpha \in I\}$ ,  $\prod_{i \in I} M_\alpha$  não é uma variedade de classe  $C^\infty$ .



# Produto de Anéis $\mathcal{C}^\infty$

## Definição (produto de anéis $\mathcal{C}^\infty$ )

Seja  $\{(A_\alpha, \Phi_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$  uma família de anéis  $\mathcal{C}^\infty$ . O **produto** desta família é o par  $(\prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha, \Phi^{(\Lambda)})$ , onde  $\Phi$  é dado por:

$$\Phi^{(\Lambda)} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Func} \left( \left( \prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right)^n, \prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right)$$

onde:

$$\begin{aligned} \Phi^{(\Lambda)}(f) : & \left( \prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right)^n & \rightarrow & \prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \\ \left( (x_\alpha^1)_{\alpha \in \Lambda}, \dots, (x_\alpha^n)_{\alpha \in \Lambda} \right) & \mapsto & \left( \Phi_\alpha(f)(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n) \right)_{\alpha \in \Lambda} \end{aligned}$$



# Congruências $C^\infty$

## Definição (congruência $C^\infty$ )

Seja  $(A, \Phi)$  um anel  $C^\infty$ . Uma **congruência**  $C^\infty$  é uma relação de equivalência  $R \subseteq A \times A$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  e toda  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  temos:

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in R \Rightarrow \Phi^{(2)}(f)((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \in R$$

Em outras palavras, uma congruência  $C^\infty$  é uma relação de equivalência que preserva os símbolos funcionais  $C^\infty$ .



# Congruências $C^\infty$

## Proposição

Sejam  $(A, \Phi)$  um anel  $C^\infty$  e  $R \subseteq A \times A$  uma relação de equivalência.  $R$  é uma congruência  $C^\infty$  em  $(A, \Phi)$  se, e somente se,  $(R \times R, \Phi^{(2)'})$ , onde:

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)'} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &\rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Func}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ (\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}) &\mapsto \Phi^{(2)}(f) \upharpoonright_{R^n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

é um subanel  $C^\infty$  do produto  $(A \times A, \Phi^{(2)})$ .



# Quocientes de Anéis $\mathcal{C}^\infty$

## Definição

Sejam  $(A, \Phi)$  um anel  $\mathcal{C}^\infty$  e  $R \subseteq A \times A$  uma congruência  $\mathcal{C}^\infty$ . O anel  $\mathcal{C}^\infty$  quociente de  $A$  por  $R$  é:

$$\left( \frac{A}{R}, \overline{\Phi} \right)$$

onde:

$$\frac{A}{R} = \{\overline{a} \mid a \in A\}$$

e para quaisquer  $(\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n) \in \left(\frac{A}{R}\right)^n$  e  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,

$$\overline{\Phi}(f)(\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n) = \overline{\Phi(f)(a_1, \dots, a_n)}$$



# Quocientes de Anéis $\mathcal{C}^\infty$

## Proposição

Sejam  $(A, \Phi)$  um anel  $\mathcal{C}^\infty$  e  $R \subseteq A \times A$  uma congruência  $\mathcal{C}^\infty$ . A função:

$$q : (A, \Phi) \rightarrow \left( \frac{A}{R}, \overline{\Phi} \right)$$
$$a \mapsto \bar{a}$$

é um homomorfismo  $\mathcal{C}^\infty$ .



# Congruências em Anéis $\mathcal{C}^\infty$

## Proposição

Sejam  $(A, \Phi)$  e  $(B, \Psi)$  dois anéis  $\mathcal{C}^\infty$  e seja  $\varphi : (A, \Phi) \rightarrow (B, \Psi)$  um homomorfismo  $\mathcal{C}^\infty$ . O conjunto:

$$\ker(\varphi) = \{(a, a') \in A \times A \mid \varphi(a) = \varphi(a')\}$$

é uma congruência  $\mathcal{C}^\infty$  em  $(A, \Phi)$ .



# Congruências $\mathcal{C}^\infty$

## Corolário

Sejam  $(A, \Phi)$  e  $(B, \Psi)$  dois anéis  $\mathcal{C}^\infty$  e  $\varphi : (A, \Phi) \rightarrow (B, \Psi)$  um  $\mathcal{C}^\infty$ -homomorfismo. Então  $(\ker(\varphi), \Phi^{(2)'})$  é um subanel  $\mathcal{C}^\infty$  de  $(A \times A, \Phi^{(2)})$ .



# Ideais Classificam Congruências $\mathcal{C}^\infty$

Todo anel  $\mathcal{C}^\infty \mathfrak{A} = (A, \Phi)$  tem uma estrutura natural de anel comutativo com unidade:



# Ideais Classificam Congruências $\mathcal{C}^\infty$

Todo anel  $\mathcal{C}^\infty \mathfrak{A} = (A, \Phi)$  tem uma estrutura natural de anel comutativo com unidade:

$$(A, \Phi(+), \Phi(\cdot), \Phi(1))$$



# Ideais Classificam Congruências $\mathcal{C}^\infty$

Todo anel  $\mathcal{C}^\infty \mathfrak{A} = (A, \Phi)$  tem uma estrutura natural de anel comutativo com unidade:

$$(A, \Phi(+), \Phi(\cdot), \Phi(1))$$

Um fato surpreendente da teoria dos anéis  $\mathcal{C}^\infty$  é o de que as congruências de anéis  $\mathcal{C}^\infty$  são classificadas pelos ideais do anel  $(A, \Phi(+), \Phi(\cdot), \Phi(1))$



# Anéis $C^\infty$ Finitamente Gerados

## Definição (anel $C^\infty$ finitamente gerado)

Um anel  $C^\infty$   $\mathfrak{A} = (A, \Phi)$  é **finitamente gerado** se existm  $n \in \mathbb{N}$  e um ideal (no sentido da Teoria dos Anéis),  $I \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tais que  $A = \frac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}$  e  $\Phi = \bar{\Omega}$ , onde  $\bar{\Omega}$  é a estrutura induzida por  $\Omega$  no quociente. A categoria dos anéis  $C^\infty$  finitamente gerados é denotada por  $C^\infty \mathbf{Rng}_{f.g.}$ .



# Teorema Fundamental do Homomorfismo

## Teorema

Sejam  $(A, \Phi)$  um anel  $\mathcal{C}^\infty$  e  $R \subseteq A \times A$  uma congruência  $\mathcal{C}^\infty$ . Para todo anel  $\mathcal{C}^\infty$   $(B, \Psi)$  e para todo  $\mathcal{C}^\infty$ -homomorfismo  $\varphi : (A, \Phi) \rightarrow (B, \Psi)$  tal que  $R \subseteq \ker(\varphi)$ , ou seja, tal que:

$$(a, a') \in R \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(a'),$$

existe um único  $\mathcal{C}^\infty$ -homomorfismo,  $\tilde{\varphi} : \left( \frac{A}{R}, \overline{\Phi} \right) \rightarrow (B, \Psi)$ , tal que o seguinte diagrama comuta:



# Teorema Fundamental do Homomorfismo

## Teorema

Sejam  $(A, \Phi)$  um anel  $C^\infty$  e  $R \subseteq A \times A$  uma congruência  $C^\infty$ . Para todo anel  $C^\infty$   $(B, \Psi)$  e para todo  $C^\infty$ -homomorfismo  $\varphi : (A, \Phi) \rightarrow (B, \Psi)$  tal que  $R \subseteq \ker(\varphi)$ , ou seja, tal que:

$$(a, a') \in R \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(a'),$$

existe um único  $C^\infty$ -homomorfismo,  $\tilde{\varphi} : \left( \frac{A}{R}, \overline{\Phi} \right) \rightarrow (B, \Psi)$ , tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} (A, \Phi) & \xrightarrow{\varphi} & (B, \Psi) \\ \downarrow q & \nearrow \tilde{\varphi} & \\ \left( \frac{A}{R}, \overline{\Phi} \right) & & \end{array}$$



# Observação

Note que a categoria **Man**, não é verdade, em geral, que a imagem de uma variedade de classe  $C^\infty$  por uma função  $C^\infty$  seja sempre uma variedade.



# Observação

Note que a categoria **Man**, não é verdade, em geral, que a imagem de uma variedade de classe  $C^\infty$  por uma função  $C^\infty$  seja sempre uma variedade.

Em outras palavras, a categoria **Man** não é fechada por imagens homomorfas.



# Imagens Homomorfas

## Proposição

Sejam  $(A, \Phi)$  e  $(B, \Psi)$  anéis  $C^\infty$  e seja  $\varphi : (A, \Phi) \rightarrow (B, \Psi)$  um  $C^\infty$ -homomorfismo. O par:

$$(\varphi[A], \Psi')$$

onde:

$$\begin{aligned} \Psi' : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &\rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Func}(\varphi[A]^n, \varphi[A]) \\ (\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}) &\mapsto \Psi(f) \upharpoonright_{\varphi[A]^n} : \varphi[A]^n \rightarrow \varphi[A] \end{aligned}$$

é um subanel  $C^\infty$  de  $(B, \Psi)$ , denominado **a imagem homomorfa de  $A$  por  $\varphi$** .



# Colimites de Anéis $\mathcal{C}^\infty$

## Teorema (Existência de Limite Indutivo Dirigido)

Sejam  $(I, \leq)$  um conjunto dirigido e  $((A_\alpha, \Phi_\alpha), \mu_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in I}$  um sistema dirigido. Existe um objeto  $(A, \Phi)$  de  $\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}$  tal que:

$$(A, \Phi) \cong \varinjlim_{\alpha \in I} (A_\alpha, \Phi_\alpha)$$



# Observação

Em geral, ao pullback de duas variedades de classe  $\mathcal{C}^\infty$  não é uma variedade de classe  $\mathcal{C}^\infty$  - a menos que se trate de um pullback *transversal*. Desta forma, **Man** não é uma categoria fechada por limites - uma vez que pullback é um limite.



# Existência de Limites Pequenos

## Teorema ( $\mathcal{C}^\infty$ Rng é completa)

Dada qualquer categoria pequena  $\mathcal{J}$  e qualquer diagrama:

$$D : \quad \mathcal{J} \quad \rightarrow \quad \mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}$$
$$(\alpha \xrightarrow{h} \beta) \mapsto (A_\alpha, \Phi_\alpha) \xrightarrow{D(h)} (A_\beta, \Phi_\beta)$$

existe um anel  $\mathcal{C}^\infty (A, \Phi)$  tal que:

$$(A, \Phi) \cong \varprojlim_{\alpha \in I} D(\alpha)$$



# Coproduto de Anéis $\mathcal{C}^\infty$

## Definição

Sejam  $(A, \Phi)$  e  $(B, \Psi)$  dois anéis  $\mathcal{C}^\infty$ . O **coproduto** de  $(A, \Phi)$  e  $(B, \Psi)$  é um anel  $\mathcal{C}^\infty$   $A \otimes_\infty B$  juntamente com os homomorfismos  $\mathcal{C}^\infty$  canônicos:



# Coproduto de Anéis $\mathcal{C}^\infty$

## Definição

Sejam  $(A, \Phi)$  e  $(B, \Psi)$  dois anéis  $\mathcal{C}^\infty$ . O **coproduto** de  $(A, \Phi)$  e  $(B, \Psi)$  é um anel  $\mathcal{C}^\infty$   $A \otimes_\infty B$  juntamente com os homomorfismos  $\mathcal{C}^\infty$  canônicos:

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ & \searrow \iota_A & \\ & & A \otimes_\infty B \\ & \nearrow \iota_B & \\ B & & \end{array}$$

com a propriedade universal de coproduto.



# Anéis $C^\infty$ Livres

## Definição

Seja  $X$  um conjunto. O anel  $C^\infty$  livre gerado por  $X$  é um par  $((L(X), \Lambda), j_X : X \rightarrow U(L(X), \Lambda))$  onde  $(L(X), \Lambda)$  é o único anel  $C^\infty$  tal que para todo anel  $C^\infty (A, \Phi)$  e para toda função  $f : X \rightarrow U(A, \Phi)$ , existe um único  $C^\infty$ -homomorfismo  $\varphi : (L(X, \Lambda)) \rightarrow (A, \Phi)$  tal que o seguinte diagrama comuta:



# Anéis $C^\infty$ Livres

## Definição

Seja  $X$  um conjunto. O anel  $C^\infty$  livre gerado por  $X$  é um par  $((L(X), \Lambda), j_X : X \rightarrow U(L(X), \Lambda))$  onde  $(L(X), \Lambda)$  é o único anel  $C^\infty$  tal que para todo anel  $C^\infty (A, \Phi)$  e para toda função  $f : X \rightarrow U(A, \Phi)$ , existe um único  $C^\infty$ -homomorfismo  $\varphi : (L(X), \Lambda) \rightarrow (A, \Phi)$  tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_X} & U(L(X), \Lambda) \\ & \searrow f & \downarrow U(\varphi) \\ & & U(A, \Phi) \end{array}$$



# Anéis $C^\infty$ Livres

## Teorema

*Demonstra-se que sempre que  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  é um conjunto finito com  $n$  elementos, o anel  $(C^\infty, \Omega)$  livre em  $n$  geradores é isomorfo ao anel  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,*

$$\begin{aligned} J_X : X &\rightarrow U(C^\infty(\mathbb{R}^n), \Omega) \\ x_i &\mapsto p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$



# Anéis $C^\infty$ Livres

Dado um conjunto  $E$  qualquer, considere:

$$(C^\infty(\mathbb{R}^E), \Phi_E) = \varinjlim_{E' \subseteq_f E} (C^\infty(\mathbb{R}^{E'}), \Phi_{E'}),$$

onde " $\subseteq_f$ " significa "é subconjunto finito de", juntamente com a única função  $J_E : E = \bigcup_{E' \subseteq_f E} E' \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^E)$  tal que para todo  $E' \subseteq_f E$  o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{J_E} & C^\infty(\mathbb{R}^E) \\ \uparrow & & \uparrow \ell_{E'} \\ E' & \xrightarrow{J_{E'}} & C^\infty(\mathbb{R}^{E'}) \end{array}$$



## Proposição

*Seja  $E$  um conjunto qualquer. O par  $(j_E, (C^\infty(\mathbb{R}^E), \Phi_E))$  é o anel  $C^\infty$  livre determinado por  $E$ .*



# $U$ é Adjunto à Direita

## Proposição

As funções:

$$\begin{aligned} L_0 : \text{Obj}(\mathbf{Set}) &\rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}) \\ X &\mapsto (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^X), \Phi_X) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} L_1 : \text{Mor}(\mathbf{Set}) &\rightarrow \text{Mor}(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}) \\ (X \xrightarrow{f} Y) &\mapsto (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^X), \Phi_X) \xrightarrow{\tilde{f}} (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^Y), \Phi_Y) \end{aligned}$$



## $U$ é Adjunto à Direita

onde  $\tilde{f} : L_0(X) \rightarrow L_0(Y)$  é o único  $\mathcal{C}^\infty$ -homomorfismo dado pela propriedade universal do anel  $\mathcal{C}^\infty$  livre  $j_X : X \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^X)$ : dada a função  $j_Y \circ f : X \rightarrow U(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^Y))$ , existe um único  $\mathcal{C}^\infty$ -homomorfismo  $\tilde{f}$  tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_X} & U(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^X)) \\ & \searrow^{j_Y \circ f} & \downarrow U(\tilde{f}) \\ & & U(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^Y)) \end{array}$$

definim um funtor  $L : \mathbf{Set} \rightarrow \mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}$  que é adjunto à esquerda de  $U : \mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Set}$ .



# Descrição Concreta do Coproduto

Dados dois anéis  $\mathcal{C}^\infty$  livres em  $m$  e  $n$  geradores, como  $m = \{0, \dots, m-1\}$  e  $n = \{0, \dots, n-1\}$  e  $L : \mathbf{Set} \rightarrow \mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng}$  preserva coprodutos (por ser adjunto à esquerda), temos:



## Descrição Concreta do Coproduto

Dados dois anéis  $\mathcal{C}^\infty$  livres em  $m$  e  $n$  geradores, como  $m = \{0, \dots, m-1\}$  e  $n = \{0, \dots, n-1\}$  e  $L: \mathbf{Set} \rightarrow \mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng}$  preserva coprodutos (por ser adjunto à esquerda), temos:

$$L(m \sqcup n) \cong L(m+n) \cong \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$$



## Descrição Concreta do Coproduto

Dados dois anéis  $\mathcal{C}^\infty$  livres em  $m$  e  $n$  geradores, como  $m = \{0, \dots, m-1\}$  e  $n = \{0, \dots, n-1\}$  e  $L : \mathbf{Set} \rightarrow \mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}$  preserva coprodutos (por ser adjunto à esquerda), temos:

$$L(m \sqcup n) \cong L(m+n) \cong \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \cong L(m) \otimes_\infty L(n)$$



## Descrição Concreta do Coproduto

Dados dois anéis  $\mathcal{C}^\infty$  livres em  $m$  e  $n$  geradores, como  $m = \{0, \dots, m-1\}$  e  $n = \{0, \dots, n-1\}$  e  $L : \mathbf{Set} \rightarrow \mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng}$  preserva coprodutos (por ser adjunto à esquerda), temos:

$$L(m \sqcup n) \cong L(m+n) \cong \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \cong L(m) \otimes_\infty L(n)$$

e portanto:

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \otimes_\infty \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \cong \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{m+n}),$$

munido da estrutura  $\mathcal{C}^\infty$  canônica do anel livre em  $m+n$  geradores.



# Descrição Concreta do Coproduto

Dados ideais  $I \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$  e  $J \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , temos:



## Descrição Concreta do Coproduto

Dados ideais  $I \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^m)$  e  $J \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , temos:

$$\frac{C^\infty(\mathbb{R}^m)}{I} \otimes_\infty \frac{C^\infty(\mathbb{R}^n)}{J} \cong \frac{C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)}{(I, J)}$$

onde:

$$(I, J) = \langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \mid (f \in I) \& (g \in J) \rangle$$

, com  $\pi_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\pi_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  são as projeções, munido da estrutura  $C^\infty$  induzida no quociente de  $C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$  por  $(I, J)$ .



# Descrição Concreta do Coproduto

Dados dois anéis  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $(A, \Phi)$  e  $(B, \Psi)$  quaisquer, escrevemos:



# Descrição Concreta do Coproduto

Dados dois anéis  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $(A, \Phi)$  e  $(B, \Psi)$  quaisquer, escrevemos:

$$(A, \Phi) = \varinjlim_{i \in I} (A_i, \Phi_i)$$

e

$$(B, \Psi) = \varinjlim_{j \in J} (B_j, \Psi_j)$$



# Descrição Concreta do Coproduto

Como colimites comutam com coprodutos, tem-se:



# Descrição Concreta do Coproduto

Como colimites comutam com coprodutos, tem-se:

$$A \otimes_{\infty} B \cong \varinjlim_{i \in I, j \in J} A_i \otimes_{\infty} B_j$$

munido da estrutura  $\mathcal{C}^{\infty}$  do colimite.



# Descrição Concreta do Coproduto

Dados  $n$  anéis  $\mathcal{C}^\infty$ , temos o coproduto definido, indutivamente, por:

$$\bigotimes_{i=1}^n A_i := A_1 \otimes_{\infty} \left( \bigotimes_{i=2}^{n-1} A_i \right)$$



# Descrição Concreta do Coproduto

Seja  $\{(A_i, \Phi_i) \mid i \in I\}$  qualquer conjunto de anéis  $\mathcal{C}^\infty$ . Temos:



# Descrição Concreta do Coproduto

Seja  $\{(A_i, \Phi_i) \mid i \in I\}$  qualquer conjunto de anéis  $\mathcal{C}^\infty$ . Temos:

$$\bigotimes_{i \in I}^{\infty} A_i = \varinjlim_{I' \subset_f I} \bigotimes_{i \in I'}^{\infty} A_i$$



# Referências

- Ada** Adámek, J. Rosický, J. e Vitale, M., *Algebraic Theories*, Cambridge University Press, New York, 2011.
- Bar** Barnes, D.W. e Mack, J.M., *An Algebraic Introduction to Mathematical Logic*, Springer Verlag Berlin Heidelberg 2004, 4th edition.
- BM** Berni, J.C., Mariano, H.L., *A Universal Algebraic Survey of  $C^\infty$ -Rings*, disponível em [arXiv:1904.02728v1](https://arxiv.org/abs/1904.02728v1)
- Bor** Borceux, F., *Handbook of Categorical Algebra, volume 2 - Categories and Structures*, Cambridge University Press, 1994.
- MR** I. Moerdijk, G. Reyes, *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1991.

