

GIORGIO E. O. GIACAGLIA

Procedimento de cálculo
(PMCI)



SISTEMAS DINÂMICOS NÃO INTEGRÁVEIS

Tese apresentada à Douta
Congregação da Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo, para
Concurso de provimento efetivo da
Cadeira nº 4 - " Mecânica Geral ".

SÃO PAULO - 1967

ET-311

Biblioteca da Escola Politécnica
São Paulo

F-5158

FT-311

DEDALUS - Acervo - EPBC



31200030842

531.3

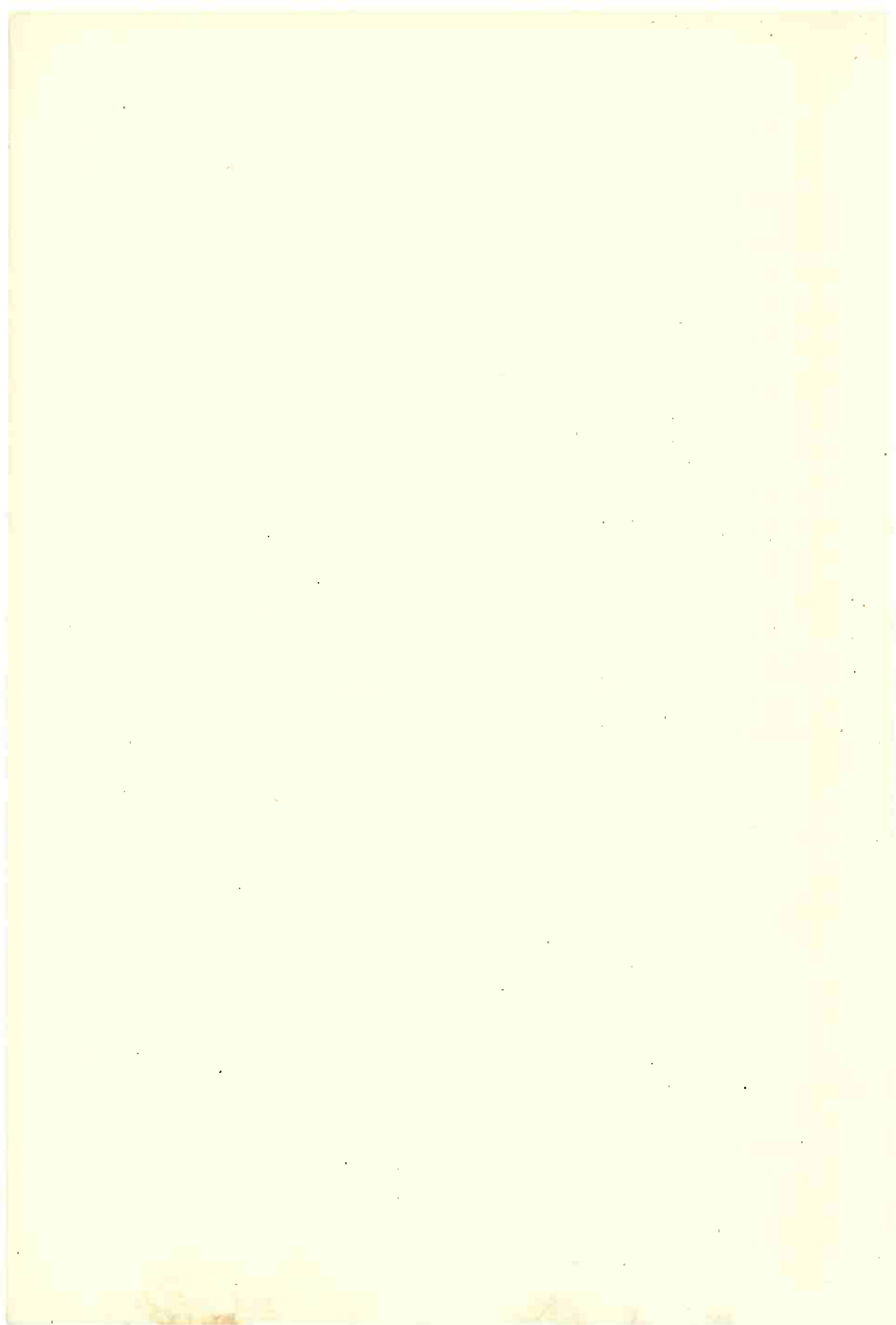
Q346.1

FT. e. 3



ÍNDICE

Introdução.....	1
Capítulo I - SISTEMAS DINÂMICOS	
1. Conceitos e hipóteses gerais. Integrais primeiras...	15
2. Transformações.....	27
3. Propriedades de transformações nas vizinhanças de um ponto fixo.....	34
4. Regiões de movimento. Estabilidade.....	55
Capítulo II - PERTURBAÇÕES DE SISTEMAS INTEGRÁVEIS	
1. Movimento de um sistema integrável.....	63
2. Perturbação de um sistema integrável não degenerado.	64
3. Teorema fundamental. Caso não degenerado.....	69
4. Perturbação de um sistema integrável degenerado.....	85
5. O problema de movimento nas vizinhanças de uma solução de equilíbrio.....	90
6. Construção de integrais primeiras.....	94
Capítulo III - CURVAS E SUPERFÍCIES INVARIANTES	
1. Situação do problema.....	102
2. Sistemas com dois graus de liberdade.....	104
3. Sistemas com n graus de liberdade.....	107
4. Sistemas degenerados.....	130
Capítulo IV - QUESTÕES DE MECÂNICA CLÁSSICA	
1. Movimento de um sólido com um ponto fixo.....	133
2. Sólido pesado com simetria dinâmica de revolução....	138
3. Movimento de Euler-Poinsot.....	147
4. Oscilações autônomas quasi-lineares.....	151
5. Soluções periódicas da equação de van der Pol.....	157
6. Pontos fixos no problema restrito dos três corpos...	159
7. Movimento quasi-periódico de um satélite artificial.	162
8. Perturbações periódicas lineares. Sistemas não autônomos.....	163
9. Observações finais.....	167
Bibliografia.....	169



INTRODUÇÃO

Foi nos fins do século XIX que os aspectos formais e qualitativos da Dinâmica começaram a adquirir corpo como métodos de longo alcance e os únicos capazes de resolverem questões fundamentais. Para esta evolução contribuíram, sem dúvida, dois problemas clássicos da Mecânica Celeste: a evolução e a estabilidade do Sistema Solar. A descrição geométrica e cinemática das órbitas planetárias, imersas num campo conservativo, foi antes daquela época um foco importante de aplicação do Cálculo e, ao mesmo tempo, um estímulo ao desenvolvimento da Análise Matemática. É com Poincaré e Bruns que tais desenvolvimentos atingiram sua maturidade. Muitas das questões inerentes ficaram resolvidas e outras ficou provado serem absurdas ou sua formulação isenta de qualquer sentido. Nesta última classe é digno de nota observar que, por longos anos, os matemáticos visaram obter soluções explícitas, e em termos finitos, das equações de movimento. Ficou reconhecido que a procura, ou antes, a existência de tais soluções estava intimamente relacionada com a construção de integrais primeiras. Muita energia foi, então, gasta na procura dessas integrais, em problemas específicos, sendo os mais famosos aqueles dos três corpos e do movimento de um corpo rígido. Os trabalhos de Lagrange, Poincaré, Jacobi e Kowalevskaya são exemplos vívidos dos interesses mais agudos do século XIX. Finalmente Bruns mostrou a não-existência de integrais algébricas, para o problema gravitacional dos n corpos, além dos dez comuns a todo sistema isolado de corpos materiais sujeitos apenas a forças conservativas. Poincaré, tratando de sistemas Hamiltonianos, apresentou argumentos, em parte discutíveis, os quais mostravam que, em geral, tais sistemas não possuiriam outras integrais uniformes além da Hamiltoniana. Na mesma direção, dignos de nota, são alguns resultados de Siegel, já na primeira metade do século XX.

É claro, entretanto, que a não existência de integrais uniformes teria, em geral, pouco significado para a existência de soluções

correspondentes a condições iniciais particulares. Poderiam existir integrais para certos valores fixos de parâmetros que caracterizam a estrutura física do sistema, integrais que sômente se verificam para certos valores das condições iniciais ou integrais que não sejam funções uniformes das variáveis que se estão usando. A discussão crítica dêstes problemas muito contribuíram os trabalhos de Wintner.

Ainda com Poincaré, duas questões começaram a tomar conta das pesquisas sôbre sistemas conservativos: a descrição de soluções para longos intervalos de tempo (comportamento assintótico) e a estabilidade de soluções de equilíbrio e periódicas. O problema do comportamento assintótico apresenta sérias dificuldades quando lembrarmos o fato, já comprovado, de que um movimento conservativo é, em geral, ergódico. O problema numérico de prever órbitas por longos intervalos de tempo pode e foi resolvido no caso de movimento de corpos celestes, principalmente os planetas, cujos períodos são da ordem de anos. Soluções analíticas ou semi-analíticas (coeficientes numéricos) válidas por algumas centenas de anos foram obtidas por um ou outro método de aproximação sucessiva (perturbações). Casos cruciais, entretanto, existem, alguns deles em via de solução (movimento da Lua, satélites artificiais), outros ainda sem solução (satélites exteriores de Júpiter, asteróides excepcionais). Além dêsses problemas típicos de Mecânica Celeste, existem outros bem mais críticos. É o caso, por exemplo, do problema do movimento de partículas em aceleradores. Estas podem realizar mais de 300.000 ciclos por segundo e devem ser mantidas numa câmara relativamente restrita. A solução de um problema dêste gênero, por vias de aproximação sucessiva, pode ser formidável: teoricamente corresponderia a se fornecer uma solução para a órbita de Júpiter válida, pelo menos, durante três milhões de anos. Nenhuma teoria clássica de perturbação seria capaz de resolver tal problema. Nestes casos o papel da estabilidade tornou-se essencial. Ficou, assim, provado que uma questão básica não seria saber onde um ponto ou sistema material iria se encontrar após um certo tempo, mas sim, saber dentro de que limites poderia ele se encontrar após um tempo arbitrariamente longo.

Foi assim que Poincaré iniciou a segunda fase da evolução para os métodos qualitativos. A ele devemos os germes dos mais importantes problemas de existência e estabilidade de soluções. Birkhoff e Lyapunov completaram a obra iniciada pelo grande mestre até um ponto que realmente parecia, a parte os detalhes, esgotar as possibilidades da análise. Mas a evolução, felizmente, não havia terminado.

Ainda o grande gênio de Poincaré, na década anterior ao seu desaparecimento, produziu a primeira centelha de uma nova era. A obra fantástica contida no seu famoso "Último Teorema Geométrico" introduziu a Topologia e a associou de maneira definitiva às questões até então de aparente insolubilidade à luz da análise clássica. George D. Birkhoff, em sucessivos e longos trabalhos, tratou dessas questões de maneira precisa, dando-lhe um impulso sem precedentes. Sua obra culminou com seu famoso trabalho "Dynamical Systems" apresentado a um Colloquium da American Mathematical Society, em 1927. O processo de evolução, salvo casos esparsos, entrou depois disto em estagnação ou, melhor dizer, deu-se uma separação nítida entre as Matemáticas Puras e as Matemáticas Aplicadas. As primeiras desenvolveram linguagem própria e enveredaram pelos caminhos da abstração e da generalização, pouco se importando com a eventual aplicabilidade a problemas sugeridos pelo mundo físico. As segundas evoluíram para métodos que pudessem fornecer uma resposta numérica aos problemas que o mundo físico apresentava. Numa linguagem muitas vezes pouco precisa e quase sempre ilegante atingiram uma fase de evolução que estava fadada a produzir poucos resultados. Além disso, desde que os problemas eram aqui, em última análise, de se obter resultados numéricos para um problema específico, métodos puramente numéricos foram desenvolvidos e degeneraram em uso e abuso de ábacos, máquinas calculadoras e, finalmente, computadores eletrônicos. Infelizmente, porém, tantos e novos problemas surgiram no mundo físico, e tão complexos, que hoje, podemos afirmar, nem mesmo os mais rápidos computadores podem realizar sua solução. Para dar um exemplo disto, citemos um problema específico. Cohen e Hubbard (1965) integraram as equações de movimento dos cinco planetas exterior-

res, durante um período de 120.000 anos, usando um intervalo de integração de 40 dias. O tempo gasto num moderno computador foi de, aproximadamente, oitenta horas. Suponhamos que se queiram integrar as equações de movimento de todos os planetas, incluindo a Lua. O máximo intervalo permitido neste caso é da ordem de um dia e o número de operações é, aproximadamente, o quadrado daquelas necessárias no caso de Cohen e Hubbard. Então, para o mesmo intervalo de 120.000 anos, o tempo gasto no mesmo computador seria cerca de 1200 anos! Mas a questão fundamental é "o que se quer saber a respeito do movimento dos planetas". Resulta que a resposta não é "a posição exata após um tempo arbitrário", mas sim, "as características de evolução das órbitas e a estabilidade do sistema total". Verifica-se, imediatamente, que o método numérico está realmente superdimensionando a resposta. Aqui, os reis dos números e dos computadores encerraram seu capítulo de evolução. Novamente tornou-se evidente que talvez métodos analíticos pudessem melhor resolver a questão. Mas aqueles clássicos haviam sido explorados por homens como Poincaré, Euler, Gauss, Laplace e Lagrange. Os métodos puramente matemáticos haviam evoluído para uma linguagem e um campo tão gerais que os físicos eram e são, ainda, incapazes de compreender. Somente alguns, e em épocas recentes, tiveram coragem suficiente para tentar reatar o elo, perdido há quase meio século, entre a física e a matemática. Essa é uma nova evolução, e ela começou ao redor de 1950. Mas, na realidade, não é uma evolução: é uma recapitulação dos resultados obtidos pela abstração matemática e o estudo de sua aplicabilidade a problemas da Física. Na vanguarda desta geração de matemáticos que se preocupou com problemas reais colocam-se Kolmogorov e numerosos discípulos, entre os quais Arnold, principalmente. Numa linha de certa forma independente estão os trabalhos de Siegel, Wintner e Moser.

Neste ponto torna-se necessária uma exemplificação para que possamos avaliar a situação das teorias clássicas até aquela data. Usaremos nesta introdução vários conceitos que, quando necessários, serão melhor precisados mais tarde.

Os métodos chamados de perturbação, ou de aproximações sucessivas, nasceram de uma certa forma com Euler e Lagrange. Sua evolução dentro da análise clássica foi insignificante e apenas tratou de detalhes da questão global. Aquêles métodos visam produzir soluções formais das equações de movimento, na forma de séries truncadas e válidas, numericamente, durante um certo intervalo de tempo. Não resolvem, portanto, nem o problema da estabilidade nem aquêle do comportamento assintótico. Tais métodos tornaram-se famosos em problemas de oscilações não lineares, com aplicações imediatas à Mecânica Celeste, às Vibrações Mecânicas e às Oscilações Elétricas. Em cada um destes campos métodos foram desenvolvidos visando a melhor solução para o caso específico. Na realidade eles pouco diferem. A título de exposição tomaremos o exemplo da Mecânica Celeste. As séries "soluções" aqui obtidas baseiam-se no fato de que a Hamiltoniana é, em geral, uma função periódica das coordenadas, desenvolvível em série de Fourier na forma genérica:

$$H = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n}^{+\infty} A_{j_1, j_2, \dots, j_n} (x_1, x_2, \dots, x_n) \exp i(j_1 y_1 + j_2 y_2 + \dots + j_n y_n)$$

a qual escreveremos

$$H = \sum_{\vec{j}} A_{\vec{j}}(\vec{x}) e^{i\vec{j} \cdot \vec{y}} \quad (1)$$

a soma se estendendo a todos os vetores $\vec{j}$ de componentes inteiras. As equações de movimento serão:

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= - \frac{\partial H}{\partial y_j} \\ \dot{y}_j &= + \frac{\partial H}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

que escreveremos:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= - \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{y}} \right)^T \\ \dot{\vec{y}} &= + \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right)^T \end{aligned} \quad (2)$$

o superscrito T indicando a transposta (no caso, de uma matriz linha).

É evidente, inicialmente, que se o único coeficiente não nulo corresponder a $\vec{j} = \vec{0}$, o sistema é integrável: os momentos $\vec{x}$ são constantes e as coordenadas $\vec{y}$ são funções lineares do tempo:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{x}_0 \\ \vec{y} &= \vec{\omega}(\vec{x}_0) t + \vec{y}_0\end{aligned}\quad (3)$$

onde

$$\vec{\omega}^T(\vec{x}_0) = \left. \frac{\partial A_0}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x} = \vec{x}_0} \quad (4)$$

admitidos diferenciáveis os coeficientes da série (1).

Se na região onde $H(\vec{x}, \vec{y})$ é definida, os $A_{\vec{j}}(\vec{x})$, $\vec{j} \neq \vec{0}$, forem diferenciáveis e suas derivadas suficientemente pequenas em relação às derivadas, supostas existentes, de $A_0(\vec{x})$, então a parte puramente periódica de H é uma perturbação da parte independente dos $\vec{y}$. As teorias clássicas de perturbação admitem que se isto for verdadeiro, então a solução do problema total pouco se afasta, no decorrer do tempo, da solução do problema cuja Hamiltoniana é $A_0(\vec{x})$. Tal suposição, evidentemente, é tão pouco fundamentada que, desde Poincaré, põs em sérias dúvidas a validade das soluções que dela resultam. Um dos argumentos mais simples que salta à vista é o dos chamados "pequenos denominadores". Com efeito, partindo da solução (3), as teorias de perturbação desenvolvem séries soluções que formalmente satisfazem as equações diferenciais (2) e são da forma

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{x}_0 + \sum_{\vec{j}} \frac{\vec{C}_{\vec{j}}(\vec{x}_0)}{\vec{j} \cdot \vec{\omega}(\vec{x}_0)} \exp | i(\vec{v} \cdot \vec{j})t | \\ \vec{y} &= \vec{v}(\vec{x}_0)t + \vec{y}_0 + \sum_{\vec{j}} \frac{\vec{D}_{\vec{j}}(\vec{x}_0)}{\vec{j} \cdot \vec{\omega}(\vec{x}_0)} \exp | i(\vec{j} \cdot \vec{v})t |\end{aligned}\quad (5)$$

Então, é evidente que os produtos $(\vec{j} \cdot \vec{\omega})$ presentes nos denominadores das relações (5) podem se tornar extremamente pequenos, mesmo porque as componentes de $\vec{j}$ varrem o campo total dos inteiros. Mesmo que os $\vec{C}_{\vec{j}}$ e $\vec{D}_{\vec{j}}$ sejam pequenos em relação a $\vec{C}_0$ e $\vec{D}_0$, o fato aci

ma indicado, invalidará, em geral, o processo de cálculo daquêles coeficientes por aproximações sucessivas. Na realidade, a possibilidade geral de se poderem obter soluções formais do tipo (5), sugerida por Lindstedt e provada por Poincaré, chegou ao ponto de serem produzidas provas de estabilidade do sistema solar. Mas, o próprio Poincaré provou que tais séries eram, em geral, divergentes. Apesar disto, e em vários campos, teorias de solução por processos análogos foram desenvolvidas e são até hoje comumente usadas (Tais métodos são, em geral, chamados "métodos da média", tais como os de Von Zeipel, Duffing, Burnstein e Solovév, Butenin, Cherry, Whittaker, Krylov e Bogoliubov e vários outros). Somente bem mais tarde Hincin (teoria da aproximação diofantina) mostrou que, por exemplo, no caso de sistemas a dois graus de liberdade, para a maioria dos pares ω_1, ω_2 as quantidades $|j_1 \omega_1 + j_2 \omega_2|$ não se anulam e, aliás, são maiores que $K(|j_1| + |j_2|)^{-2}$ para algum $K > 0$ e todos os inteiros j_1 e j_2 não simultaneamente nulos. Disto é possível conjecturar que para a maioria das condições iniciais (que definem $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$) as séries obtidas são convergentes. Vários resultados clássicos de Poincaré, Siegel, e outros, por serem muitas vezes contraditórios, deixaram, entretanto, a questão em suspenso.

Para efeito de comparações posteriores é desejável apresentar em certos detalhes o processo idealizado por Poincaré para se obter soluções formais do tipo (3). Os germes de tal método residem na teoria de Hamilton-Jacobi e na teoria da Lua de Delaunay. Admitamos que a Hamiltoniana $H(\vec{x}, \vec{y}; \epsilon)$ dependa do "pequeno" parâmetro ϵ e seja desenvolvível em série de potências convergente neste parâmetro, isto é,

$$H(\vec{x}, \vec{y}; \epsilon) = H_0(\vec{x}, \vec{y}) + \epsilon H_1(\vec{x}, \vec{y}) + \epsilon^2 H_2(\vec{x}, \vec{y}) + \dots \quad (6)$$

Seja n o número de graus de liberdade do sistema. Por simplicidade de raciocínio admitiremos, ainda, que

- 1) H_0 seja apenas função de $\vec{x}$
- 2) H_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) são analíticas numa certa região Ω do

espaço de fase $(\vec{x}, \vec{y})$

3) H_j ($j = 1, 2, \dots$) são periódicas de período 2π nas variáveis $\vec{y}$.

Em vista da hipótese (2) os H_j serão, então, desenvolvíveis, em Ω , em séries convergentes de Fourier e, em geral

$$H_j = \sum_{\vec{m}} A_{\vec{m}}^j(\vec{x}) \exp i(\vec{m} \cdot \vec{y}) \quad (7)$$

onde $\vec{m}$ é um vetor cujas coordenadas varrem o conjunto dos inteiros, positivos ou negativos. Sendo H uma função real resulta, ainda, que $H_j = \bar{H}_j$ (barra indica o complexo conjugado), isto é,

$$A_{\vec{m}}^j(\vec{x}) = A_{-\vec{m}}^j(\vec{x})$$

4) $|\epsilon| \ll 1$, sendo ϵ um parâmetro adimensional.

5) $\frac{\partial H_0}{\partial x_j} \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$

6) Existe pelo menos um vetor $\vec{x}_0$, tal que a equação

$$\vec{m} \cdot \frac{\partial H_0}{\partial \vec{x}} \bigg|_{\vec{x}=\vec{x}_0}^T = m_1 \frac{\partial H_0}{\partial x_1} + m_2 \frac{\partial H_0}{\partial x_2} + \dots + m_n \frac{\partial H_0}{\partial x_n} \bigg|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = 0$$

somente pode ser satisfeita quando todos os inteiros m_k ($k = 1, 2, \dots, n$) forem nulos.

Sob estas condições procura-se uma transformação completamente canônica em Ω

$$(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow (\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

tal que a nova Hamiltoniana $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ seja função apenas dos novos momentos $\vec{\xi}$. Em particular, admite-se que

1') A transformação é gerada por uma função $S(\vec{\xi}, \vec{y}; \epsilon)$, definida em uma região Ω^* , tal que

$$\vec{x} = \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{y}} \right)^T = \vec{x}(\vec{\xi}, \vec{y}; \epsilon)$$

$$\vec{\eta} = \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{\xi}} \right)^T = \vec{\eta}(\vec{\xi}, \vec{y}; \epsilon)$$

2') A função geradora S é desenvolvível em série de potências convergente no parâmetro ϵ :

$$S = S_0(\vec{\xi}, \vec{y}) + \epsilon S_1(\vec{\xi}, \vec{y}) + \epsilon^2 S_2(\vec{\xi}, \vec{y}) + \dots$$

3') As funções S_j ($j = 1, 2, \dots$) satisfazem às hipóteses (2), (3), (4), anteriormente citadas.

4') $S_0(\vec{\xi}, \vec{y})$ corresponde à transformação idêntica, isto é,

$$S_0 = \vec{\xi} \cdot \vec{y}$$

Na realidade pode-se mostrar que algumas das hipóteses anteriores decorrem das hipóteses admitidas para a função H , mas a prova não é geral. Além do mais, note-se que em vista da transformação ser suposta completamente canônica, deverá resultar que

$$H(\vec{x}, \vec{y}; \epsilon) = H\{\vec{x}(\vec{\xi}, \vec{y}; \epsilon), \vec{y}; \epsilon\} = K(\vec{\xi}; \epsilon)$$

Consideremos o segundo termo e ponhamos, em vista das hipóteses anteriores:

$$\begin{aligned} H\{\vec{x}(\vec{\xi}, \vec{y}; \epsilon), \vec{y}; \epsilon\} &= H_0\{\vec{x}(\vec{\xi}, \vec{y}; \epsilon)\} + \sum_{p=1}^{\infty} \epsilon^p H_p\{\vec{x}(\vec{\xi}, \vec{y}; \epsilon), \vec{y}\} = \\ &= H_0\left[\frac{\partial S(\vec{\xi}, \vec{y}; \epsilon)}{\partial \vec{y}}\right] + \sum_{p=1}^{\infty} \epsilon^p H_p\left[\frac{\partial S(\vec{\xi}, \vec{y}; \epsilon)}{\partial \vec{y}}, \vec{y}\right] = \\ &= H_0\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{y}}\right) + \sum_{p=1}^{\infty} \epsilon^p \sum_{\vec{m}} A_{\vec{m}}^p\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{y}}\right) \exp(i \vec{m} \cdot \vec{y}) = \\ &= H_0\left(\vec{\xi} + \sum_{q=1}^{\infty} \epsilon^q \frac{\partial S_q}{\partial \vec{y}^T}\right) + \sum_{p=1}^{\infty} \epsilon^p \sum_{\vec{m}} A_{\vec{m}}^p\left(\vec{\xi} + \sum_{q=1}^{\infty} \epsilon^q \frac{\partial S_q}{\partial \vec{y}^T}\right) \exp(i \vec{m} \cdot \vec{y}) \end{aligned}$$

As funções H_0 e $A_{\vec{m}}^p$ podem, por hipótese, ser desenvolvidas em séries de Taylor convergentes nas vizinhanças de $\vec{\xi}$.

Então, a expressão anterior torna-se

$$\begin{aligned} H\{\vec{x}(\vec{\xi}, \vec{y}; \epsilon), \vec{y}; \epsilon\} &= H_0(\vec{\xi}) + \epsilon \left\{ \frac{\partial H_0}{\partial \vec{x}} \bigg|_{\vec{x} = \vec{\xi}} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \vec{y}}\right)^T + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\vec{m}} A_{\vec{m}}^1(\vec{\xi}) \exp(i \vec{m} \cdot \vec{y}) \right\} + O(\epsilon^2) = K(\vec{\xi}; \epsilon) \end{aligned}$$

Ainda em vista das hipóteses feitas, $K(\vec{\xi}; \epsilon)$ é analítica nos argumentos e, portanto, desenvolvível na forma:

$$K(\vec{\xi}; \epsilon) = K_0(\vec{\xi}) + \epsilon K_1(\vec{\xi}) + \epsilon^2 K_2(\vec{\xi}) + \dots$$

Pela unicidade da série de Taylor resulta, então

$$K_0(\vec{\xi}) = H_0(\vec{\xi})$$

$$K_1(\vec{\xi}) = \left. \frac{\partial H_0}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x} = \vec{\xi}} \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{y}} \right)^T + \sum_{\vec{m}} A_{\vec{m}}^1(\vec{\xi}) \exp(i \vec{m} \cdot \vec{y})$$

A primeira equação fornece $K_0(\vec{\xi})$. Para satisfazer a segunda, definamos

$$K_1(\vec{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \sum_{\vec{m}} A_{\vec{m}}^1(\vec{\xi}) \exp(i \vec{m} \cdot \vec{y}) dy_1 dy_2 \dots dy_n = A_0^1(\vec{\xi})$$

Resultará para S_1 a equação a derivadas parciais

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial H_0}{\partial x_i} \left|_{\vec{x} = \vec{\xi}} \frac{\partial S_1}{\partial y_i} = - \sum_{\vec{m} \neq 0} A_{\vec{m}}^1(\vec{\xi}) \exp(i \vec{m} \cdot \vec{y})$$

cuja solução geral é

$$S_1 = \sum_{\vec{m} \neq 0} \frac{i A_{\vec{m}}^1(\vec{\xi})}{\vec{m} \cdot \vec{\omega}(\vec{\xi})} \exp(i \vec{m} \cdot \vec{y}) + \psi_1(\vec{\xi})$$

sendo $\psi_1(\vec{\xi})$ uma função arbitrária. Em vista da hipótese (7) nenhum denominador se anula para, pelo menos, um certo valor $\vec{\xi} = \vec{x}_0$. Pode-se mostrar que tal procedimento pode ser levado até uma ordem de aproximação qualquer e, pelo menos, para um vetor $\vec{\xi} = \vec{x}_0$ as séries

$$S = S_0 + \epsilon S_1 + \epsilon^2 S_2 + \dots$$

e

$$K = K_0 + \epsilon K_1 + \epsilon^2 K_2 + \dots$$

são convergentes para ϵ suficientemente pequeno (Giacaglia, 1965). Em particular, é possível tomar as funções $\psi_1(\vec{\xi})$, $\psi_2(\vec{\xi})$, ... todas nulas. Resulta, assim, que a Hamiltoniana $K(\vec{\xi}; \epsilon)$ fornece:

$$\vec{\xi} = \text{const.} = \vec{x}_0$$

$$\dot{\vec{\eta}} = \left. \frac{\partial K}{\partial \vec{\xi}} \right|_{\vec{\xi} = \vec{x}_0}^T = \vec{\omega}(\vec{x}_0) + \epsilon \vec{\omega}_1(\vec{x}_0) + \epsilon^2 \vec{\omega}_2(\vec{x}_0) + \dots = \vec{v}(\vec{x}_0)$$

$$\vec{\eta} = \vec{v}(\vec{x}_0)t + \vec{\eta}_0$$

Por outro lado, em vista da hipótese (1'):

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_0, \vec{y}; \epsilon)$$

$$\vec{\eta} = \vec{v}(\vec{x}_0)t + \vec{\eta}_0 = \vec{\eta}(\vec{x}_0, \vec{y}; \epsilon)$$

e como S é analítica e a transformação é inversível, obtemos

$$\vec{x} = \vec{x}^* (\vec{x}_0, \vec{\eta}; \epsilon)$$

$$\vec{y} = \vec{y}^* (\vec{x}_0, \vec{\eta}; \epsilon)$$

que, em vista da forma de S , podem evidentemente ser escritas na forma (5). Em vista, ainda, dos resultados da aproximação diofantina pode-se, então, conjecturar que as séries acima obtidas são convergentes para a maioria dos vetores $\vec{x}_0$ definidos em Ω . Entretanto, resta precisar o real significado dessa expressão. Em outros termos, é necessário provar que a medida do conjunto dos $\vec{x}_0$ admissíveis é não nula. É esta prova o obstáculo principal do estudo da convergência do processo exposto, em termos de análise clássica. Pode-se, ainda, mostrar que, se tal processo convergir, $\vec{x}_0$ corresponde a n integrais uniformes das equações de movimento que estão em involução com a Hamiltoniana.

Com efeito, ainda levando em conta (1')

$$\vec{x} = \vec{x} (\vec{x}_0, \vec{y}; \epsilon) = \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{y}} \right)^T$$

Como admitimos

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial \vec{y} \partial \vec{\xi}} \right|_{\vec{\xi} = \vec{x}_0} \neq 0$$

então numa vizinhança de $\vec{x}_0$, é possível escrever

$$\vec{x}_0 = \vec{x} (\vec{x}, \vec{y}; \epsilon)$$

que são as n integrais mencionadas.

Mostraremos mais adiante como se pode obter uma série formal

$$\vec{x}_0 = \vec{\xi}_0 + \epsilon \vec{\xi}_1 + \epsilon^2 \vec{\xi}_2 + \dots$$

com $\vec{\xi}_1 = \vec{\xi}_1(\vec{x}, \vec{y})$, que satisfaz à condição de ser integral primeira, isto é, está em involução com H . Por outros meios verifica-se que, salvo excepcionalmente, tal série não pode convergir uniformemente em ϵ e pelo contrário, é divergente

De uma certa forma, é sobre a convergência e as propriedades de tais séries e de problemas relacionados com suas propriedades, que

nos ocuparemos.

Este trabalho será dividido em quatro capítulos. No primeiro será apresentada uma discussão geral sobre os aspectos formais referentes ao comportamento de sistemas dinâmicos, isto é, aqueles gerados por uma Hamiltoniana. Certas questões serão extendidas a sistemas com um número qualquer finito de graus de liberdade, mas salvo algumas exceções, o desenvolvimento será mantido no nível clássico, pelo menos no que se refere às suas implicações. Esta primeira parte será, também, necessária para a apresentação do problema geral e introdução de uma terminologia e nomenclatura específicas. Falaremos, assim, de transformações isovolumétricas, de superfícies invariantes sobre as quais escoam as trajetórias de sistemas integráveis e das perturbações, num sentido a ser definido, de tais transformações e superfícies.

No segundo capítulo mostraremos como o problema de perturbação possa ser transformado no problema de construção de séries convergentes de transformações canônicas. Após citar os resultados clássicos de Kolmogorov e Arnold, demonstraremos dois teoremas fundamentais os quais mostram, de maneira direta, que, com algumas modificações essenciais, as séries formais imaginadas por Poincaré podem convergir, desde que sejam satisfeitas certas condições. Mostraremos que essa convergência não pode ser uniforme sobre todo o espectro das frequências do sistema integrável associado. Trataremos, ainda, da construção de integrais primeiras por processos formais, mas eventualmente convergentes.

O terceiro capítulo será devotado quase que exclusivamente a um teorema fundamental sobre a existência de superfícies fechadas invariantes (de pontos fixos) para transformações isovolumétricas e suficientemente diferenciáveis. Os resultados serão postos em relação direta com os teoremas fundamentais de Kolmogorov e Arnold, generalizando-os em vários aspectos. Nesta parte, admitiremos conhecidos os trabalhos clássicos de Poincaré, Danjoy, G. D. Birkhoff, Arnold e Moser, principalmente no que se refere à situação do problema em relação a questões de estabilidade, existência de pontos fixos, soluções periódicas

cas e trajetórias sobre toros n -dimensionais.

No quarto capítulo citaremos algumas aplicações à problemas fundamentais de análise e mecânica clássica, apontando a importância das técnicas desenvolvidas. Um aspecto favorável dos métodos formais e qualitativos aqui descritos é que eles permitem obter, como subprodutos imediatos, métodos quantitativos para a solução efetiva (numérica) de problemas que o mundo físico nos fornece.

Desejamos apresentar nossos agradecimentos aos Professores Abrahão de Moraes e João Augusto Breves Filho porque nos iniciaram ao estudo da Mecânica Racional e Analítica, ao Professor Dirk Brouwer (já falecido) e ao Professor Victor G. Szebehely que nos deram motivação e apoio no prosseguimento desses estudos vista à solução efetiva de problemas da Física e aos nossos auxiliares na Cadeira de Mecânica Geral desta Escola pela colaboração prestada.

Nossos agradecimentos, também, à Srta. Maria Lúcia Vaz Pinto Lima e ao Sr. Gilberto Schmidt pelos serviços de datilografia do trabalho, ao Instituto Astronômico e Geofísico da Universidade de São Paulo pela permissão de ser esta tese impressa no seu Setor Gráfico e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo que parcialmente financiou as despesas necessárias.

Finalmente, mas principalmente, desejamos expressar profunda gratidão a nossa esposa cuja dedicação tornou possível a realização de nossos estudos e pesquisas.



CAPÍTULO I

SISTEMAS DINÂMICOS



1. Conceitos e Hipóteses Gerais - Integrais primeiras

Um sistema dinâmico será caracterizado por uma função Hamiltoniana $H = H(\vec{x}, \vec{y})$ definida e analítica num domínio Ω do espaço de fase a $2n$ dimensões onde as ênuplas $\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$,
 $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ são, respectivamente, o vetor das coordenadas generalizadas e o vetor dos momentos generalizados. A função H será, em geral, suposta independente da variável independente t , o tempo. Em problemas em que isto não seja verdade bastará introduzir uma nova coordenada generalizada, função linear de t , para se recair no caso antes considerado. Em to do ponto $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in \Omega$ passa uma e uma única solução $\vec{x}(\vec{x}_0, \vec{y}_0, t)$, $\vec{y}(\vec{x}_0, \vec{y}_0, t)$ das equações diferenciais de movimento.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{y}} \quad (1.1)$$

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}$$

que é tal que $\vec{x}(\vec{x}_0, \vec{y}_0, 0) = \vec{x}_0$, $\vec{y}(\vec{x}_0, \vec{y}_0, 0) = \vec{y}_0$. Além disso, aquela solução é uma função analítica dos argumentos e, portanto, desenvólável em série de Taylor nas vizinhanças, contidas em Ω , do ponto $(\vec{x}, \vec{y})$ e em qualquer vizinhança do instante inicial $t = 0$. Sômente trataremos de soluções sôbre o eixo real da variável independente t .

Considere-se uma transformação $\vec{x} = \vec{X}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, t)$
 $\vec{y} = \vec{Y}(\vec{\xi}, \vec{\eta}, t)$,

com $|J| = \left| \frac{\partial(\vec{X}, \vec{Y})}{\partial(\vec{\xi}, \vec{\eta})} \right| \neq 0$ e as funções $\vec{X}, \vec{Y} \in C^2$, num ponto $(\vec{\xi}_0, \vec{\eta}_0)$ e para todo t . A transformação é dita canônica se, e somente se, existir uma constante $\lambda \neq 0$ tal que

$$J^T E J = \lambda E$$

onde E é a matriz canônica

$$E = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ +I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

sendo 0_n e I_n as matrizes nula e identidade $n \times n$. No caso então, para toda função $H(\vec{x}, \vec{y})$ existirá uma função $K(\vec{\xi}, \vec{\eta}, t)$ tal que

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\xi}}^T &= - \frac{\partial K}{\partial \vec{\eta}} \\ \dot{\vec{\eta}}^T &= + \frac{\partial K}{\partial \vec{\xi}} \end{aligned}$$

Se $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in \Omega$, é fácil provar que sendo $\vec{x} = \vec{X}(\vec{x}_0, \vec{y}_0, t)$,
 $\vec{y} = \vec{Y}(\vec{x}_0, \vec{y}_0, t)$

a solução de (1.1) passando por $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ e tal que

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 &= \vec{X}(\vec{x}_0, \vec{y}_0, 0) \\ \vec{y}_0 &= \vec{Y}(\vec{x}_0, \vec{y}_0, 0) \end{aligned}$$

então a transformação dada por $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ é canônica, isto é,

$$J^T E J = E$$

onde

$$J = \frac{\partial(\vec{X}, \vec{Y})}{\partial(\vec{x}_0, \vec{y}_0)}$$

Em particular, se existir uma função $S = S(\vec{\xi}, \vec{\eta}, t)$ tal que $\left| \frac{\partial^2 S}{\partial \vec{\xi} \partial \vec{\eta}} \right| \neq 0$, então a transformação gerada por

$$\begin{aligned} \vec{x}^T &= \frac{\partial S}{\partial \vec{y}} \\ \vec{\eta}^T &= \frac{\partial S}{\partial \vec{\xi}} \end{aligned} \tag{1.2}$$

é canônica. A nova Hamiltoniana $K(\vec{\xi}, \vec{\eta}, t)$ é dada por

$$K(\vec{\xi}, \vec{\eta}, t) = H(\vec{X}, \vec{Y}) + \frac{\partial S}{\partial t}$$

A transformação é completamente canônica se a transformação depender

do tempo e $\lambda = 1$. No caso anterior, então

$$K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = H(\vec{x}, \vec{y})$$

Isto é suficiente para mostrar que a equação de Hamilton-Jacobi

$$H\left(\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{y}}\right)^T, \vec{y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

tem sempre solução. Aliás, sendo uma equação de primeira ordem, a existência local é garantida. É fato conhecido de que, se

$$S = S(\vec{y}, \vec{\xi}_0, t)$$

é uma solução dependente de n parâmetros arbitrários $\vec{\xi}_0$, então a transformação gerada por S

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{X}(\vec{\xi}_0, \vec{\eta}_0, t) \\ \vec{y} &= \vec{Y}(\vec{\xi}_0, \vec{\eta}_0, t) \end{aligned}$$

é solução de (1.1) e corresponde às condições iniciais $(\vec{\xi}_0, \vec{\eta}_0)$. Então, o movimento de um sistema dinâmico se dá por transformações canônicas contínuas do espaço de fase em si mesmo.

Um sistema Hamiltoniano possui uma integral primeira $G(\vec{x}, \vec{y})$ se, num certo domínio $D \subset \Omega$,

$$i) \quad \frac{\partial G}{\partial (\vec{x}, \vec{y})} \neq 0$$

$$ii) \quad G(\vec{x}, \vec{y}) \text{ é constante ao longo de toda solução } \subset D, \text{ isto é,}$$

$$\frac{d}{dt} G(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\frac{\partial G}{\partial \vec{x}}\right) \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{y}}\right)^T - \left(\frac{\partial G}{\partial \vec{y}}\right) \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}\right)^T = 0$$

Dizemos, também, que $G(\vec{x}, \vec{y})$ está em involução com $H(\vec{x}, \vec{y})$. É claro que se H é independente de y_j então $G = x_j$ é uma integral. A existência destas variáveis cíclicas reduz a ordem do sistema de equações diferenciais. Mais geralmente pode-se mostrar que se o sistema gerado por H tiver uma integral (local) G , então existe uma transformação canônica para variáveis $(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ tal que $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ é independente de η_j e $G = \xi_j$ é a integral. Generalizando, sejam $G_1, G_2, \dots, G_n$, n funções em involução com H e entre si, isto é,

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial G_i}{\partial y_k} \frac{\partial G_j}{\partial x_k} - \frac{\partial G_j}{\partial y_k} \frac{\partial G_i}{\partial x_k} \right) = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

e tal que a matriz $\left\{ \frac{\partial G_i}{\partial y_k}, \frac{\partial G_j}{\partial x_k} \right\}$ tenha característica n . Então, existe uma transformação canônica tal que

$$\begin{aligned}\xi_k &= G_k(\vec{x}, \vec{y}) \\ \eta_k &= F_k(\vec{x}, \vec{y})\end{aligned}\quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

com carácter local. Neste caso resultará

$$K = K(\vec{\xi})$$

e a solução do sistema é, pois,

$$\begin{aligned}\vec{\xi} &= \vec{\xi}_0 \\ \vec{\eta} &= \vec{\omega}(\vec{\xi}_0) t + \vec{\eta}_0\end{aligned}$$

São estes os sistemas que aqui chamaremos de integráveis. Na realidade todas as propriedades anteriores têm carácter local, mas uma integral primeira somente é útil quando sua validade se estender a todo o espaço de fase.

Existem vários resultados sobre a existência ou não de integrais primeiras para um sistema Hamiltoniano. Para sistemas a dois graus de liberdade, quando H é uma função analítica das variáveis e de um certo parâmetro, Poincaré (1893) mostrou que não existem integrais uniformes (em relação ao parâmetro) que não sejam funções da própria Hamiltoniana. Em sua prova, Poincaré considera H periódica de período 2π nas coordenadas. Para o problema dos n corpos, Bruns (1887) mostrou não existirem outras integrais algébricas além das conhecidas. Nas vizinhanças de uma solução de equilíbrio, Siegel (1941) mostrou não haver integrais analíticas.

No caso da Hamiltoniana possuir um ponto de equilíbrio façamos desde já algumas considerações. Seja tal ponto a origem do espaço de fase, isto é

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial H}{\partial x_k} \right|_{\substack{\vec{x}=\vec{0} \\ \vec{y}=\vec{0}}} &= 0 \\ \left. \frac{\partial H}{\partial y_k} \right|_{\substack{\vec{x}=\vec{0} \\ \vec{y}=\vec{0}}} &= 0\end{aligned}\quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

com $H(x, y)$ função analítica num certo domínio D que contém a origem. Desenvolvamos H em série de Taylor nas vizinhanças deste ponto e teremos, a menos de uma constante

$$H(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{x} \partial \vec{y}} \bigg|_0 \vec{y} + \frac{1}{2} \vec{x}^T \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{x} \partial \vec{x}} \bigg|_0 \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{y}^T \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{y} \partial \vec{y}} \bigg|_0 \vec{y} + \dots = H_2 + \dots \quad (1.5)$$

e consideremos a função

$$H_2 = \frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{x} + \vec{x}^T B \vec{y} + \frac{1}{2} \vec{y}^T C \vec{y}$$

onde A, B, C são matrizes $n \times n$. Evidentemente A e C são simétricas. H_2 pode, também, ser escrita:

$$H_2 = \frac{1}{2} (\vec{x}^T \vec{y}^T) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix}$$

Se chamarmos $\vec{z}$ ao vetor coluna $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ e D a matriz $2n \times 2n$ formada pelas matrizes A, B, C na forma indicada, então

$$H_2 = \frac{1}{2} \vec{z}^T D \vec{z} = H_2(\vec{z})$$

Seja o problema definido pela Hamiltoniana $K = H_2(\vec{\xi})$.

Então $\vec{z}$ satisfaz à equação diferencial canônica

$$\dot{\vec{\xi}} = J \left(\frac{\partial K}{\partial \vec{\xi}} \right)^T = J D \vec{\xi} \quad (1.6)$$

onde J é a matriz $2n \times 2n$.

$$J = \begin{pmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix}$$

com O_n e I_n , respectivamente, as matrizes nula e identidade $n \times n$.

Consideremos o problema de autovalores dado por

$$|J D - \lambda I_{2n}| = 0$$

que é polinômio de grau $2n$ em λ e admitirá, em geral, $2n$ raízes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$ reais ou complexas. Admitamos que tais raízes sejam todas distintas, o que, em geral, será verdade.

Como por outro lado

$$J D = \begin{pmatrix} -B & -C \\ A & B \end{pmatrix}$$

então

$$J D - \lambda I = \begin{pmatrix} -(B + \lambda I_n) & -C \\ A & B - \lambda I_n \end{pmatrix}$$

e, portanto, a equação

$$|J D - \lambda I| = 0$$

é uma função de λ^2 e se λ_k é uma raiz, $-\lambda_k$ também é. Escrevemos essas raízes na sequência $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n$. Admitiremos que para $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ e, além disto, que não existe nenhuma relação

$$\sum_{i=1}^n p_i \lambda_i = 0$$

com p_i inteiros, não todos diferentes de zero. Nestas condições é sabido que existe uma transformação linear a determinante não nulo

$$\vec{\zeta} = L \vec{\omega} \quad (1.7)$$

com L matriz $2n \times 2n$, de coeficientes constantes, tal que

$$L^{-1} (J D) L$$

é diagonal e mais ainda

$$\Lambda = L^{-1} (J D) L = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & -\lambda_n & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & +\lambda_n \end{pmatrix}$$

Então a equação (1.6) pode ser escrita

$$\dot{\vec{\omega}} = \Lambda \vec{\omega} \quad (1.8)$$

ou

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_k &= -\lambda_k \omega_k \\ \dot{\omega}_{n+k} &= +\lambda_k \omega_{n+k} \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.9)$$

Por meio da transformação

$$\vec{z} = L \vec{w}$$

a Hamiltoniana H do problema considerado se transformará em

$$H = \frac{1}{2} \vec{W}^T L^T D L \vec{W} + \text{t\u00e9rmos de ordem superior \u00e0 segunda nas}$$

$$\text{componentes de } \vec{W} = \frac{1}{2} \vec{W}^T L^T D L \vec{W} + H_3 + H_4 + \dots$$

onde H_p \u00e9 um polin\u00f4mio homog\u00eaneo do p -\u00e9simo grau nas componentes de $\vec{W}$. As equa\u00e7\u00f5es can\u00f4nicas associadas a H s\u00e3o:

$$L \dot{\vec{W}} = J \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{Z}} \right)^T = J (L^{-1})^T \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{W}} \right)^T = J (L^{-1})^T L^T D L \vec{W} + J (L^{-1})^T \sum_{p \geq 3} \left(\frac{\partial H_p}{\partial \vec{W}} \right)^T$$

Mas

$$J (L^{-1})^T L^T D L \vec{W} = J D L \vec{W} = L A \vec{W} \quad \dots$$

$$\dot{\vec{W}} = A \vec{W} + L^{-1} J (L^{-1})^T \sum_{p \geq 3} \left(\frac{\partial H_p}{\partial \vec{W}} \right)^T \quad (1.10)$$

Finalmente, poderemos escrever, pondo

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

$$\dot{u}_k = -\lambda_k u_k + \sum_{i,j} \alpha_{ij}^k u_i v_j + \sum_{i,j} \beta_{ij}^k u_i u_j + \sum_{i,j} \gamma_{ij}^k v_i v_j + \dots \quad (1.11)$$

$$\dot{v}_k = +\lambda_k v_k + \sum_{i,j} \bar{\alpha}_{ij}^k u_i v_j + \sum_{i,j} \bar{\beta}_{ij}^k u_i u_j + \sum_{i,j} \bar{\gamma}_{ij}^k v_i v_j + \dots$$

e os t\u00e9rmos omitidos s\u00e3o polin\u00f4mios de grau pelo menos igual a 3 e nos u_i, v_j ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Al\u00e9m disto, \u00e9 f\u00e1cil verificar que a matriz $L^{-1} J (L^{-1})^T$ \u00e9 antisim\u00e9trica. Com efeito

$$\{L^{-1} J (L^{-1})^T\}^T = L^{-1} J^T (L^{-1})^T = -\{L^{-1} J (L^{-1})^T\}.$$

A solu\u00e7\u00e3o do sistema (1.8) \u00e9 dada por

$$\omega_k = \omega_k^0 e^{-i\lambda_k t} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$\omega_{n+k} = \omega_{n+k}^0 e^{+i\lambda_k t}$$

isto \u00e9

$$\pi_k = \omega_k \omega_{n+k} = \omega_k^0 \omega_{n+k}^0 = \text{constantes} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Com esta observa\u00e7\u00e3o, se pusermos

$$H = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k v_k + H_3 + H_4 + \dots$$

ent\u00e3o as equa\u00e7\u00f5es can\u00f4nicas se escrevem

$$\dot{u}_k = - \frac{\partial H}{\partial v_k} = - \lambda_k u_k - \frac{\partial H_3}{\partial v_k} - \frac{\partial H_4}{\partial v_k} - \dots$$

$$\dot{v}_k = + \frac{\partial H}{\partial u_k} = \lambda_k v_k + \frac{\partial H_3}{\partial u_k} + \frac{\partial H_4}{\partial u_k} + \dots$$

Introduzamos, agora, a transformação completamente canônica

$$\begin{aligned} p_k &= i u_k v_k \\ q_k &= -i \ln v_k \end{aligned} \quad (1.12)$$

cujas inversa é

$$\begin{aligned} u_k &= -i p_k e^{-i q_k} \\ v_k &= e^{i q_k} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Nestas novas variáveis a Hamiltoniana torna-se

$$H = \sum_{k=1}^n -i \lambda_k p_k + \tilde{H} \quad (1.14)$$

onde $\tilde{H}$ é uma série de Fourier em $\sin j q_k$, $\cos j q_k$ cujos coeficientes são polinômios inteiros dos p_k . Então, poderemos escrever

$$\tilde{H} = \tilde{H}_3 + \tilde{H}_4 + \dots$$

onde

$$\tilde{H}_m = \sum_{s=0}^m P_s(p_1, \dots, p_n) e^{i(s_1 q_1 + s_2 q_2 + \dots + s_n q_n)} \quad (1.15)$$

com $0 \leq s_1 + s_2 + \dots + s_n \leq s$ e P_s um polinômio de grau $\leq s$ nos p_k .

Procuraremos uma transformação completamente canônica, gerada por uma função $S = S(\vec{P}, \vec{q})$ tal que

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}$$

e satisfazendo às condições do método de Poincaré. Evidentemente $H(\vec{P}, \vec{q})$ satisfaz, também, às condições de tal método em vista das hipóteses admitidas para os λ_k . Portanto, existe uma série formal

$$S = \sum p_k q_k + S_3 + S_4 + \dots$$

que gera uma Hamiltoniana

$$H(\vec{p}, \vec{q}) = K(\vec{P})$$

válida numa vizinhança suficientemente restrita da origem do espaço $(\vec{p}, \vec{q})$ e do ponto correspondente no espaço $(\vec{P}, \vec{Q})$. Se tal série convergir, o sistema será, então, integrável nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio, cujas características satisfazem às condições indicadas.

Vamos, agora, notar que a existência ou não existência de uma integral (propriedade local) é mais importante no que se refere ao comportamento da solução do que à sua integrabilidade. É fato notório que a integrabilidade de um sistema Hamiltoniano está em estrita relação com a existência e as características de soluções periódicas. A este ponto cabe lembrar o conceito introduzido por Whittaker (1960) de solução periódica singular. Uma solução periódica é dita ordinária se pertencer a uma família contínua de ∞^1 soluções periódicas para as quais a constante de energia tem o mesmo valor e que são transformadas uma na outra pela transformação infinitésima de uma certa integral. É dita singular se não existir solução periódica adjacente que corresponde ao mesmo valor da energia, isto é, aquela transformação infinitésima deixa as soluções periódicas singulares invariantes. Em relação a tais órbitas já Cherry, conforme Whittaker faz notar, havia determinado que sistemas Hamiltonianos possuem, em geral, soluções periódicas singulares. A descrição de certos resultados a respeito e a conexão entre integrabilidade e existência de soluções periódicas será estudada em maiores detalhes em capítulos posteriores.

Mostraremos, agora, que o método de Poincaré admite sempre solução. Com efeito, seja $H(\vec{x}, \vec{y})$ a Hamiltoniana satisfazendo a condição de ser analítica num certo domínio D do espaço de fase. Então, por todo ponto $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in D$ passa uma e uma única solução que é função analítica de $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ e do tempo t num intervalo $t_0 < t < t_1$. Nestas condições existe uma solução completa da equação de Hamilton-Jacobi

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{y}}, \vec{y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

dada por

$$S = S(\vec{y}, \vec{x}_0, t)$$

e tal que nas vizinhanças de $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ se verifica

$$\vec{x} = \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{y}} \right)^T = \vec{x}(\vec{y}, \vec{x}_0, t)$$

$$\vec{y} = \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{x}_0} \right)^T = \vec{y}(\vec{y}, \vec{x}_0, t)$$

e

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial \vec{x}_0 \partial \vec{y}} \right| \neq 0$$

Então, naquelas vizinhanças é possível obter

$$\vec{y} = \vec{Y}(\vec{x}_0, \vec{y}_0, t)$$

e, portanto,

$$\vec{x} = \vec{X}(\vec{x}_0, \vec{y}_0, t)$$

para $t_0 \leq t < T$. Por meio de S a nova Hamiltoniana será

$$\bar{H} = \bar{H}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \equiv 0$$

e, portanto, $\vec{x}_0$ e $\vec{y}_0$ são constantes. Se as séries de Poincaré convergirem, convergirão para constantes $\vec{x}_0^*$, $\vec{y}_0^*$ que poderão ser escolhidas iguais a $\vec{x}_0$ e $\vec{y}_0$, respectivamente.

Considere-se, agora, o problema descrito pela Hamiltoniana

$$H_0 = H_0(\vec{x})$$

o qual é, certamente, integrável, se $H_0 \in C^1$. Entretanto, admitiremos, ainda, a restrição mais forte de H_0 ser analítica. A solução se escreve

$$\vec{x}^* = \vec{x}_0 = \text{const.}$$

$$\vec{y}^* = \vec{\omega}(\vec{x}_0) t + \vec{y}_0$$

com

$$\vec{\omega}(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right)^T \bigg|_{\vec{x} = \vec{x}_0} \quad (1.16)$$

Admitiremos, ainda, que existe $\vec{x}_0$ tal que não seja possível se ter

$$\sum_{k=1}^n \omega_k(\vec{x}_0) m_k = 0 \quad (1.17)$$

para inteiros m_k não todos nulos. Uma questão importante é saber se o sistema descrito é estável a uma perturbação. Melhor explicando, considere-se a Hamiltoniana

$$H = H_0(\vec{x}) + \epsilon H_1(\vec{x}, \vec{y}; \epsilon) \quad (1.18)$$

onde $|\epsilon| \ll 1$ e H é analítica num domínio Ω do espaço de fase. A questão pode, então, ser colocada da seguinte maneira: Para as mesmas condições iniciais, as soluções correspondentes a H_0 e H se afastam indefinidamente no tempo? Se o método de Poincaré convergir obtemos as seguintes propriedades:

1) A solução $\vec{x}(\vec{x}_0, \vec{y}_0; t)$ difere da solução $\vec{x}^*(\vec{x}_0, \vec{y}_0, t)$ por termos puramente periódicos no tempo e, portanto, a diferença $|\vec{x}(\vec{x}_0, \vec{y}_0; t) - \vec{x}^*(\vec{x}_0, \vec{y}_0; t)|$ se mantém limitada, qualquer que seja $t \geq t_0$.

2) A solução $\vec{y}(\vec{x}_0, \vec{y}_0; t)$ difere da solução $\vec{y}^*(\vec{x}_0, \vec{y}_0; t)$ por termos puramente periódicos e por termos que crescem proporcionalmente a t com a ordem de ϵ , no máximo.

Mostraremos, entretanto, que, satisfeitas as condições enunciadas para $H_0(\vec{x})$, as frequências $\vec{\omega}(\vec{x}_0, 0)$ e $\vec{\omega}(\vec{x}_0, \epsilon)$ diferem no máximo na ordem de ϵ^2 . Com efeito, seja

$$H = H_0(\vec{x}) + \epsilon H_1(\vec{x}, \vec{y}) + \epsilon^2 H_2(\vec{x}, \vec{y}) + \dots$$

Procuremos uma transformação completamente canônica gerada por uma função $S = S(\vec{X}, \vec{Y}, \epsilon)$, tal que

$$\vec{x} = \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{Y}} \right)^T$$

$$\vec{y} = \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{X}} \right)^T, \quad \left| \frac{\partial^2 S}{\partial \vec{X} \partial \vec{Y}} \right| \neq 0$$

e tal que a Hamiltoniana H , expressa função das novas variáveis $(\vec{X}, \vec{Y})$ se ponha na forma

$$H(\vec{x}, \vec{y}) = K(\vec{x}, \vec{y}) = K_0(\vec{x}) + \epsilon^2 K_2(\vec{x}, \vec{y}) + \epsilon^3 K_3(\vec{x}, \vec{y}) + \dots$$

Admitamos S analítica e escrevamos

$$S = \sum_{k=1}^n x_k y_k + \epsilon S_1(\vec{x}, \vec{y}) + \epsilon^2 S_2(\vec{x}, \vec{y}) + \dots$$

Desenvolvimento em série de Taylor fornece

$$\begin{aligned} H(\vec{x}, \vec{y}) &= H_0\left(\vec{x} + \epsilon \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{y}}\right)^T + \epsilon^2 \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{y}}\right)^T + \dots\right) + \\ &+ \epsilon H\left(\vec{x} + \epsilon \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{y}}\right)^T + \dots, \vec{y}\right) + \dots = \\ &= H(\vec{x}) + \epsilon \left.\frac{\partial H_0}{\partial \vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{x}} \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{y}}\right)^T + \epsilon H_1(\vec{x}, \vec{y}) + \epsilon^2 F(\vec{x}, \vec{y}, \epsilon) \end{aligned}$$

Então, bastará resolver a equação:

$$H_0(\vec{x}) + \left.\frac{\partial H_0}{\partial x_k}\right|_{x=x} \frac{\partial S}{\partial y_k} + \epsilon H_1(\vec{x}, \vec{y}) = K_0(\vec{x}) \quad (1.19)$$

Seja

$$\bar{H}_1(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} H_1(\vec{x}, \vec{y}) dy_1 dy_2 \dots dy_n = 0 \quad (1.20)$$

Tomemos, então

$$K_0(\vec{x}) = H_0(\vec{x}) \quad (1.21)$$

que define $K_0(\vec{x})$. A função S_1 será definida pela equação a deriva das parciais

$$\sum_{k=1}^n \omega_k(\vec{x}) \frac{\partial S}{\partial y_k} = -H_1(\vec{x}, \vec{y})$$

que é linear e, portanto, admite solução. Com efeito, em particular

$$S_1 = \text{função puramente periódica de } y_1, y_2, \dots, y_n + \text{função arbitrária de } \vec{x}. \quad (1.22)$$

Se tomarmos a transformação gerada por

$$S^* = \sum x_k y_k + \epsilon S_1 \quad (1.23)$$

a nova Hamiltoniana será necessariamente da forma

$$K(\vec{x}, \vec{y}) = K_0(\vec{x}) + \epsilon^2 K_2(\vec{x}, \vec{y}) + \dots \quad (1.24)$$

o que prova nossa afirmação primitiva (Ver também L. Cesari, 1959).

2. Transformações

Seja o sistema de n equações diferenciais ordinárias

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t) \quad (2.1)$$

com $\vec{f}(\vec{x}, t)$ analítica numa certa região R do espaço de $\vec{x}$ e periódica, de período 2π , em t . Seja $\vec{x}_0 \in R$. Então, existe e é única a solução

$$\vec{x} = \vec{g}(\vec{x}_0, t) \quad (2.2)$$

tal que $\vec{x}_0 = \vec{g}(\vec{x}_0, 0)$. Seja $\vec{x} = \vec{0}$ uma solução.

Consideremos a transformação:

$$T : \vec{x} \rightarrow \vec{x}^* = \vec{g}(\vec{x}, 2\pi) \quad (2.3)$$

que é biunívoca nas vizinhanças de $\vec{x}_0$ pois $\vec{f}$ é analítica. Indicaremos por T^q a transformação que se obtém aplicando T q -vézes sucessivamente. Por exemplo

$$T^2 : \vec{x} \rightarrow T : \vec{g}(\vec{x}, 2\pi) \rightarrow \vec{g}(\vec{g}(\vec{x}, 2\pi), 2\pi)$$

Evidentemente, então, $\vec{x}_0 = \vec{0}$ é um ponto fixo de T^q , q inteiro positivo, isto é:

$$T^q : \vec{x}_0 \rightarrow \vec{x}_0 \quad (2.4)$$

Definiremos:

a) O ponto $\vec{x}_0$ é singular se houver uma vizinhança contida em R que não contém nenhum outro ponto fixo. Note-se que um ponto fixo de T^q , q inteiro positivo, corresponde a uma solução periódica de (2.1) de período $2q\pi$. Se o ponto é singular, então a solução periódica é singular. O conceito dado por Whittaker representa, evidentemente, um caso particular da presente definição.

b) O ponto $\vec{x}_0$ é ordinário se em toda a vizinhança de $\vec{x}_0$, contida em R , houver pelo menos um outro ponto fixo. A solução periódica correspondente será dita ordinária. No sentido indicado, então, um ponto ordinário é um ponto de acumulação de soluções periódicas.

Nos ocuparemos, principalmente, de transformações que conservam o volume, isto é, aquelas para as quais sendo:

$$J \, dx_1^* \, dx_2^* \, \dots \, dx_n^* = dx_1 \, dx_2 \, \dots \, dx_n$$

onde J é o Jacobiano

$$J = \frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)},$$

se tem $J = 1$, isto é,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 1$$

Suponhamos, agora, um sistema de equações diferenciais canônicas

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= - \frac{\partial H}{\partial y_k} \\ \dot{y}_k &= + \frac{\partial H}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.5)$$

com $H = H(\vec{x}, \vec{y}; t) = H(\vec{x}, \vec{y}; t + 2\pi)$, analítica num certo domínio D do espaço de fase, contendo a origem. Esta é suposta ponto de equilíbrio do sistema. Seja $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in D$ e seja $\vec{x} = \vec{f}(\vec{x}_0, \vec{y}_0, t)$, $\vec{y} = \vec{g}(\vec{x}_0, \vec{y}_0, t)$ a solução que é única e analítica passando por $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ no instante $t = 0$.

Consideremos novamente a transformação

$$\begin{aligned} \vec{x}^* &= \vec{f}(\vec{x}, \vec{y}, 2\pi) \\ \vec{y}^* &= \vec{g}(\vec{x}, \vec{y}, 2\pi) \end{aligned} \quad (2.6)$$

que será analítica nas vizinhanças da origem.

É claro que, ainda, o ponto $(\vec{0}, \vec{0})$ é ponto fixo da transformação. Em geral, um ponto fixo $(\vec{u}, \vec{v})$ será tal que

$$T^q : (\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) \quad (2.7)$$

e, evidentemente, este está associado a uma solução periódica de período $2q\pi$, com q inteiro positivo. Classificaremos, ainda, tais pontos em ordinários e singulares.

Como $\vec{f}$ e $\vec{g}$ são analíticas nas vizinhanças da origem, podemos representá-las nessa vizinhança por séries convergentes de Taylor

$$\vec{x}^* = \vec{f}_0 + \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right|_0 \vec{x} + \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}} \right|_0 \vec{y} + \dots$$

$$\vec{y}^* = \vec{g}_0 + \left. \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{x}} \right|_0 \vec{x} + \left. \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}} \right|_0 \vec{y} + \dots$$

Levando em conta que $\vec{f}_0 = \vec{g}_0 = 0$

e pondo

$$\vec{z}^* = \begin{pmatrix} \vec{x}^* \\ \vec{y}^* \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} \quad e$$

$$J_0 = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right|_0 & \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{x}} \right|_0 & \left. \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}} \right|_0 \end{pmatrix}$$

tem-se

$$\vec{z}^* = J_0 \vec{z} + \dots \quad (2.8)$$

Evidentemente a transformação T é canônica, isto é,

$$|J| = \begin{vmatrix} \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right| & \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}} \right| \\ \left. \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{x}} \right| & \left. \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}} \right| \end{vmatrix} = 1 \quad (2.9)$$

e, em particular, $|J| = 1$. A transformação T conserva, pois, o volume no espaço de fase. Além disso, por ser a transformação canônica

$$J^T E J = E \quad (2.10)$$

onde

$$E = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix},$$

aquela relação sendo válida para J_0 , em particular.

Consideremos a transformação linear

$$\vec{\zeta}^* = J_0 \vec{\zeta} \quad (2.11)$$

e o problema de autovalores

$$|J_0 - \lambda I| = 0$$

que se reduz à solução de uma equação algébrica inteira de grau $2n$ em λ . Como o termo independente é $|J_0|$, nenhuma raiz é nula. Seja $\vec{x}$ um auto vetor correspondente a λ , isto é,

$$J_0 \vec{x} = \lambda \vec{x}$$

Desta vêm, sucessivamente

$$E J_0 \vec{x} = \lambda E \vec{x}$$

$$J_0^T E J_0 \vec{x} = \lambda J_0^T E \vec{x}$$

$$E \vec{x} = \lambda J_0^T E \vec{x}$$

isto é, λ é também solução da equação característica

$$|J_0^T - \frac{1}{\lambda} I| = 0$$

e como

$$|J_0 - \lambda I| = |J_0^T - \lambda I| = 0$$

se λ é raiz, $\frac{1}{\lambda}$ também é. A equação característica é, pois, uma equação recíproca:

$$\lambda^{2n} + a_{2n-1} \lambda^{2n-1} + a_{2n-2} \lambda^{2n-2} + \dots + a_{2n-2} \lambda^2 + a_{2n-1} \lambda + 1 = 0$$

Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$ são as raízes, então

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{2n} = 1 \quad (2.12)$$

Suponhamos, novamente, todos os λ_j diferentes (reais ou complexos conjugados dois a dois). Existirá, então, uma transformação linear

$$\vec{\zeta} = L \vec{W} \quad (2.13)$$

tal que a transformação

$$\vec{W}^* = (L^{-1} J_0 L) \vec{W} = \Lambda \vec{W}$$

se reduz à forma normal, isto é,

$$\Lambda = L^{-1} J_0 L = \text{diag} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n})$$

e, portanto,

$$W_j^* = \lambda_j W_j$$

A transformação T poderá, então, se escrever

$$\vec{z}^* = \Lambda \vec{z} + \vec{\psi}(\vec{z}) \quad (2.14)$$

e como tal transformação é analítica nas vizinhanças da origem, podemos escrever

$$x_k^* = \lambda_k x_k + \sum_{m=2}^{\infty} p_m^k (x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) = p_k(\vec{x}, \vec{y})$$

$$y_k^* = \mu_k y_k + \sum_{m=2}^{\infty} q_m^k (x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) = q_k(\vec{x}, \vec{y})$$

para $k = 1, 2, \dots, n$. Os p_m^k e q_m^k são polinômios homogêneos de grau m nos x_i e y_i e $\mu_k = \lambda_{n+k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$). A transformação será, ainda, escrita

$$\begin{aligned}\vec{x}^* &= \vec{p}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{\lambda} \cdot \vec{x} + \vec{\phi}(\vec{x}, \vec{y}) \\ \vec{y}^* &= \vec{q}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{\mu} \cdot \vec{y} + \vec{\psi}(\vec{x}, \vec{y})\end{aligned}\quad (2.15)$$

e satisfará à condição de ser o Jacobiano unitário e, portanto,

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \vec{x}} & \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \vec{y}} \\ \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{x}} & \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{y}} \end{vmatrix} = 1$$

Ponhamos, agora:

$$x_k^* = u_k x_k, \quad y_k^* = v_k y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.16)$$

onde é possível escolher:

$$u_k = \sum_{m=0}^{\infty} p_m^k (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n) \quad (2.17)$$

$$v_k = \sum_{m=0}^{\infty} q_m^k (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n)$$

onde p_m^k e q_m^k são polinômios homogêneos de grau m nas variáveis produtos $x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n$, isto é,

$$p_m^k = \sum_{m_1+m_2+\dots+m_n=m} \alpha_{m_1 \dots m_n}^k (x_1 y_1)^{m_1} (x_2 y_2)^{m_2} \dots (x_n y_n)^{m_n}$$

$$q_m^k = \sum_{m_1+m_2+\dots+m_n=m} \beta_{m_1 \dots m_n}^k (x_1 y_1)^{m_1} (x_2 y_2)^{m_2} \dots (x_n y_n)^{m_n}$$

Evidentemente teremos

$$p_0^k = \lambda_k$$

$$q_0^k = \mu_k$$

Considere-se, agora, um sistema autônomo

$$\dot{x}_k = f_k(x_1, \dots, x_n) \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n$$

onde as f_k são supostas analíticas num domínio D do espaço dos x_i .

Na forma vetorial

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (2.18)$$

Correspondente à condição inicial $t = 0 : \vec{x} = \vec{\xi} \in D$, existe e é única a solução

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{\xi}, t) \quad , \quad \vec{x}(\vec{\xi}, 0) = \vec{\xi} \quad \text{e} \quad \vec{x}(\vec{\xi}, t)$$

é analítica em t , no intervalo $0 \leq t \leq T$, durante o qual $\vec{x}(\vec{\xi}, t) \in D$.

Se em correspondência a um $\vec{\xi}^* \in D$, a solução $\vec{x}(\vec{\xi}^*, t)$ for periódica de período 2π e permanecer em D , então a transformação

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{\xi}^*, 2\pi) \quad (2.19)$$

terá um ponto fixo em $\vec{\xi}^*$. Com efeito, seja $\vec{\xi}$ um ponto de D suficientemente próximo de $\vec{\xi}^*$, mas pertencente ao plano $\alpha : x_s = \xi_s^*$, e suponhamos $f_s(\xi_1^*, \dots, \xi_n^*) \neq 0$. Então, a solução $\vec{x} = \vec{x}(\vec{\xi}^*, t)$ não é tangente a $\alpha : x_s = \xi_s^*$. Por razões de continuidade a solução $\vec{x} = \vec{x}(\vec{\xi}, t)$ também não é tangente a $\alpha : x_s = \xi_s^*$ e após um certo tempo τ ela interceptará esse plano num ponto $(x_1, \dots, x_{s-1}, \xi_s^*, x_{s+1}, \dots, x_n)$. Evidentemente τ se obtém impondo

$$x_s(\xi_1, \dots, \xi_{s-1}, \xi_s^*, \xi_{s+1}, \dots, \xi_n, \tau) = \xi_s^* \quad (2.20)$$

pois, por hipótese

$$\left. \frac{dx_s}{dt} \right|_{t=\tau} = f_s(\vec{\xi}) \neq 0$$

para $\vec{\xi}$ suficientemente próximo de $\vec{\xi}^*$. De (2.20) obteremos

$$\tau = \tau(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{s-1}, \xi_{s+1}, \dots, \xi_n)$$

que, substituída em

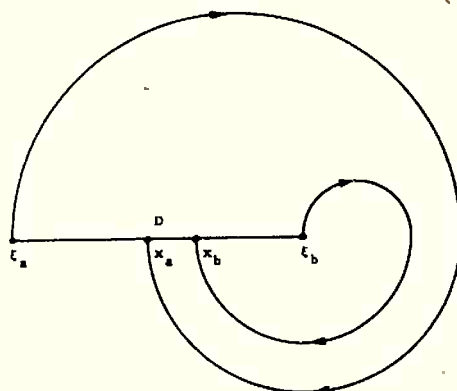
$$x_k = x_k(\vec{\xi}, \tau) \quad (k = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n)$$

fornece

$$x_k = x_k(\xi_1, \dots, \xi_{s-1}, \xi_{s+1}, \dots, \xi_n) \quad (2.21)$$

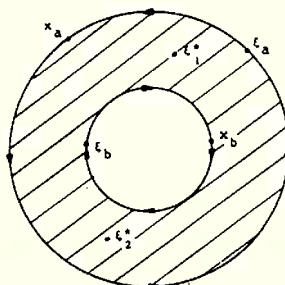
funções analíticas dos ξ_i . Se em correspondência a $\tau = 2\pi$, se obtém $\vec{x} = \vec{\xi}^*$, então $\vec{\xi}$ é ponto fixo e, portanto, fica provada a tese. Então, dada uma transformação (2.21) definida nas vizinhanças de um

ponto $\xi^* \in D$ temos o problema topológico da determinação de um domínio D para o qual existe um ponto fixo. A respeito podemos citar o Teorema de Brouwer: " Numa transformação contínua de uma imagem homeomórfica de um cubo n -dimensional em si mesmo existe pelo menos um ponto fixo ". Num espaço a duas dimensões, D terá, necessariamente, dimensão 1, isto é, é um segmento fechado de reta (ξ_a, ξ_b) .



Ilustrando o teorema de Brouwer

Se a aplicação for tal que x_a está à direita de ξ_a e x_b à esquerda de ξ_b , então, é evidente que existe um ponto ξ^* para o qual $x = \xi^*$. É, entretanto, importante notar que em sistemas Hamiltonianos os domínios D não são, em geral, topologicamente equivalentes a um cubo, mas sim a toros. Sobre esta questão nos ocuparemos logo mais. Vale a pena citar que no caso, será necessário acrescentar a hipótese da transformação ser isovolumétrica (a qual em efeito é satisfeita sempre para sistemas Hamiltonianos). Um caso especial é o Teorema de Poincaré e Birkhoff: " Numa transformação contínua de um anel circular em si mesmo, se os contornos se transformam em sentidos opostos, existem, pelo menos, dois pontos fixos interiores ao anel ".



Ilustrando o teorema de Poincaré-Birkhoff

3. Propriedades de transformações nas vizinhanças de um ponto fixo

Analiseemos, em alguns detalhes, as propriedades das transformações analíticas isovolumétricas nas vizinhanças de um ponto fixo. Tomemos a origem neste ponto. Então, a transformação, numa vizinhança da origem, se escreve

$$x_k = a_k^1 \xi_1 + \dots + a_k^n \xi_n + b_k^1 \eta_1 + \dots + b_k^n \eta_n + \dots = f_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \quad (3.1)$$

$$y_k = c_k^1 \xi_1 + \dots + c_k^n \xi_n + d_k^1 \eta_1 + \dots + d_k^n \eta_n + \dots = g_k(\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

para $k = 1, 2, \dots, n$.

Supusemos as variáveis do espaço, suposto $2n$ -dimensional, separadas em dois conjuntos n -dimensionais das "coordenadas" y_k e dos "momentos" x_k . As séries (3.1) convergem para $|\xi_k|$, $|\eta_k|$ suficientemente pequenos ($k = 1, 2, \dots, n$). Se (3.1) é isovolumétrica, a matriz simbólica

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\xi}} & \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\eta}} \\ \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{\xi}} & \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{\eta}} \end{pmatrix}$$

é não singular e inclusive $|J| = 1$. Em particular, na origem

$$|J| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n & b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n^1 & c_n^2 & \dots & c_n^n & d_n^1 & d_n^2 & \dots & d_n^n \end{vmatrix} = 1$$

Consideremos o anel Γ das séries de potências e coeficientes reais ou complexos

$$\phi(\vec{x}, \vec{y}) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{12} x_1 x_2 + \dots + b_{12} y_1 y_2 + \dots + c_{12} x_1 y_2 + \dots$$

e se $a_0 \neq 0$, então existe $\phi^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) \in \Gamma$, tal que

$$\phi \phi^{-1} = 1$$

É evidente que substituindo as séries (3.1) em $\phi(\vec{x}, \vec{y})$ a série re-

sultante $\phi(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \in \Gamma$.

Dado um conjunto de transformações analíticas isovolumétricas que tem ponto fixo na origem

$$S_1 : \vec{\xi} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{y})$$

$$\vec{\eta} = \vec{g}(\vec{x}, \vec{y})$$

$$S_2 : \vec{x} = \vec{\phi}(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\vec{y} = \vec{\psi}(\vec{u}, \vec{v})$$

é fácil verificar que tôdas as S constituem um pseudo grupo. Se restringirmos convenientemente a vizinhança da origem, aqui as S constituem um grupo. O problema clássico associado ao estudo de pontos de equilíbrio e soluções periódicas de sistemas Hamiltonianos é o da determinação da chamada forma normal das transformações S .

Ponhamos

$$S : \vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}, \vec{y})$$

$$\vec{y}' = \vec{g}(\vec{x}, \vec{y})$$

$$e \quad \begin{pmatrix} \vec{x}' \\ \vec{y}' \end{pmatrix} = S_0 \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} + \dots, \quad |S_0| = 1$$

$$U : \vec{x}' = \vec{\phi}(\vec{\xi}', \vec{\eta}')$$

$$\vec{y}' = \vec{\psi}(\vec{\xi}', \vec{\eta}')$$

$$e \quad \begin{pmatrix} \vec{x}' \\ \vec{y}' \end{pmatrix} = U_0 \begin{pmatrix} \vec{\xi}' \\ \vec{\eta}' \end{pmatrix} + \dots, \quad |U_0| \neq 0$$

$$T : \vec{\xi}' = \vec{F}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

$$\vec{\eta}' = \vec{G}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

$$e \quad \begin{pmatrix} \vec{\xi}' \\ \vec{\eta}' \end{pmatrix} = T_0 \begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} + \dots, \quad |T_0| \neq 0$$

Se chamarmos Z o ponto $\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix}$ e ζ o ponto $\begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix}$ poremos, formalmente

$$Z' = S Z$$

$$Z' = U \zeta' \quad (Z = U \zeta)$$

$$\zeta' = T \zeta$$

Destas decorre

$$U T \zeta = S U \zeta$$

isto é

$$U T = S U$$

ou

$$(3.2)$$

$$T = U^{-1} S U$$

Dada a transformação S , o problema é determinar U tal que T seja a forma normal mais simples possível. Inicialmente, reduzimos os termos lineares. Para estes, a equação (3.2) se reduz a uma relação matricial

$$T_0 = U_0^{-1} S_0 U_0 \quad (3.3)$$

onde T_0 , U_0 , S_0 são matrizes $2n \times 2n$ inversíveis, por hipótese. Admitiremos que os autovalores de S_0 ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$) sejam todos distintos. Evidentemente nenhum deles é nulo, pois $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n = |S_0| = 1$. Neste caso existe uma matriz U_0 tal que T_0 se reduz à diagonal cujos elementos são aqueles autovalores. Se todos os λ_i e μ_i forem reais (ponto fixo hiperbólico) então U_0 é real. Se todos os λ_i e μ_i forem complexos (conjugados dois a dois; ponto fixo elíptico) U_0 é complexo. Então, teremos

$$\begin{aligned} x'_k &= \lambda_k x_k + \tilde{f}_k = f_k(\vec{x}, \vec{y}) \\ S : \quad y'_k &= \mu_k y_k + \tilde{g}_k = g_k(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde, por enquanto, se supõem todos os λ_k e μ_k reais.

Tomemos $U_0 = I_{2n}$, isto é,

$$\begin{aligned} x_k &= \xi_k + \tilde{\phi}_k = \phi_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \\ U : \quad y_k &= \eta_k + \tilde{\psi}_k = \psi_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

e procuremos determinar $\vec{\phi}$ e $\vec{\psi}$ de tal maneira que

$$\begin{aligned} \xi'_k &= \lambda_k \xi_k \\ T : \quad \eta'_k &= \mu_k \eta_k \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como $S U = U T$, resulta

$$f_k \{ \vec{\phi}(\vec{\xi}, \vec{\eta}), \vec{\psi}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \} = \phi_k \{ (\lambda_1 \xi_1, \lambda_2 \xi_2, \dots), (\mu_1 \eta_1, \mu_2 \eta_2, \dots) \} \quad (3.7)$$

$$g_k \{ \vec{\phi}(\vec{\xi}, \vec{\eta}), \vec{\phi}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \} = \psi_k \{ (\lambda_1 \xi_1, \lambda_2 \xi_2, \dots), (\mu_1 \eta_1, \mu_2 \eta_2, \dots) \}$$

Ponhamos, agora

$$\phi_k = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_k^m, \quad \psi_k = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_k^m \quad (3.8)$$

onde ϕ_k^m e ψ_k^m são polinômios homogêneos de grau m em

$$\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$$

As relações (3.7) tornam-se

$$\lambda_k \phi_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) + \bar{f}_k \{ \vec{\phi}(\vec{\xi}, \vec{\eta}), \vec{\psi}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \} = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_k^m \{ (\lambda_1 \xi_1, \dots), (\mu_1 \eta_1, \dots) \}$$

$$\mu_k \psi_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) + \bar{g}_k \{ \vec{\phi}(\vec{\xi}, \vec{\eta}), \vec{\psi}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \} = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_k^m \{ (\lambda_1 \xi_1, \dots), (\mu_1 \eta_1, \dots) \}$$

ou, ainda:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \{ \phi_k^m \{ (\lambda_1 \xi_1, \dots, \lambda_n \xi_n), (\mu_1 \eta_1, \dots, \mu_n \eta_n) \} - \lambda_k \phi_k^m \{ (\xi_1, \dots, \xi_n), (\eta_1, \dots, \eta_n) \} \} = \\ = \bar{f}_k \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \phi_k^m(\vec{\xi}, \vec{\eta}), \sum_{m=1}^{\infty} \psi_k^m(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \{ \psi_k^m \{ (\lambda_1 \xi_1, \dots, \lambda_n \xi_n), (\mu_1 \eta_1, \dots, \mu_n \eta_n) \} - \mu_k \psi_k^m \{ (\xi_1, \dots, \xi_n), (\eta_1, \dots, \eta_n) \} \} = \\ = \bar{g}_k \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \phi_k^m(\vec{\xi}, \vec{\eta}), \sum_{m=1}^{\infty} \psi_k^m(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \right\} \end{aligned}$$

que são séries de polinômios em $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$. Igualando coeficientes, para $m=1$, levando em conta (3.4) e (3.5), resulta

$$\lambda_k \xi_k - \lambda_k \xi_k = 0$$

$$\mu_k \eta_k - \mu_k \eta_k = 0$$

satisfeitas idênticamente. A seguir, consideremos os termos que envolvem

$$\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots \xi_n^{n_n} \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} \dots \eta_n^{m_n} \quad (3.10)$$

com

$$m = n_1 + n_2 + \dots + n_n + m_1 + m_2 + \dots + m_n \geq 2$$

Sejam, em ϕ_k^m e ψ_k^m os termos correspondentes dados por

$$C_{n_1, \dots, m_n}^k \xi_1^{n_1} \dots \eta_n^{m_n}$$

e

$$D_{n_1, \dots, m_n}^k \xi_1^{n_1} \dots \eta_n^{m_n}$$

Novamente comparando os coeficientes obtemos

$$C_{n_1, \dots, m_n}^k \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \dots \lambda_n^{n_n} \mu_1^{m_1} \mu_2^{m_2} \dots \mu_n^{m_n} - \lambda_k C_{n_1, \dots, m_n}^k = A_m^k \quad (3.11)$$

$$D_{n_1, \dots, m_n}^k \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \dots \lambda_n^{n_n} \mu_1^{m_1} \mu_2^{m_2} \dots \mu_n^{m_n} - \mu_k D_{n_1, \dots, m_n}^k = B_m^k$$

onde A_m^k e B_m^k são polinômios de coeficientes de termos do tipo (3.10), para

$$n_1 + n_2 + \dots + n_n + m_1 + m_2 + \dots + m_n = s < m$$

pois $\tilde{f}_k$ e $\tilde{g}_k$ começam, por hipótese, com termos quadráticos. Então, se tais coeficientes são conhecidos para $s = 1, 2, \dots, m-1$, os coeficientes $C_{n_1, \dots, m_n}^k$ e $D_{n_1, \dots, m_n}^k$ serão definidos por (3.11) desde que se tenha

$$\begin{aligned} \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \dots \lambda_n^{n_n} \mu_1^{m_1} \mu_2^{m_2} \dots \mu_n^{m_n} - \lambda_k &\neq 0 \\ \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \dots \lambda_n^{n_n} \mu_1^{m_1} \mu_2^{m_2} \dots \mu_n^{m_n} - \mu_k &\neq 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

para $k=1, 2, \dots, n$ e $n_1 + n_2 + \dots + n_n + m_1 + m_2 + \dots + m_n = m = 2, 3, 4, \dots$

Em verdade, existem situações em que as condições (3.12) são satisfeitas. Entretanto, como tais expressões aparecem em denominadores das séries ϕ_k e ψ_k estas podem divergir se tais denominadores têm ponto de acumulação zero.

Evidentemente existirão valores $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n$, tais que aquelas relações se mantenham superiores a um certo limite para todos os $n_1, n_2, \dots, m_n$ inteiros. Estes valores são, na realidade,

os mesmos já mencionados nos métodos de Lindstedt-Poincaré. Da aproximação diofantina sabemos que bastará excluir um certo conjunto de λ_j e μ_j de medida nula. Note-se, entretanto, que, como admitimos $|S_0| = 1$, resultará

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n = 1 \quad (3.13)$$

e, portanto, as relações (3.12) não podem ser satisfeitas (Basta considerar a expressão acima multiplicada por λ_k ou μ_k , $k = 1, 2, \dots, n$).

Então, uma transformação isovolumétrica não pode ser reduzida à forma normal (3.6).

Vejam, agora, se é possível reduzir T à forma normal

$$\begin{aligned} \xi'_k &= u_k \xi_k \\ T : \\ \eta'_k &= v_k \eta_k \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde

$$u_k = a_0^k + \sum_{j=1}^n a_{2,j}^k \xi_j \eta_j + \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n a_{4,j,m}^k (\xi_j \eta_j) (\xi_m \eta_m) + \dots \quad (3.15)$$

$$v_k = b_0^k + \sum_{j=1}^n b_{2,j}^k \xi_j \eta_j + \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n b_{4,j,m}^k (\xi_j \eta_j) (\xi_j \eta_j) + \dots$$

Novamente procuraremos U , de acordo com a relação

$$S U = U T$$

e S é da forma (3.4). Resulta, então,

$$f_k \{ \vec{\phi}(\vec{\xi}, \vec{\eta}), \vec{\psi}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \} = \phi_k \{ (u_1 \xi_1, \dots, u_n \xi_n), (v_1 \eta_1, \dots, v_n \eta_n) \}$$

$$g_k \{ \vec{\phi}(\vec{\xi}, \vec{\eta}), \vec{\psi}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \} = \psi_k \{ (u_1 \xi_1, \dots, u_n \xi_n), (v_1 \eta_1, \dots, v_n \eta_n) \}$$

ou, ainda

$$\lambda_k \phi_k + \bar{f}_k \{ \vec{\phi}, \vec{\psi} \} = \phi_k(u \xi, v \eta) \quad (3.16)$$

$$\mu_k \psi_k + \bar{g}_k \{ \vec{\phi}, \vec{\psi} \} = \psi_k(u \xi, v \eta)$$

ou, levando em conta (3.8)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \{ \lambda_k \phi_k^m(\xi, \eta) - \phi_k^m(u \xi, v \eta) \} + \bar{f}_k \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \phi_k^m(\xi, \eta), \sum_{m=1}^{\infty} \psi_k^m(\xi, \eta) \right\} = 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \{ \mu_k \psi_k^m(\xi, \eta) - \psi_k^m(u\xi, v\eta) \} + \tilde{g}_k \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \phi_k^m(\xi, \eta), \sum_{m=1}^{\infty} \psi_k^m(\xi, \eta) \right\} = 0$$

ou ainda

$$(\lambda_k - u_k) \xi_k + \sum_{m=2}^{\infty} \{ \lambda_k \phi_k^m(\xi, \eta) - \phi_k^m(u\xi, v\eta) \} + \tilde{f}_k \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \phi_k^m(\xi, \eta), \sum_{m=1}^{\infty} \psi_k^m(\xi, \eta) \right\} = 0 \quad (3.17)$$

$$(\mu_k - v_k) \eta_k + \sum_{m=2}^{\infty} \{ \mu_k \psi_k^m(\xi, \eta) - \psi_k^m(u\xi, v\eta) \} + \tilde{g}_k \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \phi_k^m(\xi, \eta), \sum_{m=1}^{\infty} \psi_k^m(\xi, \eta) \right\} = 0$$

Os termos de 1º grau fornecem:

$$a_0^k = \lambda_k$$

$$b_0^k = \mu_k$$

Suponhamos, novamente, que se conheçam ϕ_k^s e ψ_k^s para $s = 1, 2, \dots, m-1$, e além disto os coeficientes

$$a_0^k, a_{2,j_1}^k, a_{4,j_1,j_2}^k, \dots, a_{2p,j_1,\dots,j_p}^k; \\ b_0^k, b_{2,j_1}^k, b_{4,j_1,j_2}^k, \dots, b_{2p,j_1,\dots,j_p}^k,$$

para $2p < m-1$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Usando a mesma notação anterior obtemos relações análogas a (3.11) onde A_s^k , B_s^k são, agora, polinômios que envolvem coeficientes conhecidos de termos para os quais $n_1 + n_2 + \dots + n_n < m$ e $a_{2s,j_1,\dots,j_s}^k$, $b_{2s,j_1,\dots,j_s}^k$ com $2s < m-1$, $j_k = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, s$.

Além disto $\phi_k^{m-1}(u\xi, v\eta)$, $\psi_k^{m-1}(u\xi, v\eta)$ não contribuem para termos de ordem m e $\phi_k^{m-2}(u\xi, v\eta)$, $\psi_k^{m-2}(u\xi, v\eta)$ contribuem apenas com coeficientes conhecidos. Novamente, desde que (3.12) sejam satisfeitos, os coeficientes $C_{n_1,\dots,n_n}^k$ e $D_{n_1,\dots,n_n}^k$ podem ser obtidos. Como $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\mu_1, \dots, \mu_n$ são recíprocas duas a duas, pondo $\nu_k = \frac{1}{\lambda_k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) as relações (3.12) são equivalentes a

$$\lambda_1^{n_1-m_1} \lambda_2^{n_2-m_2} \dots \lambda_n^{n_n-m_n} - \lambda_k \neq 0$$

$$\lambda_1^{n_1-m_1} \lambda_2^{n_2-m_2} \dots \lambda_n^{n_n-m_n} \lambda_k^{-1} \neq 0$$

ou ainda, como $\lambda_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned} \lambda_1^{n_1-m_1} \lambda_2^{n_2-m_2} \dots \lambda_k^{n_k-m_k-1} \dots \lambda_n^{n_n-m_n} &\neq 1 \\ \lambda_1^{n_1-m_1} \lambda_2^{n_2-m_2} \dots \lambda_k^{n_k-m_k+1} \dots \lambda_n^{n_n-m_n} &\neq 1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

e é evidente que, para $n_1=m_1$, $n_2=m_2$, ..., $n_k=m_k+1$, ..., $n_n=m_n$ tais condições não podem ser satisfeitas. Também não serão satisfeitas se, pelo menos, um dos λ_k fôr raiz da unidade. Admitiremos que isto não seja verdade e vamos procurar um processo de definir os coeficientes desconhecidos, de maneira unívoca. Definamos, inicialmente, $a_k^s; \dots, b_k^s; \dots$ nulos para k ímpar. Suponhamos que para $m > 1$ os coeficientes de $\phi_k^s, \psi_k^s, a_{s-1}^k; \dots, b_{s-1}^k; \dots$ tenham sido determinados, para $s < m$. Com efeito, isto é verdade para $m = 2$, pois

$$\phi_k^1 = 1$$

$$\psi_k^1 = 1$$

$$a_0^k = \lambda_k$$

$$b_0^k = \mu_k = \lambda_k^{-1}$$

Comparemos os termos de grau m . Para um mesmo m , a equação (3.17) fornece:

$$\lambda_k \phi_k^m(\xi, \eta) - \phi_k^m(\lambda \xi, \mu \eta) = \sum_{2(m_1 + \dots + m_n) + 1 = m} a_{m-1; m_1, \dots, m_n}^k (\xi_1 \eta_1)^{m_1} \dots \xi_k^{m_k+1} \eta_k^{m_k} \dots (\xi_n \eta_n)^{m_n} = \dots$$

$$\mu_k \psi_k^m(\xi, \eta) - \psi_k^m(\lambda \xi, \mu \eta) = \sum_{2(m_1 + \dots + m_n) + 1 = m} b_{m-1; m_1, \dots, m_n}^k (\xi_1 \eta_1)^{m_1} \dots \xi_k^{m_k} \eta_k^{m_k+1} \dots (\xi_n \eta_n)^{m_n} = \dots$$

onde os termos à direita são conhecidos. Explicitando os ϕ_k^m e ψ_k^m :

$$\begin{aligned} \lambda_k \sum_{n_1+m_1=m} C_{m; n_1, n_2, \dots, n_n}^k \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots \xi_n^{n_n} - \sum_{n_1+m_1=m} C_{m; n_1, n_2, \dots, n_n}^k \lambda_1^{n_1} \xi_1^{n_1} \dots \\ \dots \mu_n^{n_n} \eta_n^{n_n} = \sum_{2(n_1+n_2+\dots+n_n)+1=m} a_{m-1; n_1, \dots, n_n}^k (\xi_1 \eta_1)^{n_1} \dots (\xi_k \eta_k)^{n_k} \xi_k \dots \\ \dots (\xi_n \eta_n)^{n_n} + \dots \end{aligned}$$

$$\sum_{m_1+n_1=m} C_{m;n_1, n_2, \dots, m_n}^k (\lambda_k - \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \dots \mu_n^{m_n}) \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots \eta_n^{m_n} =$$

$$= 2(n_1 + \dots + n_n) + 1 = m \quad a_{m-1; n_1, \dots, n_n}^k (\xi_1 \eta_1)^{n_1} \dots (\xi_k \eta_k)^{n_k} \xi_k \dots (\xi_n \eta_n)^{n_n} + \dots$$

ou ainda

$$\sum_{n'_1+m_1=m} C_{m;n'_1, \dots, m_n}^k (\lambda_k - \lambda_1^{n'_1-m_1} \dots \lambda_n^{n'_n-m_n}) \xi_1^{n'_1} \xi_2^{n'_2} \dots \eta_n^{m_n} =$$

$$= 2(n_1 + \dots + n_n) + 1 = m \quad a_{m-1; n_1, \dots, n_n}^k (\xi_1 \eta_1)^{n_1} \dots (\xi_k \eta_k)^{n_k} \xi_k \dots (\xi_n \eta_n)^{n_n} +$$

+ termos de coeficientes conhecidos de grau m ,

e, análogamente,

$$\sum_{n'_1+m_1=m} D_{m;n'_1, \dots, m_n}^k (\mu_k - \lambda_1^{n'_1-m_1} \dots \lambda_n^{n'_n-m_n}) \xi_1^{n'_1} \xi_2^{n'_2} \dots \eta_n^{m_n} =$$

$$= 2(n_1 + \dots + n_n) + 1 = m \quad b_{m-1; n_1, \dots, n_n}^k (\xi_1 \eta_1)^{n_1} \dots (\xi_k \eta_k)^{n_k} \xi_k \dots (\xi_n \eta_n)^{n_n} +$$

+ termos de coeficientes conhecidos de grau m .

Para m par, como $a_p^s; \dots$ e $b_p^s; \dots$ são nulos para p ímpar então os coeficientes $C_m^k; \dots$, $D_m^k; \dots$ se determinam univocamente a partir de termos conhecidos. Entretanto, para m ímpar as equações não permitem determinar os coeficientes. É necessário se introduzir duas restrições a mais para determiná-las. Admitamos, então, que as séries

$$(1) \quad \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_j} = P_{ij}^k (\xi, \eta)$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_j} - \frac{\partial \phi_k}{\partial \eta_j} - \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi_1} \right) = Q_{ij} (\xi, \eta)$$

não contenham potências de $\xi_k \eta_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, isto é, não contenham termos do tipo u_k, v_k (sem termos independentes). Novamente, suponhamos que tal seja para termos de grau inferior a $m-1$. Para $m = 2$, a simples inspeção dos desenvolvimentos verifica esta hipótese. Por outro lado, para m par, se aquilo é verdade, o será para $m+1$. Vejamos para um m ímpar.

Temos que

$$\frac{\partial \phi_k^m}{\partial \xi_j} = \sum_{n_1+m_1=m} n_j C_{m;n_1, \dots, m_n}^k \xi_1^{n_1-1} \dots \xi_j^{n_j-1} \dots \xi_n^{n_n} \eta_1^{m_1} \dots \eta_n^{m_n}$$

$$\frac{\partial \psi_k^m}{\partial \eta_j} = \sum_{n_1'+m_1'=m} m_j' D_{m;n_1', \dots, m_n'}^k \xi_1^{n_1'} \dots \xi_n^{n_n'} \eta_1^{m_1'-1} \dots \eta_j^{m_j'-1} \dots \eta_n^{m_n'}$$

O coeficiente de $(\xi_1 \eta_1)^{n_1''} (\xi_2 \eta_2)^{n_2''} \dots (\xi_n \eta_n)^{n_n''}$ na primeira é

$$(n_j'' + 1) C_{m;n_1'', \dots, n_j''+1, \dots, n_n''}^k ; n_1'', \dots, n_n''$$

e na segunda

$$(n_j'' + 1) D_{m;n_1'', \dots, n_n''}^k ; n_1'', \dots, n_j''+1, \dots, n_n''$$

e como $n_j'' + 1 \neq 0$, a hipótese (1) implica:

$$C_{m;n_1, \dots, n_j+1, \dots, n_n}^k ; n_1, \dots, n_n = D_{m;n_1, \dots, n_n}^k ; n_1, \dots, n_j+1, \dots, n_n \quad (3.19)$$

Por outro lado observe-se que, em vista de (3.5)

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_1} = \delta_{k1} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\partial \phi_k^m}{\partial \xi_1} = \delta_{k1} + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n_1+m_1=m} n_1 C_{m;n_1, \dots, m_n}^k \xi_1^{n_1-1} \dots \xi_n^{n_n} \eta_1^{m_1} \dots \eta_n^{m_n}$$

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_j} = \delta_{kj} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\partial \psi_k^m}{\partial \eta_j} = \delta_{kj} + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n_1'+m_1'=m} m_j' D_{m;n_1', \dots, m_n'}^k \xi_1^{n_1'} \dots \xi_n^{n_n'} \eta_1^{m_1'-1} \dots \eta_j^{m_j'-1} \dots \eta_n^{m_n'}$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial \eta_j} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\partial \phi_k^m}{\partial \eta_j} = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n_1''+m_1''=m} m_j'' C_{m;n_1'', \dots, m_n''}^k \xi_1^{n_1''} \dots \xi_n^{n_n''} \eta_1^{m_1''-1} \dots \eta_j^{m_j''-1} \dots \eta_n^{m_n''}$$

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial \xi_1} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\partial \psi_k^m}{\partial \xi_1} = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n_1''' + m_1''' = m} n_1''' D_{m;n_1''', \dots, m_n'''}^k \xi_1^{n_1'''-1} \dots \xi_n^{n_n'''} \eta_1^{m_1'''} \dots \eta_n^{m_n'''}$$

Fixemos nossa atenção para um termo da ordem

$$(\xi_1 \eta_1)^{n_1^0} (\xi_2 \eta_2)^{n_2^0} \dots (\xi_n \eta_n)^{n_n^0}$$

com

$$n_1^0 + n_2^0 + \dots + n_n^0 = m^0$$

Conhecidos os coeficientes até a ordem $m^0 - 1$, é claro que as contribuições para os termos de ordem imediatamente superior serão, através da relação (2), para $k = j = i$:

$$\sum_{\sum n_i^0 + n_1^0 = m^0} (n_1^0 + 1) C^k_{m^0+1; n_1^0, \dots, n_1^0+1, \dots, n_n^0, n_1^0, \dots, n_n^0} \xi_1^{n_1^0} \dots \xi_n^{n_n^0} \eta_1^{n_1^0} \dots \eta_n^{n_n^0} +$$

$$+ \sum_{\sum n_i^0 + n_1^0 = m^0} (n_1^0 + 1) D^k_{m^0+1; n_1^0, \dots, n_n^0, n_1^0, \dots, n_1^0+1, \dots, n_n^0} \xi_1^{n_1^0} \xi_n^{n_n^0} \eta_1^{n_1^0} \eta_n^{n_n^0} =$$

= termos de coeficientes conhecidos de mesma ordem e termos de ordem superior. Logo, para que o coeficiente da ordem atingida se anule, de verá ser

$$\{ C^k_{m; m_1, \dots, m_j+1, \dots, m_n, m_1, \dots, m_n} +$$

$$+ D^k_{m; m_1, \dots, m_n, m_1, \dots, m_j+1, \dots, m_n} \}$$

igual a um valor bem determinado e, em vista de (3.19) ficam, assim, unívocamente determinados os coeficientes C e D. Ficou, assim, unívocamente determinada uma transformação U tal que a transformação S se reduz à forma normal T dada por

$$T = U^{-1} S U$$

com T da forma (3.14) sob a condição de que possam ser satisfeitas (3.18). Se S fôr isovolumétrica, pode-se provar que T é isovolumétrica. Inicialmente, é fácil verificar que $Q_{ij} = \delta_{ij}$. Então U é canônica e da relação $S U = U T$, decorre

$$\vec{f} \{ \vec{\phi}(\vec{\xi}, \vec{n}), \vec{\psi}(\vec{\xi}, \vec{n}) \} = \vec{\phi}(\vec{u\xi}, \vec{v\eta})$$

$$\vec{g} \{ \vec{\phi}(\vec{\xi}, \vec{n}), \vec{\psi}(\vec{\xi}, \vec{n}) \} = \vec{\psi}(\vec{u\xi}, \vec{v\eta})$$

e destas

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\phi}} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\psi}} \quad \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \vec{\xi}} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \vec{u\xi}} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \vec{v\eta}} \quad \frac{\partial \vec{u\xi}}{\partial \vec{\xi}} \frac{\partial \vec{u\xi}}{\partial \vec{n}}$$

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{\phi}} \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{\psi}} \quad \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{\xi}} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{u\xi}} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{u\xi}} \quad \frac{\partial \vec{v\eta}}{\partial \vec{\xi}} \frac{\partial \vec{v\eta}}{\partial \vec{n}}$$

Chamemos essa relação, na mesma ordem

$$A B = C B \quad (3.20)$$

Por hipótese:

$$A^T E A = E$$

$$B^T E B = E$$

$$C^T E C = E$$

Usando essas relações, de (3.20) vem, sucessivamente

$$A = C D B^{-1}$$

$$A^T = (B^{-1})^T D^T C^T$$

$$A^T E A = E = (B^{-1})^T D^T C^T E A$$

$$D^T C^T E A = B^T E$$

$$D^T C^T E A B = B^T E B = E$$

e como $A B = C D$, finalmente

$$D^T C^T E C D = E$$

$$D^T E D = E$$

e, portanto, a matriz D é simplética, isto é, a transformação T é canônica e, conseqüentemente, isovolumétrica. Do fato de ser T canônica, resulta, pondo

$$X_i = u_i \xi_i, \quad Y_i = v_i \eta_i$$

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial X_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial Y_k}{\partial \eta_j} - \frac{\partial X_k}{\partial \eta_j} \frac{\partial Y_i}{\partial \xi_j} \right) = \delta_{ik} \quad (3.21)$$

Introduzindo as definições de X_i e Y_i :

$$\delta_{ik} u_i v_k + \xi_i \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} v_k + \eta_k \frac{\partial v_k}{\partial \eta_i} u_i + \xi_i \eta_k \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial v_k}{\partial \eta_j} - \frac{\partial u_k}{\partial \eta_j} \frac{\partial v_i}{\partial \xi_j} \right) = \delta_{ik} \quad (3.22)$$

Definamos, agora

$$\omega_m = \xi_m \eta_m \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

e lembremos que

$$u_k = u_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$$

$$v_k = v_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$$

Logo

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial v_k}{\partial \eta_j} - \frac{\partial u_i}{\partial \eta_j} \frac{\partial v_k}{\partial \xi_j} = \xi_j \eta_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial \omega_j} \frac{\partial v_k}{\partial \omega_j} - \frac{\partial u_i}{\partial \omega_j} \frac{\partial v_k}{\partial \omega_j} \right) = 0$$

e a relação (3.21) se reduz a

$$\delta_{ik} v_k u_i + \xi_i \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} v_k + \eta_k \frac{\partial v_k}{\partial \eta_i} u_i = \delta_{ik} \quad (3.23)$$

Para $i = k$, obtemos

$$u_k v_k + \frac{\partial u_k}{\partial \omega_k} v_k \omega_k + \frac{\partial v_k}{\partial \omega_k} u_k \omega_k = 1 \quad \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega_k} \{ u_k v_k \omega_k \} = 1 \quad \dots$$

$$u_k v_k = 1 + F_k(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}, \omega_{k+1}, \dots, \omega_n) / \omega_k \quad (3.24)$$

onde F_k é uma função arbitrária independente de ω_k . Para $i \neq k$, a relação (3.23) fornece

$$v_k \frac{\partial u_i}{\partial \omega_k} + u_i \frac{\partial v_k}{\partial \omega_i} = 0, \quad i \neq k,$$

o que conduz a $F_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Logo

$$u_k v_k = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.25)$$

As relações (3.25) explicam o fato do ponto fixo em questão (todos os λ reais) ser chamado hiperbólico. De (3.14) resulta, ainda

$$\xi'_k \eta'_k = \xi_k \eta_k \quad (3.26)$$

isto é, os produtos $\xi_k \eta_k$ são invariantes com T . Por outro lado, existirão n séries de potências

$$\alpha_k = \alpha_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$$

tal que

$$u_k = \pm e^{\alpha_k}$$

$$v_k = \pm e^{-\alpha_k}$$

e, portanto, a forma T pode ser escrita

$$\begin{aligned}\xi'_k &= \pm \xi_k e^{a_k} \\ \eta_k &= \pm \eta_k e^{-a_k}\end{aligned}\tag{3.27}$$

Admitamos, agora, que os λ_k , μ_k sejam complexos. Ainda valerá

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n = 1$$

e, portanto, a todo

$$\lambda_k = e^{i\alpha_k}\tag{3.28}$$

corresponderá

$$\lambda_k = e^{-i\alpha_k}$$

com

$$0 < \alpha_k < 2\pi$$

Admitiremos, ainda, que não existe nenhum inteiro p tal que

$$\lambda_k^p = 1, \quad k = 1, 2, \dots, n\tag{3.29}$$

Suponhamos, novamente, a transformação original correspondente a S .

Por um processo análogo ao caso hiperbólico poderemos, agora, reduzir S à forma normal

$$\begin{aligned}T: \quad \xi'_k &= e^{i\Omega_k} \xi_k \\ \eta'_k &= e^{-i\Omega_k} \eta_k\end{aligned}\tag{3.30}$$

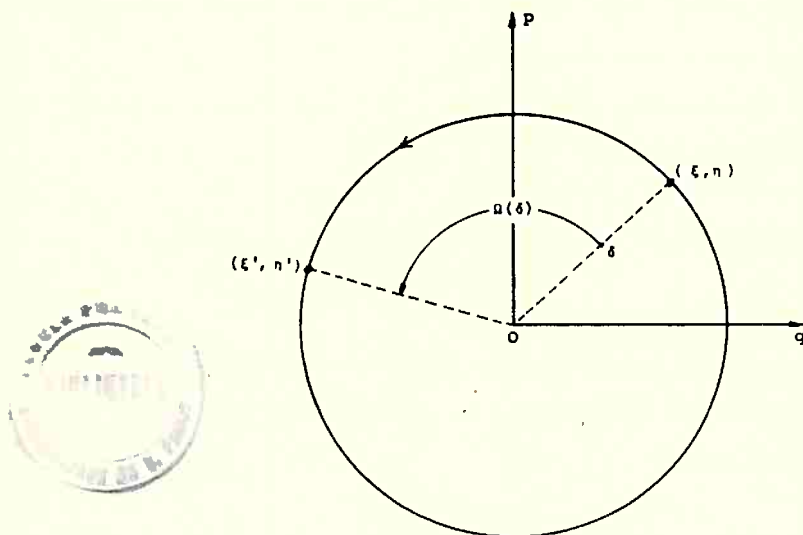
por meio de uma transformação U (que é uma série de potências) tal que $U T = S U$. As quantidades Ω_k ($k = 1, 2, \dots, n$) são séries de potências em $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ($\omega_k = \xi_k \eta_k$). Definindo, agora

$$\begin{aligned}\xi_k &= p_k + i q_k \\ \eta_k &= p_k - i q_k\end{aligned}\quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

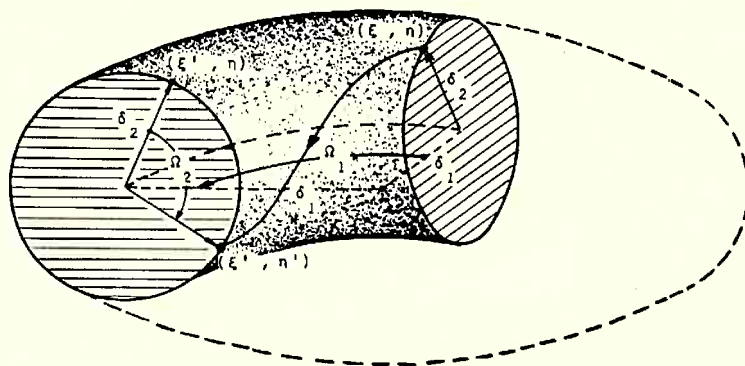
a transformação (3.30) torna-se

$$\begin{aligned}T^*: \quad p'_k &= p_k \cos \Omega_k - q_k \sin \Omega_k \\ q'_k &= p_k \sin \Omega_k + q_k \cos \Omega_k\end{aligned}$$

onde os Ω_k são séries de potências em $(p_k^2 + q_k^2)$. Se o processo convergir, a transformação S é reduzida a uma rotação T^* no espaço de $2n$ variáveis (p, q) , e as quantidades $q_k^2 + p_k^2$ são invariantes. Os ângulos de rotação dependem desses invariantes. Para $n=1$, é evidente que circunferências de raio $\delta = (p^2 + q^2)^{1/2}$ são transformadas em si mesmas por rotação de um ângulo Ω cuja amplitude depende de δ . Para $n = 2, 3, \dots$ é evidente que toros de raios $\delta_k = (p_k^2 + q_k^2)^{1/2}$ são transformados em si mesmos por rotações de ângulos Ω_k cujas amplitudes dependem dos δ_k .



Transformação isovolumétrica na forma normal
1 grau de liberdade



Transformação isovolumétrica na forma normal
2 graus de liberdade

No caso hiperbólico, por meio da transformação

$$\xi_k = p_k + q_k$$

$$\eta_k = p_k - q_k$$

obtemos

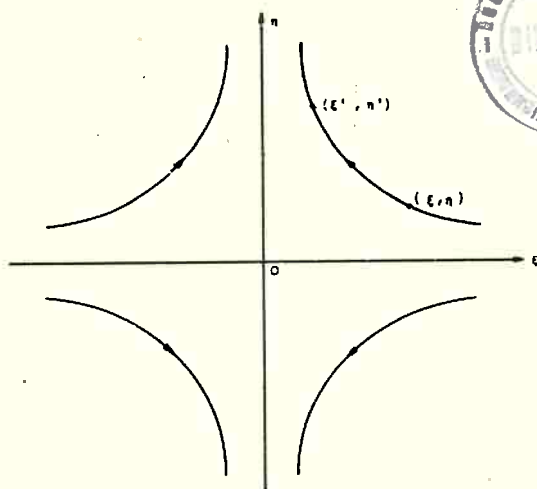
$$p'_k = p_k \cosh \alpha_k + q_k \sinh \alpha_k$$

$$q'_k = p_k \sinh \alpha_k + q_k \cosh \alpha_k$$

onde as quantidades $p_k^2 - q_k^2$ são invariantes e os α_k são polinômios nesses invariantes. Para $n = 1$, obtemos quatro ramos hiperbólicos que se transformam em si mesmos.

Vejamos a existência de pontos fixos nas vizinhanças da origem que é suposta ponto fixo em T .

a) Caso hiperbólico



$$T \quad \begin{cases} \xi'_k = \pm e^{\alpha_k} \xi_k \\ \eta'_k = \pm e^{-\alpha_k} \eta_k \end{cases}$$

Evidentemente, não existe nenhum ponto fixo a não ser a origem. O ponto fixo (origem) corresponde, pois, a uma solução periódica singular.

b) Caso elíptico

$$T \quad \begin{cases} \xi'_k = \pm e^{i\Omega_k} \xi_k \\ \eta'_k = \pm e^{-i\Omega_k} \eta_k \end{cases}$$

No caso de $n = 1$, como admitimos $\lambda^p \neq 1$, qualquer p inteiro, e sendo $\lambda = e^{i\alpha}$, então, $\alpha/2\pi$ é irracional. Ainda, sendo Ω uma função contínua de $\delta = \xi^2 + \eta^2$, então, existem valores de δ tais que

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{p}{q} = \text{racional}$$

e, portanto, a transformação $T^q = T(T^{q-1})$ transformará um ponto (ξ, η) em $(\xi', \eta') \equiv (\xi, \eta)$. Existem, pois, circunferências de pontos fixos em toda vizinhança da origem. A origem, ponto fixo, corresponde, pois, a uma solução periódica ordinária. Para $n = 2, 3, \dots$ a situação se complica ligeiramente. Com efeito, para que uma transformação T^q leve um ponto em si mesmo, deveremos ter uma combinação $p_1 \Omega_1 + p_2 \Omega_2 + \dots + p_n \Omega_n$, que seja comensurável com 2π para alguns p_i inteiros não nulos. Somente neste caso podemos afirmar a existência de pontos fixos. Este, entretanto, não é o caso geral. Resulta, assim, que, em geral, a transformação T^* não tem nenhum outro ponto fixo a não ser a origem.

Verificamos, também, que a forma normal $(\xi'_k = \xi_k u_k, \eta'_k = \eta_k v_k)$ somente pode ser atingida por uma série de potências da forma indicada se for satisfeita toda relação do tipo (3.18) o que, é fácil verificar, é equivalente a se ter

$$|\lambda_k|, |\mu_k| > 1, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

ou

$$|\lambda_k|, |\mu_k| < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

o que, para um sistema Hamiltoniano é impossível, pois, $\mu_k = \lambda_k^{-1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Chega-se, então, à conclusão que a forma normal não pode ser atingida. Finalmente, citemos dois importantes teoremas de pontos fixos para certos tipos de transformações.

A prova do "Último Teorema Geométrico" de Poincaré, fornecida por Birkhoff (1926), corresponde ao seguinte enunciado:

"Seja A um anel limitado por duas circunferências concêntricas, de raios a e b , tais que $0 < a < b$. Seja T uma transformação que conserva a área (isovolumétrica) de A em si mesmo. Suponhamos T e T^{-1} contínuas. Se T avançar os pontos das circunferências in

terior e exterior em sentidos opostos, então existem, pelo menos, dois pontos P e P' de A que são invariantes em relação a T , isto é, pontos fixos de T " (Poincaré afirmava a existência de, pelo menos, um ponto fixo).

Uma das aplicações mais famosas deste teorema é ao problema da bola de bilhar (solução periódica do movimento de um ponto material refletido elásticamente dentro de uma região convexa de contorno regular e tangente continuamente girante).

Outra generalização deve-se a Sternberg (1957), o qual prova um teorema mais geral eliminando a propriedade isovolumétrica da transformação T . O teorema de Poincaré-Birkhoff decorre como caso particular. Entretanto, por serem os escoamentos em dinâmica sempre isovolumétricos, pouco interessa aqui esta generalização.

De grande interesse é citar o teorema de pontos fixos de Birkhoff, mas para isso faz-se necessária uma introdução. Consideremos, novamente, a origem como ponto fixo elíptico de uma transformação isovolumétrica S . Conforme visto a matriz jacobiana J de tal transformação é simplética, isto é,

$$J^T E J = E$$

com

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Se, em particular, considerarmos a transformação

$$\begin{aligned} x_k &= \phi_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \xi_k + \bar{\phi}_k \\ y_k &= \psi_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \eta_k + \bar{\psi}_k \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.31)$$

as derivadas $\frac{\partial x_k}{\partial \xi_k}$ e $\frac{\partial y_k}{\partial \eta_k}$ são iguais a 1 na origem $\vec{\xi} = \vec{\eta} = \vec{0}$ e,

portanto, existe uma função $W(\vec{y}, \vec{\xi})$ tal que

$$x_k = \frac{\partial W}{\partial y_k}, \quad \eta_k = \frac{\partial W}{\partial \xi_k} \quad (3.32)$$

Logo, W é analítica nas vizinhanças de $\vec{y} = \vec{0}$ e $\vec{\xi} = \vec{0}$ e a série

$$W = \sum y_k \xi_k + \dots \quad (3.33)$$

é convergente naquelas vizinhanças. A função W representará toda transformação do tipo U . Consideremos a transformação isovolumétrica U gerada pela série W não necessariamente convergente. Façamos um truncamento de W , eliminando termos de ordem superior a $2m + 2$ e seja W^* esta série truncada, isto é,

$$W^* = \sum y_k \xi_k + \sum_{\sum (p_1 + q_1) = 2m+2} A_{p,q} y_1^{p_1} \dots y_n^{p_n} \xi_1^{q_1} \dots \xi_n^{q_n} \quad (3.34)$$

e concluímos, de acordo com (3.32)

$$x_k = \frac{\partial W^*}{\partial y_k} = X_k(\vec{y}, \vec{\xi}) = \xi_k + \bar{X}_k(\vec{y}, \vec{\xi}) \quad (3.35)$$

$$\eta_k = \frac{\partial W^*}{\partial \xi_k} = N_k(\vec{y}, \vec{\xi}) = y_k + \bar{N}_k(\vec{y}, \vec{\xi})$$

Por hipótese $\frac{\partial W^*}{\partial \xi_k} \frac{\partial W^*}{\partial y_k} = 1$ na origem $\vec{\xi} = \vec{y} = \vec{0}$, e, portanto, é possível, numa vizinhança desta, escrever

$$y_k = \psi_k^*(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \eta_k + \bar{\psi}_k^*(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \quad (3.36)'$$

e usando a primeira das equações (3.35),

$$x_k = \phi_k^*(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \xi_k + \bar{\phi}_k^*(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \quad (3.36)''$$

Evidentemente as (3.36) são séries convergentes (pois (3.35) são relações algébricas), isovolumétricas e transformam S numa forma normal aproximada T^* , isto é, numa forma que coincide com T até os termos de ordem $2m + 1$. É fácil verificar que os coeficientes dos termos de ordem superior a $2m + 1$ crescem rapidamente com m e assim a passagem ao limite não é permitida. Para obter T^* o único requisito será $\lambda_j^s \neq 1$ para $j = 1, 2, \dots, n$ e $s = 1, 2, \dots, 2m + 2$, condição menos estridente daquela antes necessária e que na realidade pode ser verificada. A transformação T^* tomará a forma (tomando $m = 2$):

$$\xi'_k = e^{i\Omega_k} \xi_k + \phi_k^4(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \quad (3.37)$$

$$\eta'_k = e^{-i\Omega_k} \eta_k + \psi_k^4(\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

onde ϕ_k^4 e ψ_k^4 são termos de ordem igual ou superior à quarta. Por isto, será suficiente tomarmos

$$\Omega_k = \alpha_k + \sum_{j=1}^n \beta_k^j (\xi_j \eta_j) \quad (3.38)$$

É claro que se deve supor os β_k^j não todos nulos, pois, do contrário, a aproximação deveria ser levada a termos de ordem superior. Se até qualquer ordem todos os coeficientes se anularem, as presentes considerações não são válidas (Tal situação relaciona-se com os chamados casos de ressonância aguda). Finalmente, notamos que, como é fácil verificar, os coeficientes α_k e β_k^j são reais e além disto $\eta_k = \bar{\xi}_k$ (o conjugado de ξ_k). Resulta daí que $\eta_k' = \bar{\xi}_k'$. Bastará, pois, que nos ocupemos da primeira das (3.37) escrevendo:

$$\xi_k' = e^{i\Omega_k} \xi_k + \phi_k^4(\vec{\xi}, \bar{\vec{\xi}}) \quad (3.39)$$

$$\Omega_k = \alpha_k + \sum_{j=1}^n \beta_k^j \xi_j \bar{\xi}_j$$

ou de forma mais compacta

$$\vec{\xi}' = e^{i\Omega} \vec{\xi} + \phi^4(\vec{\xi}, \bar{\vec{\xi}}) \quad (3.40)$$

$$e^{i\Omega} = \text{diag} (e^{i\Omega_1}, \dots, e^{i\Omega_n})$$

sendo $\vec{\xi}$ um n-vetor de componentes complexas e $\bar{\vec{\xi}}$ seu conjugado. Por outro lado

$$e^{i\Omega_k} = e^{i\alpha_k} e^{i\vec{\xi}^T \beta_k \bar{\vec{\xi}}} = \lambda_k e^{i\vec{\xi}^T \beta_k \bar{\vec{\xi}}} = \lambda_k e^{i\delta_k}$$

onde $\beta_k = \text{diag} (\beta_k^1, \dots, \beta_k^n)$; ainda desenvolvendo o exponencial,

$$e^{i\Omega_k} = \lambda_k (1 + i \delta_k) ,$$

os termos de ordem superior sendo assimilados em ϕ^4 . Logo

$$\vec{\xi}' = \Lambda \vec{\xi} + \phi^4 \quad (3.41)$$

onde

$$\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_1 (1 + i \delta_1), \dots, \lambda_n (1 + i \delta_n) \}$$

Se agora considerarmos o caso $n = 1$, aplica-se o teorema de Birkhoff para uma transformação do tipo (3.41). Esquematizemos tal teorema, nesse caso. Para $n = 1$, a equação (3.41) torna-se

$$\xi' = \lambda (1 + i \delta) + \phi^4 \quad (3.42)$$

onde

$$\delta = \beta \xi \bar{\xi} = \beta |\xi|^2$$

Neste caso, por conveniente normalização, pode-se escolher ξ de tal forma que $\beta = 1$, isto é

$$\delta = |\xi|^2 = r^2$$

ϕ^4 será uma série convergente de potências em ξ e $\bar{\xi}$, em módulo limitada por $K|\xi|^4$, com $K > 0$ finito e $|\xi| = r < \delta' \leq \delta$.

Então, teremos

$$r'^2 = r^2 + \bar{f}(\xi, \bar{\xi}) r^5 \quad (3.43)$$

com $\bar{f}$ real limitada para $r < \delta'$. Em resumo

$$\begin{aligned} \xi' &= \lambda (1 + i r^2) \xi + g(\xi, \bar{\xi}) r^4 \\ r' &= r + f(\xi, \bar{\xi}) r^4 \end{aligned} \quad (3.44)$$

com f e g em módulo limitadas para $r = |\xi| < \delta'$.

Consideremos a transformação

$$S : \xi' = \lambda (1 + i r^2) \xi + g r^4$$

tal que

$$S \xi = \xi', \quad S \xi' = S^2 \xi = \xi'', \quad \dots, \quad S^p \xi = \xi^{(p)}$$

para todo p inteiro, positivo ou negativo (existe por hipótese S^{-1}).

Vale o seguinte Lema:

Lema: Dada uma transformação S tal que

$$r' = r + f r^4, \quad |f| < K \text{ em } r < \delta$$

seja k um inteiro positivo satisfazendo

$$k r^3 < \frac{1}{12K}, \quad 0 < r < \frac{2}{3} \delta, \quad \delta > 0.$$

Então, para $k = 1, 2, \dots, p$

$$(a) \quad \frac{r}{2} < r^{(k)} < \delta$$

$$(b) \quad r^{(k)} = r + k f^{(k)} r^4, \quad f^{(1)} = f;$$

sendo $f^{(k)}$ uma função de módulo limitado e menor que $6K$, $K > 0$ finito. A demonstração faz-se imediatamente por indução (Ver, por exemplo: Siegel, 1956). Nestas condições, pondo $\bar{\xi} = r e^{i\theta}$, pode-se mostrar que, para $|\xi| < \delta' < \delta$, existe um inteiro p tal que todos os pontos de uma curva regular (de Jordan) de equação polar $r = r(\theta)$ se

transformam por S^P numa curva C' de equação polar $r' = r'(\theta)$, fechada e de Jordan. O interior de C é transformado no interior de C' . Como a transformação é isovolumétrica, C não pode estar em C' e C' não pode estar em C . Logo, C e C' têm, pelo menos, dois pontos em comum, que são pontos fixos de S^P .

Vê-se aqui, as dificuldades que se encontrariam para generalizar tal resultado para $n \geq 2$. Isto, entretanto, não elimina a possibilidade de se aplicar tal resultado a sistemas com um número de graus de liberdade maior que um. Veremos como isto é feito, em capítulo posterior.



4. Regiões de movimento. Estabilidade

O comportamento assintótico de soluções de sistemas Hamiltonianos consiste, em parte, na caracterização das possíveis regiões que contenham as órbitas soluções, correspondentes a um certo conjunto de condições iniciais. Evidentemente este é, também, parte do problema da estabilidade de tais soluções. Os tipos de soluções que mais nos interessam são as periódicas e as quasi-periódicas. Adotaremos a seguinte

Definição: Uma função $z(t) = \phi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ é dita quasi periódica se, e somente se:

- a) ϕ tiver período 2π em cada θ_k ($k = 1, 2, \dots, n$);
- b) ϕ possuir certas propriedades de regularidade
(ϵC^P , ϵC^∞ , analítica)
- c) $\theta_k = \omega_k t$ ($k = 1, 2, \dots, n$), ω_k constantes
- d) $\sum_{k=1}^n p_k \omega_k = 0$, com $p_1, p_2, \dots, p_n$ inteiros, se, e somente se $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$.

Seja $H = H(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n)$ analítica num certo domínio D do espaço de fase $(\vec{x}, \vec{y})$.

Se o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_k &= - \frac{\partial H}{\partial y_k} \\ \dot{y}_k &= \frac{\partial H}{\partial x_k}\end{aligned}\quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4.1)$$

fôr integrável no sentido já definido, existirá uma transformação completamente canônica de D para um domínio Δ das novas variáveis $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ tal que a imagem K de H em Δ torna-se

$$K(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) .$$

Tal transformação pode ser gerada por uma função

$$W(\xi_1, \dots, \xi_n; y_1, y_2, \dots, y_n)$$

analítica em $D \times \Delta$ tal que

$$\begin{aligned}\eta_k &= \frac{\partial W}{\partial \xi_k} \\ x_k &= \frac{\partial W}{\partial y_k}\end{aligned}\quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4.2)$$

Logo, sendo

$$\xi_k = \text{const.} = \xi_k^0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) , \quad \vec{\xi}^0 \in \Delta$$

$$\eta_k = \left. \frac{\partial W}{\partial \xi_k} \right|_{\vec{\xi}^0} t + \eta_k^0 = \omega_k(\xi^0) t + \eta_k^0 , \quad \vec{\eta}^0 \in \Delta$$

em geral a condição (d) será satisfeita.

Resultará que

$$\begin{aligned}x_k &= x_k(\vec{\xi}^0, \vec{\eta}) \\ y_k &= y_k(\vec{\xi}^0, \vec{\eta})\end{aligned}\quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.3)$$

Bastará, pois, que cada x_k, y_k seja função periódica de mesmo período em $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$. Lembrando (4.2)

$$\eta_k = \frac{\partial W}{\partial \xi_k} = g_k(\vec{\xi}, \vec{y})$$

$$x_k = \frac{\partial W}{\partial y_k} = h_k(\vec{\xi}, \vec{y})$$

Suponhamos $W(\vec{\xi}, \vec{y})$ uma função periódica de período 2π em $y_1, y_2, \dots, y_n$. Resultará, então, por ser analítica:

$$W = \sum_{\vec{k}} \{ A_{\vec{k}}(\vec{\xi}) \cos(k_1 y_1 + \dots + k_n y_n) + B_{\vec{k}}(\vec{\xi}) \sin(k_1 y_1 + \dots + k_n y_n) \}$$

e, portanto

$$\eta_j = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\partial A_{\vec{k}}}{\partial \xi_j} \cos \vec{k} \cdot \vec{y} + \frac{\partial B_{\vec{k}}}{\partial \xi_j} \sin \vec{k} \cdot \vec{y} \right)$$

$$\frac{\partial \eta_j}{\partial y_m} = \sum_{\vec{k}} \left(-k_m \frac{\partial A_{\vec{k}}}{\partial \xi_j} \sin \vec{k} \cdot \vec{y} + k_m \frac{\partial B_{\vec{k}}}{\partial \xi_j} \cos \vec{k} \cdot \vec{y} \right)$$

Considerando as condições iniciais $x_k^0(0) = x_k^0$ e $y_k^0(0) = y_k^0$ ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$\left. \frac{\partial \eta_j}{\partial y_m} \right|_0 = \sum_{\vec{k}} \left(-k_m \left. \frac{\partial A_{\vec{k}}}{\partial \xi_j} \right|_0 \sin \vec{k} \cdot \vec{y}^0 + k_m \left. \frac{\partial B_{\vec{k}}}{\partial \xi_j} \right|_0 \cos \vec{k} \cdot \vec{y}^0 \right) = \delta_{jm}$$

Logo, a matriz jacobiana $\left\{ \frac{\partial g_k}{\partial y_j} \right\}$ é não singular na origem $(\vec{x}^0, \vec{y}^0)$

e numa vizinhança suficientemente restrita existirá sua inversa, isto é, será possível obter nessa vizinhança

$$y_m = y_m(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

Evidentemente

$$y_m(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = y_m(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1 + 2\pi, \eta_2 + 2\pi, \dots, \eta_n + 2\pi)$$

e, portanto, as condições de quasi periodicidade para x_k, y_k serão todas satisfeitas. Logo, para que o sistema integrável tenha soluções quasi-periódicas basta que ele possa ser reduzido à forma (4.3) por meio de uma função geradora W periódica de período 2π em $y_1, y_2, \dots, y_n$. Conforme visto, isto é possível desde que para H sejam satisfeitas as condições de Lindsted-Poincaré. Esta condição, entretanto, não parece ser necessária. Com efeito, se existir uma função W , satisfazendo a (4.3), ela será solução da equação

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial y_n}; y_1, y_2, \dots, y_n\right) = \alpha(\xi_1, \dots, \xi_n) \quad (4.4)$$

que é de primeira ordem nas derivadas parciais $\frac{\partial W}{\partial y_k}$ ($k=1, 2, \dots, n$). Deve-se, pois, estudar as condições sob as quais essa equação tem soluções periódicas. Na realidade, é sempre possível escrever (4.4) na forma

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k(y_1, \dots, y_n) \left(\frac{\partial W}{\partial y_k} \right)^2 + V(y_1, y_2, \dots, y_n) = \alpha \quad (4.5)$$

reduzindo a energia cinética a seus eixos principais. A matriz jacobiana $\left\{ \frac{\partial W}{\partial y_k} \frac{\partial \xi_m}{\partial y_k} \right\}$ deverá ser não singular. É fácil ver que (4.5) terá, eventualmente, solução periódica de período 2π em $y_1, y_2, \dots, y_n$ se

- a) Os coeficientes a_k forem constantes ou periódicos de período 2π em $y_1, \dots, y_n$
- b) $V(\vec{y})$ fôr periódica de período 2π em $y_1, y_2, \dots, y_n$.

No caso, as trajetórias desenvolvem-se sobre um toro n -dimensional T_n parametrizado por η_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Para $n = 1$, a trajetória é uma circunferência de raio x^0 e a velocidade angular sobre a mesma é $\omega(x^0)$, constante. Variando as condições iniciais y_k^0 apenas mudamos as fases η_k e o movimento se dá sobre o mesmo toro. Variando as x_k^0 mudamos os raios do toro e as frequências do movimento. É evidente que a energia só depende de $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Variando as fases iniciais η_k^0 a energia é inalterada. Além disto, se as ω_k são linearmente independentes, as trajetórias cobrem densamente o toro correspondente. Se, por outro lado, houver uma dependência linear entre os ω_k o movimento é periódico e depois de um certo tempo a trajetória se fecha sobre si mesma.

Os movimentos quasi periódicos satisfazem duas propriedades importantes ao presente desenvolvimento.

1) A trajetória de um movimento quasi periódico é densa em toda parte sobre o toro. Isto é, dado um domínio D , o ponto $x(t), y(t)$ é tal que existe um $t = T$ finito para o qual $x(T), y(T) \in D$. Esta propriedade decorre do fato que, se α é um número irracional e D um arco da circunferência $|z| = 1$, então entre os pontos $e^{2\pi i n \alpha}$ ($n = 1, 2, \dots$) existem pontos de D .

2) A trajetória de um movimento quasi periódico é uniformemente distribuída, isto é, o intervalo de tempo $\{0, T\}$ que o ponto gasta em um domínio D é proporcional à área de D para T suficiente-

mente grande.

Para toda função $F(y_1, y_2, \dots, y_n)$, com $y_k = \omega_k t$, integrável (segundo Riemann) sobre o toro, a média no tempo é igual à média no espaço:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_n t) dt = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} F(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1, dy_2, \dots, dy_n$$

3) Existirão condições iniciais $\xi_1^0, \dots, \xi_n^0$ tais que para alguns inteiros p_k ($k = 1, 2, \dots, n$) não todos nulos, se verifica

$$\sum_{k=1}^n p_k \left. \frac{\partial K}{\partial \xi_k} \right|_0 = 0$$

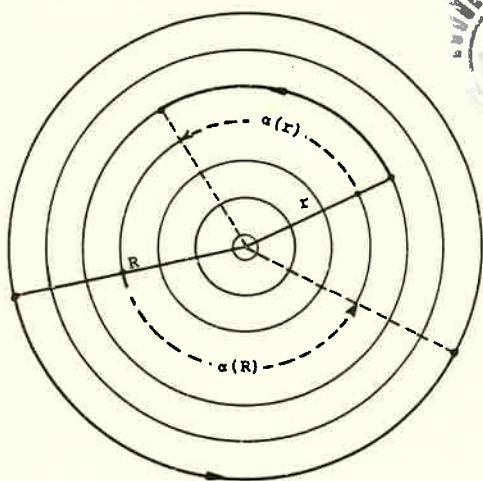
No caso, a solução é periódica. Entretanto, a transformação para a forma particular da Hamiltoniana $K(\xi)$ não poderá ser efetuada por meio de um processo análogo ao de Lindsted-Poincaré, pois, haverá denominadores nulos.

Apesar da questão de existência de soluções periódicas de sistemas conservativos estar fora das finalidades deste trabalho, admitida sua existência interessa-nos sobremaneira a questão da estabilidade. Como uma solução periódica associa-se a um ponto fixo de uma transformação canônica, o problema pode ser levado ao estudo da estabilidade de tais pontos fixos. Conforme vimos, se as séries de Birkhoff forem convergentes, nas vizinhanças de um ponto fixo elíptico existem circunferências invariantes (ou toros invariantes). Toda circunferência, de raio r e centro na origem (que é ponto fixo), vai em si mesma por meio de uma rotação

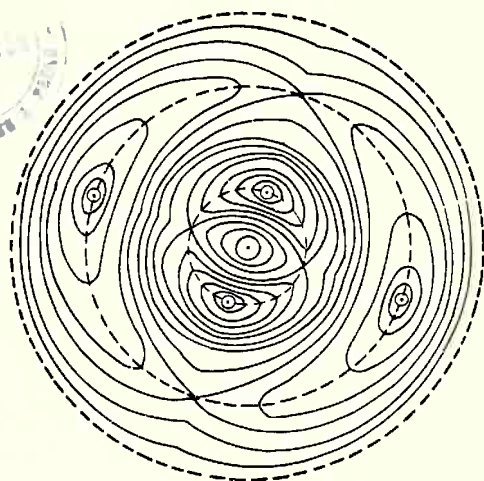
$$\alpha(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \dots$$

Tal ponto fixo é, pois, estável. A transformação para a forma normal era possível quando $\alpha \neq 2\pi \frac{m}{n}$, m e n inteiros, as séries podendo ainda ser divergentes. Vimos, também, que, por um processo convergente, a forma normal pode ser atingida até a aproximação que fôr desejada. Se desprezarmos o efeito dos restos destas séries (que podem ser tornados arbitrariamente pequenos), então, numa vizinhança de um ponto

fixo elíptico haverá circunferências invariantes. O ângulo $\alpha(r)$, pelo qual a circunferência de raio $r = \text{const.}$ é girada, depende de r . Portanto, haverá circunferências que giram de um ângulo racional com π . A consideração dos termos desprezados tem o seguinte efeito (como consequência de certos resultados de Kolmogorov, 1954): a maioria das circunferências invariantes para as quais $\alpha(r) \neq \frac{m}{n} \pi$, não é destruída, mas, simplesmente, deformada. O ponto fixo é, pois, contornado por curvas fechadas analíticas e invariantes, arbitrariamente pequenas e é, portanto, estável. Tais curvas preenchem um conjunto de medida não nula, tendo o ponto fixo 0 como ponto de acumulação. Elas não cobrem completamente uma vizinhança de 0. Entre as mesmas há zonas de instabilidade que resultam das circunferências com $\alpha(r)$ comensurável com π (Arnold, 1963). O que de fato acontece, é que, sujeitas às perturbações citadas, tais circunferências degeneram num número par finito de pontos fixos, metade dos quais são elípticos e metade hiperbólicos (Birkhoff, 1927).



Circunferências de pontos fixos
(forma normal)



Perturbação das circunferências
invariantes

Visto que a forma normal não pode ser atingida no caso geral, mas apenas uma aproximação desta, deve-se recorrer aos métodos de perturbação.

Em relação ao problema inicial, isto significa que mesmo sen

do a parte linear da transformação do tipo elíptico, a solução estacionária correspondente não é necessariamente estável. Infelizmente, estamos no caso de expoentes característicos imaginários puros e os resultados de Poincaré e Lyapunov sobre estabilidade assintótica são de pouco uso. No caso do número de graus de liberdade ser um ou dois, os toros invariantes dividem o espaço de fase e um ponto que se encontre no interior de duas superfícies invariantes não pode, nunca, atravessá-la: dêste fato decorre a estabilidade. Para graus de liberdade em número maior que dois, isso não mais é verdade e as regiões entre superfícies invariantes podem se estender até infinito: nada podemos garantir a respeito da estabilidade.

A respeito da estabilidade de sistemas dinâmicos integráveis, sujeitos a perturbações, o problema tem características semelhantes. Com efeito, dada $H(\vec{x}, \vec{y})$ analítica num certo domínio, suponhamos que essa função possa ser escrita

$$H(\vec{x}, \vec{y}) = H_0(\vec{x}) + \epsilon H_1(\vec{x}, \vec{y}, \epsilon)$$

onde ϵ é um parâmetro adimensional. Vamos supor $\epsilon < 1$.

As trajetórias soluções das equações geradas por H_0 ,

$$\dot{x}_k = -\frac{\partial H_0}{\partial y_k} = 0, \quad x_k = x_k^0 = \text{const.}$$

$$\dot{y}_k = \frac{\partial H_0}{\partial x_k} = \omega_k(x^0), \quad y_k = \omega_k(x^0)t + y_k^0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

representam, em geral, um movimento quasi-periódico sobre um toro n -dimensional parametrizado pelas n variáveis angulares y_k ($k=1,2,\dots,n$). O toro é definido pelos "raios" $x_k = x_k^0$ ($k=1,2,\dots,n$). A pergunta fundamental da teoria das perturbações é: quais as condições a que devem satisfazer H_0 e H_1 de modo que, para ϵ suficientemente pequeno, o toro invariante seja apenas deformado. Procuraremos responder a esta questão em capítulo posterior. Aqui vamos notar que se a resposta for afirmativa, satisfeitas certas condições para H_0 e H_1 , então a estabilidade das soluções quasi-periódicas iniciais será garantida para valores de ϵ suficientemente pequenos. Evidentemente, nesta classe de problemas enquadram-se aqueles do significado da lineari-

zação de equações diferenciais canônicas nas vizinhanças de uma solução estacionária (de equilíbrio ou periódica).



PERTURBAÇÕES DE SISTEMAS INTEGRÁVEIS

1. Movimento de um sistema integrável

Neste parágrafo vamos dar maior precisão às características das trajetórias soluções de um sistema integrável. Partamos dos resultados de Liouville. Dado o sistema Hamiltoniano

$$\begin{aligned} -\dot{x}_k &= \frac{\partial H}{\partial y_k} \\ \dot{y}_k &= \frac{\partial H}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.1)$$

admitamos $H = H(\vec{x}, \vec{y})$ analítica num certo domínio D do espaço de fase. Se forem conhecidas n integrais uniformes $F_1, F_2, \dots, F_n$ em involução, num domínio $D' \subset D$, então em D' o sistema é integrável por quadraturas. Ponhamos

$$F_i(\vec{x}, \vec{y}) = C_i = \text{constante} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2)$$

Em todos os casos conhecidos verifica-se que as variedades limitadas geradas pelas equações (1.2) são toros e sobre os mesmos o movimento é quasi-periódico. Pode-se mostrar que, em geral, isto é verdade para todo sistema de Liouville (Mais precisamente vale o seguinte teorema: " Seja o sistema Hamiltoniano (1.1), com n graus de liberdade, e sejam conhecidas n integrais primeiras uniformes $F_1, F_2, \dots, F_n$ em involução. Sejam as equações $F_i = C_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) gerando uma variedade compacta $M = M_C$ em cada ponto da qual os vetores $\text{grad } F_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) são linearmente independentes no espaço de fase de dimensão $2n$. Então, M é um toro de dimensão n e o ponto $(\vec{x}(t), \vec{y}(t))$, que é solução de (1.1), tem movimento quasi-periódico sobre o mesmo "; Arnold, 1963). Esse teorema justifica o fato

de considerarmos sistemas integráveis sempre gerados por uma Hamiltoniana $H = H(\vec{x})$, função apenas dos momentos. As frequências $\omega_k = \partial H_0 / \partial x_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) serão, em geral, incomensuráveis e, então, o movimento sobre o toro, parametrizado pelas variáveis angulares $y_1, y_2, \dots, y_n$ é ergódico, isto é, as trajetórias cobrem o toro densamente em toda região. Em outros termos, dado um ponto P^0 em toro, de coordenadas $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ e um $\epsilon > 0$ arbitrário, é possível obter, em correspondência, um $T(\epsilon) > 0$ tal que, para $0 < \bar{t} \leq T(\epsilon)$ sejam verificadas as relações $|y_k(\bar{t}) - y_k^0| < \epsilon$, para $k = 1, 2, \dots, n$.

2. Perturbações de um sistema integrável não degenerado

Consideremos o sistema gerado pela Hamiltoniana

$$H = H_0(\vec{x}) + \mu H_1(\vec{x}, \vec{y}; \mu) \quad (2.1)$$

com $0 < \mu \leq 1$ e H_1 periódica de período 2π em relação a $y_1, y_2, \dots, y_n$. Procuramos verificar em que condições os movimentos do sistema perturbado descrito por (2.1) se dão sobre toros próximos dos toros $x_k = x_k^0 = \text{const.}$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Analizemos, inicialmente, com melhores detalhes, o processo clássico de perturbação. Ele consistia em reduzir, por transformações canônicas, H às formas sucessivas

$$H = K_0(\vec{x}) + \mu^2 K_2(\vec{x}, \vec{y}; \mu)$$

$$H = L_0(\vec{x}') + \mu^3 L_3(\vec{x}', \vec{y}'; \mu)$$

.....

$$H = M_0(\vec{x}^{(n)}) + \mu^{n+2} M_{n+2}(\vec{x}^{(n)}, \vec{y}^{(n)}; \mu)$$

Tal processo, conforme visto, leva à equação do tipo

$$\sum_{k=1}^n \omega_k \frac{\partial S}{\partial y_k} = F(\vec{x}, \vec{y}) = F(\vec{x}, \vec{y} + 2\vec{\pi})$$

cujas soluções contêm, senão zero, pequenos denominadores e as séries que se obtêm são divergentes, em geral, mesmo que os ω_k sejam incomensuráveis. Notemos que, escolhidos ao acaso n números ω_k a pro-

babilidade de serem comensuráveis é nula. Um importante resultado da aproximação diofantina (Koksma, 1936) diz que

" Quase toda n-pla $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ de números reais ω_k satisfaz à desigualdade

$$|k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 + \dots + k_n \omega_n| \geq K \left\{ \sum_{i=1}^n |k_i| \right\}^{-p} \quad (2.2)$$

para $p \geq n+1$ e para todos os inteiros $k_i \neq 0$ e para um conveniente $K(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) > 0$.

Veremos mais tarde que, na realidade, podemos enfraquecer a desigualdade e obter resultados ainda de grande utilidade à teoria das perturbações. Agora interessa observar que se quase todas n-pla $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ satisfaz a (2.2), então para quase todos os valores de $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ os denominadores da teoria clássica de perturbação serão não nulos e, mais ainda, em valor absoluto, limitados inferiormente por um número positivo. Isto, entretanto, não é suficiente para garantir a convergência das séries obtidas. E de qualquer maneira, ao variar x_k^0 continuamente, os ω_k variarão continuamente, podendo atingir valores de ressonância e as séries obtidas serão funções descontínuas dos x_k^0 .

Teorema de Kolmogorov (1954)

Suponhamos $H(\vec{x}, \vec{y})$ analítica num domínio $D \{ \vec{x} \in G; |\text{Im } \vec{y}| \leq \rho \}$ e periódica de período 2π nos y_k . Seja $H = H_0(\vec{x}) + H_1(\vec{x}, \vec{y})$, onde, em D , a matriz jacobiana $\left\{ \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_i \partial x_j} \right\}$ é não singular (sistema não degenerado). Então, para todo $K > 0$, existe um $M(K, \rho, G, H_0) > 0$ tal que, se em D tivermos $|H_1| \leq M$, o movimento definido pelas equações

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= - \frac{\partial H}{\partial y_k} \\ \dot{y}_k &= + \frac{\partial H}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

tem as seguintes propriedades:

- 1) Existe uma decomposição $\text{Re}(D) = D_1 + D_2$ onde D_1 é invari

ante e $\text{med } D_2 \leq K \text{ med } D$.

2) D_1 é composto de toros invariantes analíticos n-dimensionais T_ω definidos paramêtricamente pelas equações

$$\vec{x} = \vec{x}_\omega + \vec{f}_\omega(\vec{\eta})$$

$$\vec{y} = \vec{\eta} + \vec{g}_\omega(\vec{\eta})$$

onde $\vec{f}_\omega$ e $\vec{g}_\omega$ são funções analíticas de período 2π em $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ e ω é um parâmetro que especifica o toro T_ω .

3) Os toros T_ω diferem pouco dos toros $\vec{x} = \vec{x}_\omega$, isto é, $|\vec{f}_\omega| < \varepsilon$ e $|\vec{g}_\omega| < \varepsilon$ com $\varepsilon > 0$.

4) O movimento definido por (2.3) sobre o toro T_ω é quasi-periódico com n frequências $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$:

$$\dot{\eta}_k = \omega_k = \left. \frac{\partial H_0}{\partial x_k} \right|_{\vec{x} = \vec{x}_\omega} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

satisfazendo à desigualdade

$$\left| \sum_{k=1}^n m_k \omega_k \right| \geq K \left\{ \sum_{k=1}^n |m_k| \right\}^{-(n+1)}$$

para qualquer conjunto de inteiros m_k não todos nulos.

Kolmogorov (1954) apenas forneceu uma prova esquemática de tal teorema. A demonstração completa foi dada por Arnold (1963) e inclui a demonstração de numerosos lemas preparatórios e um alto grau de complexidade. Em palavras breves, o teorema de Kolmogorov afirma que,

se H é tal que $\det \left\{ \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_i \partial x_j} \right\} \neq 0$, então, sob pequenas perturbações analíticas a maioria dos toros invariantes definidos por H_0 não é destruída, mas apenas ligeiramente deformada. A necessidade da condição sobre o citado determinante é crucial, pois, infelizmente, a maioria dos problemas é degenerada, isto é, o sistema gerado por H_0 é descrito por um número de frequências inferior àquele necessário para o problema perturbado. Moser (1962) procurando a demonstração de um teorema equivalente ao de Kolmogorov, para sistemas a dois graus de liberdade, conseguiu relaxar duas condições:

a) A condição $\det \left\{ \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_i \partial x_j} \right\} \neq 0$ pode ser substituída por

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_i \partial x_j} & \frac{\partial H_0}{\partial x_i} \\ \frac{\partial H_0}{\partial x_j} & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

b) Basta que H seja diferenciável até a 333-ésima ordem.

Ainda em 1963, Arnold conseguiu generalizar o teorema de Kolmogorov para casos degenerados, suficientemente gerais para tornar possível sua aplicabilidade a problemas concretos. Limitamo-nos a enunciar o:

Teorema de Arnold

Consideremos uma função H , um domínio G_0 e números positivos ρ, R, C . Suponhamos satisfeitas as condições:

a) A função $H(\vec{x}, \vec{y})$ (onde $\vec{x} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$, $\vec{y} = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$, $\vec{x}_0$ e $\vec{y}_0$ são n_0 -dimensionais e $\vec{x}_1, \vec{y}_1$ são n_1 -dimensionais com $n_0 + n_1 = n$; $\vec{y}_0$ são variáveis angulares e H é periódica de período 2π nestas variáveis) é analítica no domínio $F\{G_0, |\operatorname{Im} y_0| \leq \rho, |\vec{x}_1, \vec{y}_1| \leq R\}$ e depende de um parâmetro ϵ , $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.

b) H pode ser posta na forma

$$H = H_0(\vec{x}_0) + \epsilon H_1(\vec{x}, \vec{y}) + \epsilon^2 H_2(\vec{x}, \vec{y}, \epsilon)$$

onde

$$H_1 = \bar{H}_1(\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{y}_1) + \bar{H}_1(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{x}_1, \vec{y}_1),$$

$$\oint \bar{H}_1 d\vec{y}_0 = 0$$

com

$$\bar{H}_1 = \bar{H}_1(\vec{x}_0, \tau) + \bar{H}_1(\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$$

e

$$\bar{H}_1(\vec{x}_0, \tau) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i \tau_i + \sum_{i,j=1}^{n_1} \lambda_{ij} \tau_i \tau_j + \sum_{i,j,k=1}^{n_1} \lambda_{ijk} \tau_i \tau_j \tau_k$$

onde $\lambda_0, \lambda_i, \lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ e λ_{ijk} são funções de $\vec{x}_0$ e

$$2\tau_i = x_{n_0+1}^2 + y_{n_0+1}^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

c) No domínio F são verificadas, para um certo $C \geq 1$, as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} |\mu^2 H_2| &\leq \mu^2 C \\ |\tilde{H}_1| &\leq C, \quad |H_1| < C, \quad |\bar{H}_1| \leq C \\ |\tilde{H}_1| &\leq C |\vec{x}_1, \vec{y}_1|^7 \end{aligned}$$

d) No domínio G_0

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 H_0}{\partial \vec{x}_0^2} \right\} \neq 0$$

$$\det \{ \lambda_{ij}(\vec{x}_0) \} \neq 0$$

Sob as hipóteses anteriores, para todo $K > 0$ é possível encontrar $E(K; H_0, \bar{H}_1, G_0; \rho, R, C; \epsilon_0) > 0$ tal que, para $0 < E < E_0$ e $0 < \epsilon < E^4$, se verifica o seguinte:

1) O domínio $\text{Re}(F_E)$:

$$\vec{x}_0 \in \text{Re}(G_0), \quad |\text{Im} \vec{y}_0| = 0, \quad 0 < \tau_1 < E$$

constitue-se de conjuntos F_E e f_E , um dos quais, F_E , é invariante em relação às equações Hamiltonianas geradas por H , e o outro, f_E , é pequeno no sentido

$$\text{med } f_E < K \text{ med } F_E$$

2) F_E é constituído de toros analíticos invariantes n -dimensionais T_ω , dados parametricamente por

$$x_0 = x_{0\omega} + f_{0\omega}(Q), \quad y_0 = Q_0 + g_{0\omega}(Q)$$

$$x_1 = \{ 2(\tau_\omega + f_{1\omega}(Q)) \}^{1/2} \cos \{ Q_1 + g_{1\omega}(Q) \}$$

$$y_1 = \{ 2(\tau_\omega + f_{1\omega}(Q)) \}^{1/2} \sin \{ Q_1 + g_{1\omega}(Q) \}$$

onde $Q = (Q_0, Q_1)$ são parâmetros angulares e $x_{0\omega}$ e τ_ω constantes que dependem do toro particular ω .

3) Os toros invariantes T_ω diferem pouco dos toros

$$x_0 = x_{0\omega} = \text{const.} \quad , \quad \tau = \tau_\omega = \text{const.} :$$

$$|f_{1\omega}(Q)| < \alpha E$$

$$|g_{1\omega}(Q)| < \alpha E$$

4) O movimento determinado pela Hamiltoniana H sobre T_ω é quasi-periódico com n frequências ω :

$$\dot{Q}_0 = \omega_0 \quad , \quad \dot{Q}_1 = \omega_1$$

onde

$$\omega_0 = \frac{\partial H_0}{\partial \omega_0} \quad , \quad \omega_1 = \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \tau_\omega}$$

A demonstração desse teorema requer um alto grau de sofisticação, um sem número de lemas e teoremas preparatórios e no trabalho de Arnold cobre mais de vinte e nove páginas. É nosso desejo apresentar uma demonstração mais simples de teoremas que, para fins de aplicação à Mecânica, são equivalentes aos teoremas de Kolmogorov e Arnold.

3. Teorema fundamental. Caso não degenerado

O estudo dos trabalhos de Poincaré (1898) e von Zeipel (1917) permite que possamos enunciar e demonstrar o seguinte teorema. Nos ocuparemos de sistemas a dois graus de liberdade. O caso geral é facilmente obtido, por processo análogo.

Teorema K

" Considere-se a Hamiltoniana

$$H = H_0(x_1, x_2) + \mu \{H_{1s}(x_1, x_2, \mu) + H_{1p}(x_1, x_2, y_1, y_2, \mu)\} \quad (3.1)$$

com $0 < \mu \leq 1$ e as equações diferenciais associadas:

$$\dot{x}_k = - \frac{\partial H}{\partial y_k} \quad , \quad \dot{y}_k = + \frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2) \quad (3.2)$$

onde todas as funções são supostas analíticas numa região

$$D \{ |x_1| < R ; -\Delta < |\text{Im } y_1| < \Delta ; \Delta \text{ e } R \text{ positivos} \}$$

Admitamos, ainda, o seguinte

$$1) \quad H_{1p}(\vec{x}, \vec{y}) = H_{1p}(\vec{x}, \vec{y} + 2\vec{\pi}) \quad , \quad \vec{y} \text{ real}$$

$$2) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} H_{1p}(\vec{x}, \vec{y}) \, dy_1 \, dy_2 = 0$$

3) Para $\vec{x}^0$ em R :

$$a) \quad \lambda_1 = \frac{\partial \{H_0 + \mu H_{1s}\}}{\partial x_1^0} > \lambda \quad ,$$

$$\lambda_2 = \frac{\partial \{H_0 + \mu H_{1s}\}}{\partial x_2^0} > \lambda \quad , \quad \lambda > \mu \quad ,$$

$$b) \quad |n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2| \geq \delta (n_1^2 + n_2^2)^{-1} \quad (3.3)$$

para $\delta > 0$ e todos os inteiros n_1 e n_2 não simultaneamente nulos (Siegel, 1956; Niven e Zuckerman, 1966).

$$4) \quad \det \left\{ \frac{\partial^2 \{H_0 + \mu H_{1s}\}}{\partial x_i \partial x_j} \right\} = 2 N \mu \neq 0$$

$$5) \quad |H_{1p}| \leq \epsilon(\delta, N) \text{ em } D.$$

Então, existe uma solução quasi-periódica das equações (3.2), da forma

$$\begin{aligned} y_k &= \lambda_k(t - \tau_k) + \phi_k(e^{i\lambda_1 t}, e^{i\lambda_2 t}) \\ x_k &= A_k + \psi_k(e^{i\lambda_1 t}, e^{i\lambda_2 t}) \end{aligned} \quad (k=1,2) \quad (3.4)$$

com A_k constantes, para condições iniciais numa vizinhança de todo ponto de D .

Inicialmente coloquemos a Hamiltoniana numa forma conveniente a nossos propósitos. Desenvolveremos H em séries de Taylor ao redor de um ponto $\vec{x}^0 \in D$ que será, sem perda de generalidade, suposto na origem $x_1 = x_2 = 0$. Resultará

$$H = (\lambda_1 + \alpha_1)x_1 + (\lambda_2 + \alpha_2)x_2 + F_0(x_1, x_2) + F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) \quad (3.5)$$

a qual, é fácil verificar, satisfaz às seguintes propriedades:

- I) α_i ($i = 1, 2$) podem ser tomados iguais a zero.
- II) F_0 e F_1 são analíticos em D .
- III) F_0 é uma série de potências em x_1 e x_2 iniciando com têr

mos de segundo grau e de coeficientes constantes.

IV) F_1 é uma série de potências em x_1 e x_2 , iniciando com termos de ordem zero e de coeficientes periódicos de período 2π em y_1 e y_2 .

$$V) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1 dy_1 dy_2 = 0$$

VI) Em D

$$|F_1| \leq \epsilon(\delta, N)$$

Para demonstrar o teorema vejamos, inicialmente, dois lemas essenciais.

Lema 1:

" Na região $N_n \{ |x_1| < R_n ; 1 - \rho_n < |z_1| < 1 + \rho_n ;$

R_n e $\rho_n > 0 \}$ com $z_j = e^{iy_j}$, seja

$$F_1^{(n)}(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{+\infty} A_{n_1 n_2}(\vec{x}) e^{i(n_1 y_1 + n_2 y_2)} = \sum_{n_1 n_2} A_{n_1 n_2}(\vec{x}) z_1^{n_1} z_2^{n_2} \quad (3.6)$$

onde, na soma, n_1 e n_2 não são simultaneamente nulos (propriedade (V)). Em N_n seja

$$|F_1^{(n)}| \leq \mu R_n^{8/3}, \quad 0 < \mu \leq 1 \quad (3.7)$$

(propriedade (VI)).

Então, a função geradora

$$T_{n+1} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + S(\vec{x}, \vec{y}) \quad (3.8)$$

com S satisfazendo

$$\lambda_1 \frac{\partial S}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial S}{\partial y_2} = -F_1^{(n)}(\vec{x}, \vec{y}) \quad (3.9)$$

isto é,

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{n_1 n_2} \frac{i A_{n_1 n_2}(\vec{x}) z_1^{n_1} z_2^{n_2}}{n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2} \quad (3.10)$$

com λ_1, λ_2 satisfazendo (3.3) para um certo $\delta \geq h_n$, define uma transformação canônica entre variáveis $(\vec{x}, \vec{y})$ e $(\vec{X}, \vec{Y})$ por meio de

$$y_k = y_k + \frac{\partial S}{\partial x_k}, \quad x_k = x_k + \frac{\partial S}{\partial y_k} \quad (k = 1, 2) \quad (3.11)$$

Tal transformação pode ser escrita

$$y_k = y_k + L_k(\vec{X}, \vec{Y}) \quad (3.12) a$$

(k = 1, 2)

$$x_k = x_k + K_k(\vec{X}, \vec{Y}) \quad (3.12) b$$

onde as funções L_k e K_k são definidas e analíticas, pelo menos, numa região $\bar{N}_n \{ |x_1| < \frac{1}{2} R_n ; 1 - \rho_{n+1} < |z_1| < 1 + \rho_{n+1} \}$ sendo

$z_j = e^{i y_j}$, e nesta região

$$|L_k| \leq \mu h_n > 0$$

(k = 1, 2)

$$|K_k| \leq \frac{1}{2} \mu R_{n+1} < \frac{1}{4} \mu R_n$$

A transformação (3.12) leva, então, $\bar{N}_n$ em N_n .

Demonstração: Ponhamos, de uma vez por todas

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= R_n^{4/3}, & h_{n+1} &= h_n^{4/3} \\ R_n &= h^{15}, & h_0 &= h \\ \rho_n &= \rho_0 - \bar{h}_n, & \bar{h}_n &= 2 \sum_{j=0}^{n-1} h_j \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por simplicidade, consideremos o caso $n = 0$, pondo $F_1^{(0)} = F_1$. Será fácil mostrar que, admitidas as relações anteriores, a demonstração vale qualquer que seja $n > 0$. Inicialmente observamos que a série unívoca de Laurent de $F_1(\vec{X}, \vec{z})$ é majorada termo a termo pela função $\mu M(\vec{X}, \vec{z})$, onde, em vista de (3.7)

$$M(\vec{X}, \vec{z}) = R_0^{8/3} \prod_{i=1}^2 \left\{ \left(\frac{1 + \rho_0}{1 + \rho_0 - z_i} - \frac{1 - \rho_0}{1 - \rho_0 - z_i} \right) \left(\frac{R_0}{R_0 - X_i} \right) \right\} \quad (3.14)$$

Levando em conta (3.3) segue-se que $S(\vec{X}, \vec{z})$ é majorada termo a termo pela função

$$\frac{\mu}{h} \left\{ \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \right)^2 + \left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right)^2 \right\} M(\vec{X}, \vec{z}) \quad (3.15)$$

o que garante a existência de $S(\vec{X}, \vec{z})$. Segue-se, também, que $\frac{\partial S}{\partial y_1}$

($i = 1, 2$) é majorada termo a termo pela função

$$z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \left\{ \frac{\mu}{h} \left\{ \left(z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right)^2 + \left(z_j \frac{\partial}{\partial z_j} \right)^2 \right\} M(\vec{X}, \vec{Z}) \right\} \quad (3.16)$$

para $i = 1, 2$. Destas, segue-se imediatamente que, para $|X_1| < \frac{1}{2} R_0$ e $1 - (\rho_0 - h) < |z_1| < 1 + (\rho_0 - h)$,

$$\left| \frac{\partial S}{\partial y_1} \right| \leq \frac{\mu C R_0^{8/3}}{h^4 R_0} < \frac{\mu h}{2} \quad (3.17)$$

onde C é uma constante numérica escolhida independentemente de h ou μ . Além disso, para satisfazer a segunda desigualdade, h será escolhido suficientemente pequeno (lembrar (3.13)). Certamente a desigualdade permanecerá válida para todo h_n pois $h > h_n$ ($h < 1$). As constantes C , não necessariamente iguais, definidas ao longo da demonstração, serão sempre positivas e de mesmo carácter daquela aqui introduzida. Podemos, agora, verificar a invertibilidade da transformação

$$Y_j = y_j + \frac{\partial S}{\partial X_j} \quad (j = 1, 2)$$

que poremos na forma mais conveniente

$$Z_j = z_j + (e^{\frac{\partial S}{\partial X_j}} - 1) z_j = z_j + f_j(\vec{X}, \vec{Z}) \quad (j = 1, 2)$$

Levando em conta (3.17), para $|X_1| < \frac{1}{2} R_0$ e $1 - (\rho_0 - h) < |z_1| < 1 + (\rho_0 - h)$, segue-se que

$$|f_j(\vec{X}, \vec{Z})| \leq \frac{3}{4} \mu h, \quad (j = 1, 2)$$

Para $j = 2$, $Z_2 = z_2 + f_2(X_1, X_2, z_1, z_2)$, considerando X_1, X_2, z_1 fixos, ponhamos $Z_2 = z_2 + \tilde{f}_2(z_2)$, onde, para $1 - (\rho_0 - h) < |z_1| < 1 + (\rho_0 - h)$, $|\tilde{f}_2| \leq \frac{3}{4} \mu h$. Utilizando o teorema de Rouché (Nehari, 1952; Whittaker e Watson, 1963) para z_2 no anel $\rho_0 - h$ (a relação $1 - \rho < |z| < 1 + \rho$ será chamada anel ρ) indicado acima, todo ponto Z_2 no anel $\rho_0 - 2h$ é a imagem de um, e um só ponto z_2 . O jacobiano da transformação não pode se anular senão esta não seria localmente biunívoca. Logo, pelo teorema das funções implícitas

$$z_2 = z_2 + \tilde{g}_2(z_2)$$

ou

$$z_2 = z_2 + \tilde{g}_2(x_1, x_2, z_1, z_2).$$

Novamente aplicando o teorema de Rouché a um círculo de raio h e centro z_2 , segue-se que $|\tilde{g}_2| \leq \mu h$. A equação

$$z_1 = z_1 + f_1(x_1, x_2, z_1, z_2)$$

utilizando o resultado anterior, pode ser escrita

$$z_1 = z_1 + \tilde{f}_1(x_1, x_2, z_1, z_2)$$

e para x_1, x_2, z_2 fixos, $z_1 = z_1 + \tilde{f}_1(z_1)$, que por processo análogo fornece $z_1 = z_1 + \tilde{g}_1(z_1)$ ou

$$z_1 = z_1 + g_1(x_1, x_2, z_1, z_2) \quad (3.18)$$

e, por substituição, obtém-se

$$z_2 = z_2 + g_2(x_1, x_2, z_1, z_2) \quad (3.19)$$

As transformações (3.12)a decorrem destas, levando em conta que

$$z_j = e^{i y_j}, \quad z_j = e^{i y_j}$$

e as (3.12)b por substituição de (3.12) em

$$x_1 = x_1 + \frac{\partial S(\vec{X}, \vec{Z})}{\partial y_1}$$

De (3.18) resultará, análogamente, $|g_1| \leq \mu h$.

Resta obter uma estimativa para as funções K_i . De (3.16) vem que, para $|x_1| < \frac{1}{2} R_0$ e $1 - (\rho_0 - 2h) < |z_1| < 1 + (\rho_0 + 2h)$ e lembrando (3.13):

$$\left| \frac{\partial S(\vec{X}, \vec{Z})}{\partial y_1} \right| \leq \frac{\mu C R_0^{8/3}}{h^5} \leq \frac{\mu}{2} R_1 < \frac{1}{4} \mu R_0$$

Fica, assim, o Lema inteiramente demonstrado.

Lema 2:

" Suponhamos que na região $N_n \{ |x_1| < R_n; 1 - \rho_n < |z_1| < 1 + \rho_n \}$ a Hamiltoniana tenha a forma

$$H = (\lambda_1 + \alpha_1^{(n)})x_1 + (\lambda_2 + \alpha_2^{(n)})x_2 + F_0^{(n)}(\vec{x}) + F_1^{(n)}(\vec{x}, \vec{y}) \quad (3.20)$$

com H satisfazendo às propriedades do Teorema K, e (3.3) com

$\delta > h_n$, $\alpha_1^{(n)}$ sendo constantes. Além disso, suponhamos que, em N_n :

$$I') \quad |F_1^{(n)}(\vec{x}, \vec{y})| \leq \mu R^{8/3} \quad (3.21)$$

$$II') \quad |\alpha_1^{(n)}| \leq \mu^2 R^{8/3} \quad (i = 1, 2) \quad (3.22)$$

$$III') \quad \det \left\{ \frac{\partial^2 F_0^{(n)}}{\partial x_i \partial x_j} \right\} \geq \mu N > 0 \quad (3.23)$$

$$IV') \quad \left| \frac{\partial^2 F_0^{(n)}}{\partial x_i \partial x_j} \right| < M \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (3.24)$$

$$\left| \frac{\partial^3 F_0^{(n)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right| < M$$

Então, introduzindo a transformação canônica gerada por T_{n+1} (Lema 1) e uma segunda transformação, linear,

$$X'_1 = X_1 - \xi_1 \quad (i = 1, 2) \quad (3.25)$$

$$Y'_1 = Y_1$$

com ξ_1 constantes escolhidas convenientemente no intervalo $|\xi_1| < R_{n+1}$, a nova Hamiltoniana em termos de X'_1 , $Y'_1 = Y_1$ na região

$$N_{n+1} \{ |X'_1| < R_{n+1}; 1 - \rho_{n+1} < |Z'_1| < 1 + \rho_{n+1} \}$$

tomarã a forma

$$H = (\lambda_1 + \alpha_1^{(n+1)})X'_1 + (\lambda_2 + \alpha_2^{(n+1)})X'_2 + F_0^{(n+1)}(\vec{x}') + F_1^{(n+1)}(\vec{x}', \vec{y}') \quad (3.26)$$

onde

$$F_0^{(n+1)}(\vec{x}') = F_0^{(n)}(\vec{x}') + D^{(n+1)}(\vec{x}') \quad (3.27)$$

com as propriedades de (3.20) e, além disso:

$$I'') \quad |F_1^{(n+1)}| \leq \mu R_{n+1}^{8/3} \quad (3.28)$$

$$II'') \quad |\alpha_1^{(n+1)}| \leq \mu^2 R_{n+1}^{8/3} \quad (i = 1, 2) \quad (3.29)$$

$$\text{III") } \left| \frac{\partial^2 D^{(n+1)}}{\partial X_i' \partial X_j'} \right| \leq \mu^2 h_n^8 \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial^2 D^{(n+1)}}{\partial X_i' \partial X_j' \partial X_k'} \right| \leq \mu^2 h_n^8$$

sempre respeitadas as relações (3.13) ".

Demonstração: Novamente demonstraremos o caso $n = 0$. Podemos escrever, usando T_1 :

$$H = (\lambda_1 + \alpha_1) \left(X_1 + \frac{\partial S(\vec{X}, \vec{Y})}{\partial Y_1} \right) + (\lambda_2 + \alpha_2) \left(X_2 + \frac{\partial S(\vec{X}, \vec{Y})}{\partial Y_2} \right) + F_0 \left(\vec{X} + \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{Y}} \right)^T \right) + \\ + F_1 \left(\vec{X} + \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{Y}} \right)^T, \vec{Y} \right) \quad (3.30)$$

que pode, por hipótese, ser desenvolvida em série de Taylor. Em vista da definição de S , obtemos

$$H = (\lambda_1 + \alpha_1) X_1 + (\lambda_2 + \alpha_2) X_2 + F_0(\vec{X}) + D_1 + D_2 + D_3 \quad (3.31)$$

onde

$$D_1 = F_1 \left(\vec{X} + \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{Y}} \right)^T, \vec{Y} \right) - F_1(\vec{X}, \vec{Y}) = \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial X_i} \left(\vec{X} + \theta \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{Y}} \right)^T, \vec{Y} \right) \frac{\partial S}{\partial Y_i} \right\}$$

$$D_2 = \sum_{i,j=1}^2 \left\{ \frac{\partial^2 F_0}{\partial X_i \partial X_j} \left(\vec{X} + \theta \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{Y}} \right)^T \right) \frac{\partial S}{\partial Y_i} \frac{\partial S}{\partial Y_j} \right\}$$

$$D_3 = \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\partial F_0(\vec{X})}{\partial X_i} \frac{\partial S}{\partial Y_i} + \alpha_i \frac{\partial S}{\partial Y_i} \right\}$$

e seja $D = D_1 + D_2 + D_3$. Definindo

$$\bar{D} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} D \, dY_1 \, dY_2$$

desejamos mostrar que na região $\{ |X_1| < 2R_1; 1 - (\rho_0 - 2h) < |Z_1| < 1 + (\rho_0 - 2h) \}$ são verificadas as desigualdades

$$|\bar{D}| < \mu^2 R_1^{8/3}$$

$$\left| \frac{\partial \bar{D}}{\partial X_1} \right| < \mu^2 \frac{R_1^{8/3}}{R_0} < \mu^2 R_1^{5/3}$$

$$\left| \frac{\partial^2 \bar{D}}{\partial X_i \partial X_j} \right| < \mu^2 \frac{R_1^{8/3}}{R_0^2} < \mu^2 R_0 h^8 < \mu^2 h^8$$

$$\left| \frac{\partial^3 \bar{D}}{\partial X_i \partial X_j \partial X_k} \right| < \mu^2 \frac{R_1^{8/3}}{R_0^3} < \mu^2 R_0^{5/3} < \mu^2 h^8$$

Começemos por D_1 . Para $|X_1| \leq \frac{1}{2} R_0$, resulta que

$$|X_1 + \theta_1 \frac{\partial S}{\partial Y_1}| \leq \frac{3}{4} R_0$$

Logo

$$|D_1| \leq \mu^2 C \frac{R_0^{8/3}}{R_0} \frac{R_0^{8/3}}{h^5} = C \mu^2 R_0^4 = C \mu^2 R_1^3 < \frac{1}{3} \mu^2 R_1^{8/3}$$

Por outro lado, para $h < \frac{1}{2}$,

$$|\frac{1}{2} R_0 - 2 R_1| = \frac{1}{2} R_0 |1 - 4 R_0^{1/3}| > \frac{1}{4} R_0$$

e como a desigualdade vale para $|X_1| = \frac{1}{2} R_0$, as desigualdades análogas correspondentes às derivadas parciais de $\bar{D}_1$ seguem-se imediatamente da fórmula integral de Cauchy.

Vejamos D_2 . As derivadas segundas de F_0 são limitadas por M , para

$$|X_1| \leq \frac{1}{2} R_0 \quad \text{e} \quad |X_1 + \theta_1 \frac{\partial S}{\partial Y_1}| \leq \frac{3}{4} R_0$$

Mas já vimos

$$\left| \frac{\partial S}{\partial Y_1} \right| \leq \mu C \frac{R_0^{8/3}}{h^5}$$

e, portanto

$$|D_2| \leq \mu^2 C \left(\frac{R_0^{8/3}}{h^5} \right)^2 = \mu^2 \frac{C R_0^4}{h^{10}} \leq \mu^2 \frac{R_1^{8/3}}{3}$$

Usando, novamente, a fórmula integral de Cauchy obtemos as estimativas análogas correspondentes às derivadas parciais de $\bar{D}_2$.

Finalmente, para D_3 , observemos de início que F_0 inicia-se com termos de segundo grau. Utilizando o teorema da média e análogamente a D_2 :

$$\left| \sum_{i=1}^2 \frac{\partial F_0}{\partial X_i} \frac{\partial S}{\partial Y_i} \right| \leq \sum_{i,j=1}^2 \left| \frac{\partial^2 F_0}{\partial X_i \partial X_j} (\theta, X) \right| |X_j| \left| \frac{\partial S}{\partial Y_i} \right| \leq \mu C |X_j| \frac{R_0^{8/3}}{h^5}$$

Para produzir uma estimativa para $\bar{D}_3$ analisemos o termo

$$\left(\frac{\partial S}{\partial Y_1} \right) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial S}{\partial Y_1} (\vec{X}, \vec{Y}) dY_1 dY_2$$

Usando $Y_1 = Y_1 + \frac{\partial S}{\partial X_1} (\vec{X}, \vec{Y})$ e desenvolvendo o integrando ao redor

de $\vec{y} = \vec{Y}$ pela série de Taylor, resultará

$$\frac{\partial S}{\partial y_1} = \frac{\partial S}{\partial Y_1} (\vec{X}, \vec{Y}) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 S}{\partial Y_1 \partial Y_j} \bigg|_{Y+\theta} \frac{\partial S}{\partial X_j}$$

e na integração a primeira parcela desaparece, pois S é periódica de período 2π em relação a Y_1 e Y_2 . Logo

$$\left| \frac{\partial S}{\partial Y_1} \right| \leq \sum_{j=1}^2 C \left| \frac{\partial^2 S}{\partial Y_1 \partial Y_j} \right| \left| \frac{\partial S}{\partial X_j} \right| \leq \mu^2 C \frac{R_0^8}{h^6} \frac{R_0^3}{h^4} < \frac{\mu^2}{9} \frac{R_0^2}{h^5} R_0$$

Resultará assim

$$|\bar{D}_3| < \frac{1}{3} \mu^2 R_1^{8/3} R_0 \quad \text{para } |X_1| \leq 3 R_1$$

e desta, decorrem as estimativas indicadas para as derivadas parciais. As estimativas (3.32) serão, pois, verificadas para $|X_1| < 2 R_1$. Devemos, agora, mostrar que existe um ponto $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ com $|\xi_1| < R_1$, tal que, se

$$F_0^{(1)} = F_0 + D^{(1)} \quad (3.33)$$

então

$$\frac{\partial F_0^{(1)}}{\partial X_1} \bigg|_{\vec{X} = \vec{\xi}} = \alpha_1^{(1)} - \alpha_1 \quad (3.34)$$

com $|\alpha_1^{(1)}| < \mu^2 R_1^{5/3}$. Neste caso, então, o desenvolvimento de $F_0^{(1)}$ ao redor de $\vec{\xi}$ satisfará as últimas conclusões do Lema. Verifiquemos que tal ponto $\vec{\xi}$ é determinado pelas equações

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 F_0^{(1)}}{\partial X_1 \partial X_j} \bigg|_{\vec{X} = \vec{\xi}} \xi_j = -\alpha_1 - \frac{\partial \bar{D}}{\partial X_1} \bigg|_{\vec{X} = \vec{\xi}} \quad (3.35)$$

Com efeito, α_1 e $\frac{\partial \bar{D}}{\partial X_1}$ são limitados por $\mu^2 R_0^{8/3}$. Como o determinante do sistema, por hipótese, é maior ou igual a μN , segue-se que

ξ_1 e ξ_2 são limitados por $\mu \frac{C R_0^{5/3}}{N} \leq \mu R$. Usando o desenvolvimento de Taylor

$$\left. \frac{\partial F_0^{(1)}}{\partial X_1} \right|_{\vec{X}=\vec{\xi}} = \left. \frac{\partial \bar{D}}{\partial X_1} \right|_{\vec{X}=\vec{0}} + \sum_{j=1}^2 \left. \frac{\partial^2 F_0^{(1)}}{\partial X_1 \partial X_j} \right|_{\vec{X}=\vec{0}} \xi_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^2 \left. \frac{\partial^3 F_0^{(1)}}{\partial X_1 \partial X_j \partial X_k} \right|_{\vec{X}=\vec{0}} \xi_j \xi_k$$

mostra que $\alpha_1^{(1)}$ é precisamente a última parcela dêsse. Segue-se, então, facilmente, que

$$|\alpha_1^{(1)}| \leq \nu^2 C R_1^2 \leq \nu^2 R_1^{5/3}$$

o que completa a prova.

Demonstração do Teorema: Fazemos, inicialmente, uma demonstração esquemática. Inicialmente, consideremos H na forma (3.5) com as propriedades citadas válidas na região $N_0 \{ |x_1| < R_0 ; 1 - \rho_0 < |z_1| < 1 + \rho_0 \}$. Procedemos, agora, motivados pelo método de Poincaré, a definir uma sequência infinita de transformações canônicas com o propósito de "eliminar" $F_1(x, y)$, por meio das transformações estudadas nos Lemas 1 e 2. No n -ésimo estágio transformamos (3.5) numa forma equivalente em termos das variáveis $X_1^{(n)'}$, $Z_1^{(n)'}$ definidas na região $N_n \{ X_1^{(n)} = X_1^{(n)'} + A_1^{(n)} ; |X_1^{(n)'}| < R_n ; 1 - \rho_n < |Z_1^{(n)'}| < 1 + \rho_n ; Z_1^{(n)'} = Z_1^{(n)} \}$ com as seguintes definições

$$A_j^{(n)} = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(j)} \quad (3.36)$$

$$|\xi_i^{(j)}| < R_i, \quad \xi_i^{(j)} \text{ constantes}$$

A nova Hamiltoniana será tal que, nas novas variáveis $(X_1^{(n)'}, Y_1^{(n)'})$ as quantidades correspondentes a α_1 , α_2 e $F_1(\vec{x}, \vec{y})$ tendem a zero com $n \rightarrow \infty$; além disso, $(\vec{x}, \vec{y})$ são funções analíticas de $(\vec{x}^{(n)'}, y^{(n)'})$. Finalmente, mostraremos que as variáveis originais $(\vec{x}, \vec{y})$ podem ser expressas em termos de $A_1, A_2, Y_1^{(\infty)}, Y_2^{(\infty)}$, onde

$$A_j = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^{(j)} \quad \text{e} \quad Y_j^{(n)} \rightarrow Y_j^{(\infty)} = \lambda_j(t - \tau_j)$$

Vejamos como tal esquema é levado a efeito. Tomemos, inicialmente, $h_0 = h > 0$, tal que $\rho_0 - 7h > 0$. Se necessário, definiremos novamente R_0 de modo a se ter $R_0 = h^{15}$ (isto é sugerido por um trabalho

de Moser, 1962). Para construir a primeira transformação devemos nos assegurar que as hipóteses do Lema 2 estão satisfeitas. Temos que

- a) $|F_1|$ em N_0 deve ser suficientemente pequeno para que seja

$$|F_1| \leq \mu R_0^{8/3}$$

- b) As constantes α_1 podem ser tomadas iguais a zero de início.

- c) Das hipóteses do teorema e por razões de continuidade, se R_0 é suficientemente pequeno e $|x_1| \leq R_0$, então,

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_i \partial x_j} + b_{ij} \right\} \geq \mu N$$

$$\left| \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_i \partial x_j} + b_{ij} \right| \leq M$$

$$\left| \frac{\partial^3 F_0}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + b_{ijk} \right| \leq M$$

para $|b_{ij}| \leq 4 \mu h$, $|b_{ijk}| \leq 4 \mu h$, arbitrariamente escolhidos. Então, todas as hipóteses são satisfeitas e a transformação T_1 mais a transformação definida no Lema 2, levam a Hamiltoniana em outra, definida em N_1 , com $|F_1^{(1)}| \leq \mu R^{8/3}$, $|\alpha_1^{(1)}| \leq \mu^2 R^{5/3}$. Além disto,

em vista do Lema 2, todas as hipóteses para a aplicabilidade da transformação T_2 são satisfeitas. Prosseguindo desta maneira obtemos uma sequência infinita de transformações. A passagem do estágio n -ésimo em N_n para o estágio $(n+1)$ -ésimo em N_{n+1} corresponderá a

$$|F_1^{(n+1)}| \leq \mu R_{n+1}^{8/3}, \quad |\alpha_1^{(1)}| \leq \mu^2 R_{n+1}^{5/3}$$

Entretanto, notamos imediatamente que, em cada transformação estaremos somando o termo $D^{(n)}(x)$ a $F_0^{(n-1)}$, de acordo com o Lema 2. Então,

$$F_0^{(n)} = F_0 + \sum_{j=1}^n D^{(j)} \quad (3.37)$$

mas, como

$$\left| \frac{\partial^3 D^{(p)}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right| < \mu^2 h_{p-1}^8$$

$$\left| \frac{\partial^2 D^{(p)}}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq \mu^2 h_{p-1}^8$$

então, as hipóteses do Lema 1 continuam satisfeitas.

Por outro lado, como $h_{n+1} = h_n^{4/3}$, $h_0 = h < \frac{1}{2}$, então

$$\sum_{j=0}^{\infty} h_j < 3h \quad (3.38)$$

e, portanto, $F_1(\vec{x}, \vec{y})$ tende a zero uniformemente em $1 - (\rho_0 - 6h) < |z_1| < 1 + (\rho_0 - 6h)$ que, em virtude da escolha de h é não vazio. Por outro lado, das considerações anteriores, segue-se imediatamente que, para $|x_i^{(n)}| < \frac{1}{2} R_n$ e $y_i^{(n)}$ reais,

$$\left| \frac{\partial H}{\partial x_i^{(n)}} - \lambda_i \right| \leq 3\mu R_n, \quad \left| \frac{\partial H}{\partial y_i^{(n)}} \right| \leq \frac{1}{h} \mu R_n^{8/3}$$

e, das equações diferenciais definidas por H

$$x_i^{(n)} \rightarrow A_i = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^{(1)} = x_i^{(\infty)} \quad (3.39)$$

$$y_i^{(n)} \rightarrow \lambda_i(t - \tau_i) = y_i^{(\infty)} \quad (3.40)$$

uniformemente para todo intervalo finito de tempo. Finalmente, vejamos como se relacionam as variáveis $(\vec{x}, \vec{y})$ com $(\vec{x}^{(\infty)}, \vec{y}^{(\infty)})$. Inicialmente é evidente que

$$N_0 \supset N_1 \quad N_2 \supset \dots \supset N_n \supset \dots$$

e a transformação T_{n+1} definida pelo Lema 1 transforma N_{n+1} em N_n . No n -ésimo estágio teremos, pois, formalmente

$$\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} = T_1 T_2 \dots T_n \begin{pmatrix} \vec{x}^{(n)'} + \vec{A}^{(n)} \\ \vec{y}^{(n)} \end{pmatrix} = \tilde{T}_n \begin{pmatrix} \vec{x}^{(n)'} + \vec{A}^{(n)} \\ \vec{y}^{(n)} \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

ou seja

$$\vec{x} = \vec{x}^{(n)'} + \vec{A}^{(n)} + \vec{U}^{(n)}(\vec{x}^{(n)'} + \vec{A}^{(n)}, \vec{y}^{(n)}) \quad (3.42)$$

$$\vec{y} = \vec{y}^{(n)} + \vec{V}^{(n)}(\vec{x}^{(n)'} + \vec{A}^{(n)}, \vec{y}^{(n)}) \quad (3.43)$$

Como as transformações $\tilde{T}_n$ têm tódas alcance N_0 , segue-se que as funções analíticas $u_j^{(n)}, v_j^{(n)}$ ($j = 1, 2$) são limitadas. Mais precisamente, decorre da aplicação repetida do Lema 1 que esta limitação é $3h$, conforme (3.38). Para mostrar que elas convergem uniformemente

para únicas funções analíticas, mostraremos que elas formam uma sequência uniforme de Cauchy no anel $\rho_0 - 7h$ que, por hipótese, é não vazio. Para isto, façamos uma estimativa de $\bar{T}_{n+1} - \bar{T}_n$. Temos

$$\begin{aligned} \bar{T}_{n+1} \begin{pmatrix} \vec{X}' + \vec{A} \\ \vec{Y} \end{pmatrix} - \bar{T}_n \begin{pmatrix} \vec{X}' + \vec{A} \\ \vec{Y} \end{pmatrix} &= \bar{T}_n(\bar{T}_{n+1} \begin{pmatrix} \vec{X}' + \vec{A} \\ \vec{Y} \end{pmatrix}) - \\ &- \bar{T}_n \begin{pmatrix} \vec{X}' + \vec{A} \\ \vec{Y} \end{pmatrix} = \bar{T}_n \begin{pmatrix} \vec{X}' + \vec{A} + \vec{K} \\ \vec{Y} + \vec{L} \end{pmatrix} - \bar{T}_n \begin{pmatrix} \vec{X}' + \vec{A} \\ \vec{Y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

onde $\vec{K} = (K_1, K_2)$ e $\vec{L} = (L_1, L_2)$ são as funções definidas no Lema 1, e, portanto $|L_1| \leq \mu h_n$, $|K_1| \leq \frac{1}{2} \mu R_{n+1}$. Em termos das funções U_1, V_1 acima definidas, escreveremos

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= U_1^{(n+1)}(\vec{X}' + \vec{A}, \vec{Y}) - U_1^{(n)}(\vec{X}' + \vec{A}, \vec{Y}) = \\ &= U_1^{(n)}(\vec{X}' + \vec{A} + \vec{K}, \vec{Y} + \vec{L}) - U_1^{(n)}(\vec{X}' + \vec{A}, \vec{Y}) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\Delta_1 = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial U_1^{(n)}}{\partial X_j} \Big|_{\vec{X}=\vec{X}'+\vec{A}+\theta\vec{K}} K_j + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial U_1^{(n)}}{\partial Y_j} \Big|_{\vec{Y}=\vec{Y}+\phi\vec{L}} L_j$$

e

$$|\Delta_1| \leq \sum_{j=1}^2 \left\{ \left| \frac{\partial U_1^{(n)}}{\partial X_j} \right| |K_j| + \left| \frac{\partial U_1^{(n)}}{\partial Y_j} \right| |L_j| \right\}$$

e, estimando as derivadas parciais pela fórmula de Cauchy, levando em conta que, para $h < \frac{1}{2}$, $|R_n - 3 R_{n+1}| > \frac{1}{2} R_n$, resulta

$$|\Delta_1| \leq 3h \mu \left(\frac{2}{R_n} R_{n+1} + \frac{1}{h} h_n \right) \leq \mu C h h_{n-1}$$

Logo, os $U_1^{(n)}$ e, análogamente, os $V_1^{(n)}$ formam sequências de Cauchy e cada uma converge para um limite analítico unívoco.

Desta forma, fica o teorema demonstrado. O processo convergirá para um conjunto de (λ_1, λ_2) tal que a desigualdade (3.3) seja satisfeita, para um δ convenientemente tal que $\delta > h < \frac{1}{2}$. Na realidade, Siegel (1956) demonstra que, para $0 \leq \omega \leq \Omega$, a medida exterior de todos os ω que não satisfazem à relação $|n_1 + n_2 \omega| \geq \frac{\delta}{n_2^2}$

para todo $n_2 \neq 0$ é menor que $\frac{4\pi^2}{3} \Omega \delta$. É importante notar que os a_i decrescem com μ^2 . Se μ for bastante pequeno ($0 < \mu < 1$) a aproximação para a solução de que trata o teorema demonstrado será bastante rápida. Citamos este fato pois, no caso degenerado, tratado no teorema seguinte, as quantidades citadas decrescerão apenas com μ . Este fato é sintomático de problemas degenerados e problemas de ressonância, isto é, comensurabilidade. Que os dois problemas são análogos é fácil de ser verificado pelas considerações seguintes.

Seja a Hamiltoniana $H = H_0(\vec{x}) + \mu H_1(\vec{x}, \vec{y})$ e seja $\vec{x}_0$ um certo valor de $\vec{x}$ para o qual se verifique a relação

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(\vec{x}_0) n_i = 0 \quad (3.44)$$

$$\lambda_i = \left. \frac{\partial F_0}{\partial x_i} \right|_{\vec{x} = \vec{x}_0}$$

para n_i inteiros não todos nulos. Desejamos mostrar que, para esse valor particular $\vec{x}_0$ a Hamiltoniana se reduz a um caso degenerado. Com efeito, definamos as novas variáveis

$$Y_1 = \sum_{i=1}^n n_i y_i \quad (n_1 \neq 0) \quad (3.45)$$

$$y_j = y_j \quad (j = 2, 3, \dots, n)$$

e façamos a extensão canônica gerada pela função

$$T(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{j=1}^n y_j(\vec{y}) x_j = \sum_{i=1}^n n_i y_i x_1 + \sum_{j=2}^n y_j x_j \quad (3.46)$$

Resultará

$$x_1 = \frac{\partial T}{\partial y_1} = n_1 x_1 \quad (3.47)$$

$$x_k = \frac{\partial T}{\partial y_k} = n_k x_1 + x_k \quad (k = 2, 3, \dots, n)$$

ou, reciprocamente

$$n_1 y_1 = y_1 - \sum_{i=2}^n n_i y_i \quad (3.48)$$

$$y_1 = y_1 \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

e

$$\begin{aligned} n_1 X_1 &= x_1 \\ n_1 X_1 &= n_1 x_1 - n_1 x_1 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Vejamos como se transforma a equação que define S do Lema 1 :

$$\sum \lambda_i \frac{\partial S}{\partial Y_i} = -F_1(\vec{x}', \vec{y}) \quad (3.50)$$

Como

$$\frac{\partial S}{\partial Y_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial S}{\partial Y_j} \frac{\partial Y_j}{\partial Y_i} = n_i \frac{\partial S}{\partial Y_i} + \frac{\partial S}{\partial Y_i} \quad (3.51)$$

resultará, imediatamente

$$\left(\sum_{i=1}^n n_i \lambda_i \right) \frac{\partial S}{\partial Y_1} + \sum_{i=2}^n \lambda_i \frac{\partial S}{\partial Y_i} = -\bar{F}_1(\vec{X}', \vec{Y}) \quad (3.51)$$

e o coeficiente λ_1 de $\frac{\partial S}{\partial Y_1}$ é, por hipótese, nulo. Isto equivale a se supor que

$$\frac{\partial \bar{F}_0(\vec{X})}{\partial X_1} = 0 \quad (3.52)$$

isto é, $\bar{F}_0(\vec{X})$ é independente de X_1 . Se houver $m < n$ relações independentes do tipo (2.45), então, poderemos reduzir H_0 a uma função de $n - m$ momentos X_k e teremos uma degeneração de ordem m . Reciprocamente é fácil ver que uma degeneração de ordem m corresponde a um problema com m relações de ressonância independentes, qualquer que seja o vetor $\vec{x}_0$ escolhido. Sob este aspecto, então, o caso de degeneração torna-se mais crucial que o caso de ressonância. Se, em vez de (3.44), admitirmos

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(\vec{x}_0) n_i = 0(\mu), \quad 0 < \mu \leq 1$$

a transformação (3.45) levará, análogamente a (3.51), à relação

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial S}{\partial Y_i} = -\bar{F}_1(\vec{X}, \vec{Y})$$

com $\lambda_1 = 0(\mu)$. Uma das frequências fundamentais tende a zero para $\mu \rightarrow 0$ e, portanto, devemos concluir que $\bar{H}_0(\vec{X})$ não depende de X_1

ou, então, a $\frac{\partial \bar{H}_0}{\partial X_1}$ é comparável com a amplitude da perturbação.

4. Perturbação de um sistema integrável degenerado

Nós vamos, apenas, considerar um sistema com dois graus de liberdade com degeneração de 1ª. ordem. Os resultados que serão apresentados parecem ser susceptíveis de extensão para o caso geral de n graus de liberdade com degeneração de ordem m (o que, na realidade, foi tratado por Arnold no teorema citado no parágrafo anterior). Em linhas gerais, a demonstração do teorema que vamos apresentar é semelhante àquela do teorema anterior. Serão, entretanto, necessários maiores cuidados nas estimativas das várias aproximações, pois aqui vamos admitir que uma das frequências fundamentais é da ordem da perturbação, o que, se aplicado o processo do parágrafo anterior, invalidará a convergência das séries obtidas.

Teorema A

" Consideremos a Hamiltoniana da forma

$$H = H_0(x_1) + \mu \{H_{1s}(x_1, x_2) + H_{1p}(x_1, x_2, y_1, y_2)\} \quad (4.1)$$

para $0 < \mu \leq 1$, e as equações diferenciais canônicas

$$\dot{x}_i = - \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = + \frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2) \quad (4.2)$$

onde todas as funções são supostas analíticas em D e H_{1p} periódica de período 2π em y_1 e y_2 , com média nula. Para um valor fixo $x_0 \in D$, sejam

$$\lambda_1 = \left. \frac{\partial \{H_0 + \mu H_{1s}\}}{\partial x_1} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_0}, \quad \lambda_2 = \left. \frac{\partial H_{1s}}{\partial x_2} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \quad (4.3)$$

satisfazendo à relação

$$\left| n_1 + n_2 \frac{\mu \lambda_2}{\lambda_1} \right| \geq \frac{\delta \mu}{n_2^2} \quad (4.4)$$

para todos os inteiros n_1, n_2 e $n_2 \neq 0$. Novamente, utilizando o

teorema de Siegel (1956), sabemos que, para $0 \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq \Omega$, a medida exterior de todos os $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ que não satisfazem tal relação é menor que

$$\frac{4\pi^2}{3} \Omega \mu \delta .$$

Em alguma vizinhança de μ_0 , $0 < \mu_0 < 1$, seja

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 \{ H_0(x_1) + \mu H_{1s}(x_1, x_2) \}}{\partial x_1 \partial x_j} \right\}_{\vec{x}=\vec{x}^0} = 2 N \mu \neq 0 \quad (4.5)$$

Então, para $|H_{1p}| \leq \varepsilon(\delta, N)$ e para μ naquela vizinhança, existe uma solução quasi-periódica de (4.2) da forma

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_1 (t - \tau_1) + \phi_1(e^{i\lambda_1 t}, e^{i\mu\lambda_2 t}) \\ y_2 &= \mu\lambda_2 (t - \tau_2) + \phi_2(e^{i\lambda_1 t}, e^{i\mu\lambda_2 t}) \\ x_j &= A_j + \psi_j(e^{i\lambda_1 t}, e^{i\mu\lambda_2 t}) \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (4.6)$$

com A_j constantes".

Novamente, reduzimos H à forma

$$H = (\lambda_1 + \alpha_1)x_1 + (\mu\lambda_2 + \alpha_2)x_2 + F_0(\vec{x}) + F_1(\vec{x}, \vec{y}) \quad (4.7)$$

com as mesmas propriedades do teorema K. É necessário, agora, reformular os dois lemas fundamentais do parágrafo anterior.

Lema 3: " Se na região $N_n \{ |x_1| < R_n, 1 - \rho_n < |z_1| < 1 + \rho_n$ tivermos

$$|F_1^{(n)}(\vec{x}, \vec{y})| = \sum_{n_1, n_2} A_{n_1 n_2} e^{i(n_1 y_1 + n_2 y_2)} = \sum_{n_1, n_2} A_{n_1 n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2} \quad (4.8)$$

com n_1 e n_2 não simultaneamente nulos e

$$F_1^{(n)}(\vec{x}, \vec{y}) \leq \mu R_n^{8/3}, \quad 0 < \mu \leq 1 \quad (4.9)$$

então, a função geradora

$$T_{n+1} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + S(\vec{x}, \vec{y}) \quad (4.10)$$

onde

$$\lambda_1 \frac{\partial S}{\partial y_1} + \mu \lambda_2 \frac{\partial S}{\partial y_2} = - F_1^{(n)}(\vec{x}, \vec{y}) \quad (4.11)$$

isto é,

$$S(\vec{X}, \vec{Y}) = i \sum_{n_1, n_2} \frac{A_{n_1 n_2}(\vec{X}) z_1^{n_1} z_2^{n_2}}{n_1 \lambda_1 + n_2 \mu \lambda_2} \quad (4.12)$$

onde λ_1 e λ_2 satisfazem (4.4), define uma transformação canônica entre as variáveis $(\vec{X}, \vec{Y})$ e $(\vec{X}, \vec{Y})$ por meio de

$$Y_i = y_i + \frac{\partial S}{\partial X_i}, \quad x_i = X_i + \frac{\partial S}{\partial Y_i} \quad (i = 1, 2) \quad (4.13)$$

Tal transformação poderá ser escrita

$$Y_i = y_i + L_i(\vec{X}, \vec{Y}), \quad x_i = X_i + K_i(\vec{X}, \vec{Y}) \quad (4.14)$$

onde as funções K_i e L_i são definidas e analíticas, pelo menos, na região $\tilde{N}_n \{ |X_i| \leq \frac{1}{2} R_n, 1 - (\rho_n - 2 h_n) < |z_i| < 1 + (\rho_n - 2 h_n) \}$ e nesta região

$$|L_i| \leq h_n, \quad |K_i| \leq \frac{1}{2} R_{n+1} < \frac{1}{4} R_n \quad (4.15)$$

assegurando que as (4.14) transformam $\tilde{N}_n$ em N_n .

Demonstração: Admitidas as mesmas relações (3.13), anteriormente fornecidas para $R_n, \rho_n, h_n, \dots$, vamos demonstrar o lema para $n = 0$, sem perda de generalidade. Novamente, verificamos que $F_1(\vec{X}, \vec{Z})$ é majorada termo a termo por $\mu M(\vec{X}, \vec{Z})$ onde $M(\vec{X}, \vec{Z})$ é a mesma função (3.14) do parágrafo anterior. Suposto $\lambda_1 > 0$, o que é sempre possível, resultará (<< significa "majorada por")

$$S(\vec{X}, \vec{Y}) << \left\{ \frac{1}{h} \left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right)^2 + \frac{\mu}{\lambda_1} \right\} M(\vec{X}, \vec{Z}) \quad (4.16)$$

o que assegura a existência de S . Além disso

$$\frac{\partial S}{\partial Y_1} << z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \left\{ \frac{1}{h} \left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right)^2 + \frac{\mu}{\lambda_1} \right\} M(\vec{X}, \vec{Z}) \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial S}{\partial X_1} << \frac{\partial}{\partial X_1} \left\{ \frac{1}{h} \left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right)^2 + \frac{\mu}{\lambda_1} \right\} M(\vec{X}, \vec{Z}) \quad (4.18)$$

e para $|X_i| < \frac{1}{2} R_0$ e $1 - (\rho_0 - h) < |z_i| < 1 + (\rho_0 - h)$,

$$\left| \frac{\partial S}{\partial X_1} \right| \leq \frac{C R_0^{8/3}}{h^4 R_0} < \frac{h}{2} \quad (4.19)$$

onde, com relação a C e h , fazemos as mesmas observações feitas no Lema 1. Procedendo análogamente a este, obteremos

$$|f_j(\vec{X}, \vec{Z})| \leq \frac{3}{4} h \quad (j = 1, 2) \quad (4.20)$$

$$|g_j(X, z)| \leq h \quad (4.21)$$

e

$$\left| \frac{\partial S}{\partial Y_1} \right| \leq \frac{C R_0^8}{h^5} < \frac{1}{2} R_1 < \frac{1}{4} R_0 \quad (4.22)$$

as desigualdades sendo válidas nas regiões correspondentes do Lema 1. Observe-se que perdemos, no caso, o fator μ em todas as desigualdades. Podemos, ainda, para (4.22), obter, em vista da definição de S e das limitações em $\frac{\partial S}{\partial Y_2}$ e F_1 , a restrição mais forte

$$\left| \frac{\partial S}{\partial Y_1} \right| \leq \mu C \frac{R_0^8}{h^5} \quad (4.23)$$

Fica, assim, o lema demonstrado.

Lema 4: " Suponhamos que na região $N_n \{ |x_1| < R_n ; 1 - \rho_n < |z_1| < 1 + \rho_n \}$ a Hamiltoniana tenha a forma

$$H = (\lambda_1 + \alpha_1^{(n)})x_1 + (\mu \lambda_2 + \alpha_2^{(n)})x_2 + F_0^{(n)}(x) + F_1^{(n)}(\vec{X}, \vec{Y}) \quad (4.24)$$

onde $F_0^{(n)}$ inicia com termos do 2º grau, o valor médio de $F_1^{(n)}$ é nulo e λ_1 e $\mu \lambda_2$ satisfazem (4.4) com $\delta > h_n$, os $\alpha_1^{(n)}$ sendo constantes. Além disso, suponhamos, em N_n , que:

$$I''') \quad |F_1^{(n)}(\vec{X}, \vec{Y})| \leq \mu R_n^{8/3}$$

$$II''') \quad |\alpha_1^{(n)}| \leq \mu R_n^{5/3} \quad (i = 1, 2)$$

$$III''') \quad \det \left\{ \frac{\partial^2 F_0^{(n)}}{\partial x_i \partial x_j} \right\} \geq \mu N > 0$$

$$IV''') \quad \frac{\partial^2 F_0^{(n)}}{\partial x_1^2} \quad e \quad \frac{\partial^3 F_0^{(n)}}{\partial x_1^3}$$

são limitadas por M e todas as outras derivadas segundas e terceiras são limitadas por μM . Então, introduzindo a transformação canônica T_{n+1} de que trata o Lema 3 e uma translação $X'_1 = X_1 - \xi_1$, $Y'_1 = Y_1$ ($i = 1, 2$), com constantes ξ_1 convenientemente escolhidas no inter-

valo $|\xi_1| < R_{n+1}$, a nova Hamiltoniana em termos de X'_1, Y'_1 na região N_{n+1} $\{ |X'_1| < R_{n+1}; 1 - \rho_{n+1} < |Z_1| < 1 + \rho_{n+1} \}$ terá a forma

$$H = (\lambda_1 + \alpha_1^{(n+1)})X'_1 + (\mu \lambda_2 + \alpha_2^{(n+1)})X'_2 + F_0^{(n+1)}(\vec{X}') + F_1^{(n+1)}(\vec{X}', \vec{Y}') \quad (4.25)$$

com

$$F_0^{(n+1)}(\vec{X}') + D^{(n+1)}(\vec{X}')$$

com $F^{(n+1)}$ iniciando em termos do segundo grau, e o valor médio de $F_1^{(n+1)}(X', Y')$ sendo zero, e, além disso

$$I) \text{ IV } |F_1^{(n+1)}(X', Y')| \leq \mu R_{n+1}^{8/3}$$

$$II) \text{ IV } |\alpha_i^{(n+1)}| \leq \mu R_{n+1}^{8/3} \quad (i = 1, 2)$$

$$III) \text{ IV } \left| \frac{\partial^2 D^{(n+1)}}{\partial X_1 \partial X_j} \right| \quad e \quad \left| \frac{\partial^3 D^{(n+1)}}{\partial X_1 \partial X_j \partial X_k} \right| \leq \mu h^8$$

sendo satisfeitas ".

Demonstração: Procedendo como no Lema 2, reduzimos H à forma

$$H = (\lambda_1 + \alpha_1)X_1 + (\mu \lambda_2 + \alpha_2)X_2 + D_1 + D_2 + D_3$$

obtendo, por raciocínio análogo, as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} |D| &< \mu R_1^{8/3} \\ \left| \frac{\partial \bar{D}}{\partial X_1} \right| &< \mu \frac{R_1^{8/3}}{R} < \mu R_1^{5/3} \\ \left| \frac{\partial^2 \bar{D}}{\partial X_1 \partial X_j} \right| &< \frac{\mu R_1^{8/3}}{R_0^2} < \mu R_0 h^8 < \mu h^8 \\ \left| \frac{\partial^3 \bar{D}}{\partial X_1 \partial X_j \partial X_k} \right| &< \frac{\mu R_1^{8/3}}{R_0^3} < \mu h^8 \end{aligned}$$

onde, para estimar as derivadas de $\bar{D}_3$ usamos a relação (4.23). O ponto $\vec{\xi}$ é definido, novamente, por

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 F_0^{(1)}}{\partial X_1 \partial X_j} \Big|_{\vec{X}=\vec{0}} \xi_j = -\alpha_1 - \frac{\partial \bar{D}}{\partial X_1} \Big|_{\vec{X}=\vec{0}}$$

da qual resulta, análogamente ao Lema 2, $|\xi_2| < R_1$ e $|\xi_1| < \mu R_1$ e destas $|\alpha_1^{(1)}| \leq \mu R^{5/3}$.

Demonstração do Teorema A: Procedemos da mesma maneira que para o teorema K, definindo H inicialmente numa região N_0 e com $h > 0$, tal que $\rho_0 - 7h > 0$, redefinindo R_0 se necessário. Por raciocínio análogo, obteremos que

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_i \partial x_j} + b_{ij} \right\} \geq \mu N$$

$$\left| \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_i \partial x_j} + b_{ij} \right| \leq \begin{cases} M & (i = j = 1) \\ \mu M & (\text{outros casos}) \end{cases}$$

e

$$\left| \frac{\partial^3 F_0}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + b_{ijk} \right| \leq \begin{cases} M & (i = j = k = 1) \\ \mu M & (\text{outros casos}) \end{cases}$$

como b_{ij} e b_{ijk} definidos da mesma maneira. A Hamiltoniana em N_1 será tal que

$$|F_1^{(1)}| \leq \mu R^{8/3}, \quad |\alpha_1^{(1)}| \leq \mu R^{5/3}$$

A prova segue agora, como antes o fizemos para o teorema K, obtendo-se no caso

$$|A_1| \leq C h h_{n-1}$$

concluindo-se, então, a prova do teorema.

5. O problema de movimentos nas vizinhanças de uma solução de equilíbrio

Considere-se a Hamiltoniana

$$H = H(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) = H(\vec{x}, \vec{y}) \quad (5.1)$$

analítica num domínio D do espaço de fase $2n$ -dimensional, com x_k e y_k reais ($k = 1, 2, \dots, n$). Suponhamos que $(\vec{\theta}, \vec{\theta}) \in D$ seja uma solução de equilíbrio do sistema

$$\dot{x}_k = - \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = + \frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5.2)$$

Admitimos, ainda, que $(\vec{\theta}, \vec{\theta})$ não anula as derivadas parciais segundas de H em relação a $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Desenvolvendo H em série de Tay-

lor, numa vizinhança suficientemente restrita da origem, resultará

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots \quad (5.3)$$

com H_p um polinômio de grau p em x_k, y_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Admitidos os autovalores associados a H_2 todos distintos e chamando os mesmos de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n$, existe uma transformação linear que reduz (5.3) à forma

$$H = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k y_k + H_3(\vec{X}, \vec{Y}) + H_4(\vec{X}, \vec{Y}) + \dots \quad (5.4)$$

Ponhamos, inicialmente

$$\begin{aligned} \epsilon \xi_k &= x_k \\ \epsilon \eta_k &= y_k \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5.5)$$

com $0 < \epsilon \leq 1$. As equações

$$\dot{x}_k = - \frac{\partial H}{\partial y_k}$$

$$\dot{y}_k = + \frac{\partial H}{\partial x_k}$$

tornam-se

$$\dot{\xi}_k = - \frac{\partial F}{\partial \eta_k} \quad (5.6)$$

$$\dot{\eta}_k = + \frac{\partial F}{\partial \xi_k}$$

com

$$F = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k \eta_k + \epsilon F_1(\vec{\xi}, \vec{\eta}; \epsilon) \quad (5.7)$$

onde F_1 é uma série de potências em ξ_k, η_k iniciando com termos do 3º grau. Os autovalores λ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) ou são reais ou imaginários puros. Suporemos aqui que o segundo caso seja verificado para todo λ_k e poremos $\lambda_k = -i \omega_k$, com ω_k real, positivo ou negativo. Neste caso, os coeficientes em F_1 são imaginários puros. Ponhamos, pois, $F_1 = -i H_1$, sendo H_1 uma série de potências em ξ_k, η_k , de coeficientes reais e iniciando com termos do terceiro grau.

Por meio da transformação canônica

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{2} \xi_k \eta_k \\ v_k &= 2i \ln \frac{\xi_k}{\eta_k} \end{aligned} \quad (5.8)$$

ou

$$\begin{aligned} \eta_k &= \sqrt{2 u_k} e^{i v_k} \\ \xi_k &= \sqrt{2 u_k} e^{-i v_k} \end{aligned} \quad (5.9)$$

as equações (5.6) tornam-se

$$\begin{aligned} \dot{u}_k &= -\epsilon \frac{\partial H}{\partial v_k} \\ \dot{v}_k &= \omega_k + \epsilon \frac{\partial H}{\partial u_k} \end{aligned} \quad (5.10)$$

e a Hamiltoniana $H(\vec{u}, \vec{v})$ é, pois

$$H = \sum_{k=1}^n \omega_k u_k + \epsilon H_1(\vec{u}, \vec{v}; \epsilon) \quad (5.11)$$

e H_1 é periódica de período 2π em $v_1, v_2, \dots, v_n$ e os coeficientes da sua série de Fourier são polinômios nos $u_1, u_2, \dots, u_n$. O problema do estudo de soluções nas vizinhanças do ponto de equilíbrio fica, assim, formalmente reduzido ao estudo da perturbação do sistema integrável gerado por

$$H_0 = \sum_{k=1}^n \omega_k u_k \quad (5.12)$$

Os teoremas enunciados, de Kolmogorov e Arnold, não podem ser aplica-

dos, pois, no caso, temos que a matriz $\left\{ \frac{\partial^2 H_0}{\partial u_i \partial u_j} \right\}$ é nula. Por outro lado, se acontecer que

$$H_{1s} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} H_1(\vec{u}, \vec{v}) dv_1 dv_2 \dots dv_n$$

fôr nula, então também as hipóteses do Teorema K não são verificadas. Além disso, não se pode garantir "a priori" que não exista nenhuma relação

$$\sum_{k=1}^n m_k \omega_k = 0$$

para alguns inteiros m_k não nulos. Este caso, entretanto, não será o caso geral. Podemos afirmar, em vista do Teorema K, que se H_{1s} fôr diferente de zero existirão soluções quasi periódicas de (5.10) para ϵ suficientemente pequeno, H_{1p} limitada e os λ_k (definidos no Teorema K) satisfazendo a uma certa relação de irracionalidade. Por outro lado, é evidente que H_{1s} será a contribuição de termos do tipo

$$A_{p_1 p_2 \dots p_n} (\xi_1 \eta_1)^{p_1} (\xi_2 \eta_2)^{p_2} \dots (\xi_n \eta_n)^{p_n} = F_p(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (5.13)$$

com $p_1, p_2, \dots, p_n$ inteiros e aqui torna-se evidente a conexão com o problema da redução de H à forma normal. Em geral tais termos estarão presentes. Se o Teorema K fôr válido para n graus de liberdade, estará provada a existência de soluções quasi periódicas nas vizinhanças de uma solução de equilíbrio do tipo elíptico, para um certo conjunto de frequências λ_k , isto é, de condições iniciais. Isto confirmaria um resultado de Moser (1965) se bem que, até o momento, a prova desse resultado ainda não foi fornecida pelo autor. Note-se que o artifício sugerido por Poincaré para contornar o problema não se aplica a este caso específico. Com efeito, seja $\phi(H)$ uma função analítica de H . O sistema canônico

$$\begin{aligned} \dot{u}_k &= - \frac{\partial H}{\partial v_k} \\ \dot{v}_k &= + \frac{\partial H}{\partial u_k} \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

pode ser transformado no sistema equivalente

$$\begin{aligned} \dot{u}_k &= - \frac{1}{\phi'(h)} \frac{\partial \phi(H)}{\partial v_k} \\ \dot{v}_k &= + \frac{1}{\phi'(h)} \frac{\partial \phi(H)}{\partial u_k} \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

onde h é a constante da energia correspondente a dadas condições iniciais e $\phi'(h) = d\phi/dH|_{H=h}$ é suposta não nula. Se $H = H_0 + \epsilon H_1 + \dots$

tivermos $\partial^2 H_0 / \partial u_i \partial u_j = 0$ qualquer que sejam i e $j = 1, 2, \dots, n$, é fácil ver que $\det \{ \partial^2 K_0 / \partial u_i \partial u_j \} = 0$ com $K_0 = \phi(H_0) / \phi'(h)$, qualquer que seja ϕ . Não serão, entretanto, nulas, em geral, as derivadas $\partial^2 K_0 / \partial u_i \partial u_j$.

Uma aplicação importante daquilo que acima expusemos é ao estudo de equações do tipo

$$\ddot{x}_k + \omega_k^2 x_k = \epsilon f_k(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \epsilon)$$

as quais são facilmente levadas à forma

$$\dot{u}_k = \epsilon U_k$$

$$\dot{v}_k = \omega_k + \epsilon V_k$$

através das relações

$$\dot{x}_k + i \omega_k x_k = u_k e^{i v_k}$$

com x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) reais.



6. Construção de integrais primeiras

O desenvolvimento dos métodos definidos pelos teoremas dos parágrafos anteriores permite, com uma modificação formal, obter séries que estão em involução com a Hamiltoniana do sistema. O problema aqui é o de analisar algumas propriedades dessas séries. Sua construção formal foi, em linhas gerais, desenvolvida em trabalhos recentes (Giacaglia, 1965 - neste trabalho é fornecida ampla bibliografia sobre o assunto). Consideremos, novamente, a Hamiltoniana do Teorema K:

$$H = H_0 + \epsilon H_1 = H_0(\vec{x}) + \epsilon \{ H_{1s}(\vec{x}) + H_{1p}(\vec{x}, \vec{y}) \} \quad (6.1)$$

com

$$H_{1p} = \sum_m A_m(\vec{x}) e^{i \vec{m} \cdot \vec{y}}, \quad \vec{m} \neq \vec{0} \quad (6.2)$$

Procuramos determinar para o sistema gerado por H , uma integral primeira $\phi(\vec{x}, \vec{y}, \epsilon)$ em involução com H , isto é

$$(H, \phi) = 0 \quad (6.3)$$

Suporemos que $\Phi(\vec{x}, \vec{y}, \epsilon)$ é desenvolvível em série de potências no parâmetro ϵ , podendo esta série, inclusive, divergir. As operações com séries formais, análogas às possíveis com séries convergentes, são lícitas em toda sua extensão (Cartan, 1963). Ponhamos, pois,

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_0 + \epsilon \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2 + \dots \\ \Phi_p &= \Phi_p(\vec{x}, \vec{y})\end{aligned}\quad (6.4)$$

Usando a condição (6.3) obteremos um polinômio em ϵ que deve ser nulo independentemente de ϵ e, portanto, de coeficientes nulos.

Partindo de

$$(H_0 + \epsilon H_1, \Phi_0 + \epsilon \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2 + \dots) = 0 \quad (6.5)$$

obtemos, então:

$$\sum_{p=0} \epsilon^p (H_0, \Phi_p) + \sum_{p=1} \epsilon^p (H_1, \Phi_p) = 0$$

isto é

$$(H_0, \Phi_0) = 0 \quad (6.6)$$

$$(H_0, \Phi_p) + (H_1, \Phi_{p-1}) = 0 \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (6.7)$$

A equação (6.6) servirá à determinação de Φ_0 . A seguir, por recorrência, a equação (6.7) fornece $\Phi_1, \Phi_2, \dots$.

Lema A: A função Φ_0 é uma função arbitrária de $x_1, x_2, \dots, x_n$ e de toda forma linear $j_1 y_1 + j_2 y_2 + \dots + j_n y_n$ com j_k reais, satisfazendo à condição $j_1 \omega_1 + j_2 \omega_2 + \dots + j_n \omega_n = 0$ onde $\omega_k = \partial H_0 / \partial x_k$.

Com efeito, sendo

$$\sum_{m=1}^n \left(\frac{\partial H_0}{\partial y_m} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_m} - \frac{\partial H_0}{\partial x_m} \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_m} \right) = - \sum_{m=1}^n \omega_m \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_m} = 0$$

a solução geral resulta ser

$$\Phi_0 = \bar{\Phi}_0(\vec{x}) + \bar{\Phi}_0(j_1 y_1 + j_2 y_2 + \dots + j_n y_n)$$

e necessariamente

$$j_1 \omega_1 + j_2 \omega_2 + \dots + j_n \omega_n = 0$$

e

$$\bar{\Phi}_0(\vec{x}) \text{ arbitrária.}$$

Observação: Notemos que a solução do sistema gerado por H_0 é

$$\begin{aligned} x_k &= \text{constante} \\ y_k &= \omega_k t + \text{constante} \end{aligned} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

e, portanto, $\bar{\phi}_0$ torna-se função de uma constante e pode ser desprezada. Logo, tomaremos $\phi_0 = \bar{\phi}_0(\vec{x})$. Isto, com efeito, é evidente, pois (6.6) exprime o fato de ser ϕ_0 integral primeira do sistema gerado por H_0 . Como são conhecidas as n integrais primeiras $x_k = \text{const.}$ ($k=1, 2, \dots, n$) desse sistema, ϕ_0 deverá, necessariamente, ser uma função destas.

Lema B: Se $\phi_0 = \phi_0(\vec{x})$ e ϕ_1 é periódica de período 2π em relação a $y_1, y_2, \dots, y_n$ com média nula, então (H_1, ϕ_1) é periódica de período 2π em $y_1, y_2, \dots, y_n$ e tem média nula.

Com efeito, observemos que, para $p=1$, de (6.7) decorre:

$$(H_0, \phi_1) + (H_1, \phi_0) = 0$$

e desta

$$\sum_{j=1}^n \omega_j \frac{\partial \phi_1}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial H_1}{\partial y_j} \quad (6.8)$$

com $P_j = P_j(\vec{x}) = \partial \phi_0 / \partial x_j$. O membro à direita de (6.8) é, certamente, periódico de período 2π em $y_1, y_2, \dots, y_n$ e tem média nula. Então, ϕ_1 pode ser definido com as mesmas propriedades desde que se despreze uma função arbitrária e os ω_j satisfaçam uma certa condição de irracionalidade $|\vec{m} \cdot \vec{\omega}| > \delta > 0$ com $m_1, m_2, \dots, m_n$ inteiros não todos nulos e um δ conveniente. Seja, agora, $\theta = p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_n y_n$ um argumento da série de Fourier de H_1 , com $p_1, p_2, \dots, p_n$ inteiros não todos nulos. Em vista da linearidade de (6.8) podemos fixar a atenção apenas neste argumento. Então, de (6.8) resulta, a menos de uma função arbitrária de $\vec{x}$:

$$\phi_1 = \frac{\sum_{j=1}^n P_j P_j}{\sum_{j=1}^n \omega_j P_j} (-A \sin \theta + B \cos \theta) \quad (6.9)$$

onde supusemos $H_1 = A \cos \theta + B \sin \theta + \dots$.

Chamando o fator do membro à direita de (6.9) de $C(\vec{x})$, resultará

$$(H_1, \phi_1)_\theta = \left\{ - \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial C}{\partial x_j} \right\} \left\{ \frac{B^2 - A^2}{2} \sin 2\theta + A B \cos 2\theta \right\}$$

o que prova o lema, pois, termos independentes de θ somente podem ser produzidos por funções trigonométricas do mesmo argumento.

Resulta, assim, que ϕ_2 , a menos de uma função arbitrária de $\vec{x}$, será periódica de período 2π em $y_1, y_2, \dots, y_n$ e de média nula.

Lema C: Se as funções ϕ_p e ϕ_{p-1} forem periódicas de período 2π em $y_1, y_2, \dots, y_n$ e satisfizerem à equação

$$\sum_{j=1}^n \omega_j \frac{\partial \phi_p}{\partial y_j} = - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_j} \frac{\partial \phi_{p-1}}{\partial y_j} - \frac{\partial H_1}{\partial y_j} \frac{\partial \phi_{p-1}}{\partial x_j} \right) = F_p$$

com os ω_j satisfazendo à uma certa condição de irracionalidade, então a função ϕ_{p+1} definida por

$$\sum_{j=1}^n \omega_j \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial y_j} = - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_j} \frac{\partial \phi_p}{\partial y_j} - \frac{\partial H_1}{\partial y_j} \frac{\partial \phi_p}{\partial x_j} \right) = - F_{p+1}$$

será, a menos de uma função arbitrária de $\vec{x}$, uma função periódica de período 2π em $y_1, y_2, \dots, y_n$ de média nula.

Bastará mostrar que, suposta F_p periódica de período 2π em $y_1, y_2, \dots, y_n$ de média nula, o mesmo resulta ser verdade para F_{p+1} . Por razões de linearidade, fixemos a atenção num certo argumento $\theta = p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_n y_n$, com p_k ($k = 1, 2, \dots, n$) inteiros não todos nulos. Ponhamos

$$H_1 = A + B \cos \theta + C \sin \theta$$

$$\phi_{p-1} = D \cos \theta + E \sin \theta$$

Impondo a condição citada para F_p resulta, facilmente

$$B E - C D = 0 \quad (6.10)$$

Além disto, os termos de argumento θ em F_p serão

$$F_p = \left(\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial A}{\partial x_j} \right) (-D \sin \theta + E \cos \theta)$$

e, em correspondência

$$\phi_p = \frac{- \left(\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial A}{\partial x_j} \right)}{\left(\sum_{j=1}^n p_j \omega_j \right)} (-D \cos \theta - E \sin \theta) = M (-D \cos \theta - E \sin \theta)$$

Calculando F_{p+1} obtemos, para o argumento θ , conservando sômente os t ermos em $\sin^2 \theta$ e $\cos^2 \theta$ (que são os únicos que podem fornecer t ermos constantes):

$$\begin{aligned} F_{p+1} &= \left\{ \sum_{j=1}^n M \left(-\frac{\partial B}{\partial x_j} E \cos^2 \theta + \frac{\partial C}{\partial x_j} D \sin^2 \theta - B \frac{\partial E}{\partial x_j} \sin^2 \theta + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C \frac{\partial D}{\partial x_j} \cos^2 \theta + \frac{\partial M}{\partial x_j} (DC \cos^2 \theta - BE \sin^2 \theta) \right\} = \\ &= M \left\{ \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (CD - BE) \right\} + \frac{CD - BE}{2} \sum_j \frac{\partial M}{\partial x_j} + \dots \cos 2\theta + \dots \\ &\dots \sin 2\theta \end{aligned}$$

e, em vista de (6.10), fica provado o lema.

Os lemas acima demonstrados permitem enunciar o seguinte:

Teorema W: Seja H uma Hamiltoniana satisfazendo às propriedades do Teorema K. Então, existe uma série formal

$$\Phi = \Phi_0 + \epsilon \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2 + \dots$$

que está em involu o com H e satisfaz às seguintes propriedades

- I) $\Phi_0 = \Phi_0(\vec{x})$   arbit ria
- II) $\Phi_p = \Phi_p(\vec{x}, \vec{y})$   periódica de peri do 2π em $y_1, y_2, \dots, y_n$ e tem, em rela o a essas variáveis, média nula.

A demonstra o   imediata, bastando-se aplicar os lemas A, B e C. Então, concluimos que, se a partir de um certo p , as fun es $\Phi_{p+1}, \Phi_{p+2}, \Phi_{p+3}, \dots$ forem t das nulas, a fun o $\Phi = \Phi_0 + \epsilon \Phi_1 + \dots + \epsilon^p \Phi_p$   uma integral do sistema gerado por H . Para que isto se verifique bastará ser $\Phi_{p+1} = 0$, pois, de (6.7) tôdas as fun es $\Phi_{p+2}, \Phi_{p+3}, \dots$ poderão ser tomadas iguais a zero (ou iguais a fun es arbit rias de $\vec{x}$). Por outro lado, se não existir $p \geq 1$ tal que $\Phi_p = 0$, a série $\Phi = \Phi_0 + \epsilon \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2 + \dots$ s mente será integral se f r convergente.   evidente que tal série não poderá ser convergente para todos os valores $\vec{x}$ pois a condi o de irracionalidade de $|\vec{j} \cdot \vec{\omega}| > \delta > 0$, para um δ finito, não será satisfeita a menos que δ se torne infinitésimo. Escolhido um δ suficientemente peque

no (da ordem de ϵ) vemos, agora, que as séries ϕ serão, em geral, divergentes, pois, como é evidente, de (6.7), as funções ϕ_p conterão $(\vec{f} \cdot \vec{\omega})^p$ em denominador. A divergência dessas séries está no fato das frequências $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ não serem as frequências dos movimentos quasi periódicos gerados por H (vide Teorema K), mas sim, apenas uma aproximação, de ordem zero, dessas.

É possível se escolher ϕ_0 de modo que a série termine conforme mostraremos mais tarde. Entretanto, o problema de se determinar um tal ϕ_0 , em geral, não parece apresentar uma solução simples. Se tal problema pudesse ser resolvido estaríamos na situação de fornecer as condições de integrabilidade de um sistema gerado por uma Hamiltoniana de propriedades bastante gerais. Infelizmente a questão está praticamente em aberto. Quando a Hamiltoniana tiver um ponto estacionário, algumas contribuições ao problema global vêm dos trabalhos de Moser (1955) e Siegel (1941).



CAPÍTULO III



CURVAS E SUPERFÍCIES INVARIANTES

1. Situação do problema

Já descrevemos, no primeiro capítulo, algumas relações entre pontos fixos de transformações analíticas isovolumétricas e soluções periódicas, ou de equilíbrio, para sistemas Hamiltonianos. Verificamos, também, que tais transformações, nas vizinhanças de um ponto fixo não podem, em geral, ser reduzidas à forma normal. Por outro lado obtivemos, por um processo que é uma generalização dos trabalhos de Birkhoff (1927) e Siegel (1956), uma forma normal aproximada e verificamos que a existência de curvas ou toros invariantes dependia dos efeitos de uma perturbação dessa forma normal aproximada. Neste capítulo iremos fornecer alguns resultados que decorrem dessa perturbação e que estão em relação direta com os resultados e problemas apresentados no capítulo anterior. Para que os presentes resultados sejam melhor compreendidos, faz-se necessária uma conceituação geral do problema a ser tratado.

Conforme foi visto, as trajetórias de sistemas integráveis H_0 desenvolvem-se sobre toros n dimensionais se o grau de liberdade do sistema (não degenerado) é n . Os toros são definidos pelos momentos x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) e sobre o toro as trajetórias são parametrizadas pelas n variáveis angulares y_k ($k = 1, 2, \dots, n$) que se exprimem no tempo por $y_k = \omega_k t + y_k^0$ e as constantes ω_k dependem, em geral, de $x_1, x_2, \dots, x_n$. Por simplicidade consideremos, inicialmente, o caso $n=2$. As órbitas serão descritas por

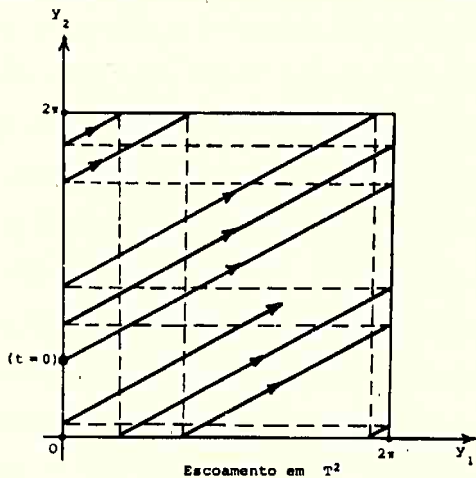
Biblioteca da Escola Politécnica

São Paulo

F-5158

$$\begin{aligned} y_k &= \omega_k (x_1^0, x_2^0) t + y_k^0 \\ x_k &= x_k^0 \end{aligned} \quad (k = 1, 2) \quad (1.1)$$

O toro T^2 correspondente pode ser individualizado de duas maneiras: ou por uma superfície toroidal, produto de duas circunferências de raios x_1 e x_2 , ou por um quadrado no plano (y_1, y_2) . Esta segunda representação parece mais simples. Como a medida de y_1 e y_2 é módulo 2π , podemos identificar pontos de lados opostos de um quadrado de lado 2π , isto é, $(0, y_2)$ com $(2\pi, y_2)$ e $(y_1, 0)$ com $(y_1, 2\pi)$ para todo y_1 e y_2 no intervalo $[0, 2\pi]$. As trajetórias são, pois, segmentos de reta sobre o toro, inclinados de ω_2 / ω_1 sobre o eixo y_1 . É evidente que, para valores racionais de ω_2 / ω_1 , as trajetórias não cobrem todo o quadrado e as soluções são periódicas.



Para ω_2 / ω_1 irracionais, entretanto, as soluções cobrem completamente o quadrado e as soluções são quasi periódicas (escoamento ergódico). Em ambos os casos as soluções perma necem sobre o toro, que é pois, dito invariante em relação ao escoamento. Admitindo-se a hipótese

$$(Kolmogorov) \det \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \right\} \neq 0,$$

então, prova-se que com $H = H_0 + \mu H_1$ (analítica), e μ suficientemente pequeno e para todo conjunto de ω_1, ω_2 racionalmente independentes satisfazendo as desigualdades $|m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2| \geq K$ para todos os inteiros m_1, m_2 não simultaneamente nulos, existem toros invariantes

$$\begin{aligned} x_k &= A_k (Y_1, Y_2) \\ y_k &= Y_k + \phi_k (Y_1, Y_2) \end{aligned} \quad (k = 1, 2)$$

e as soluções sobre cada toro são dadas por $\dot{Y} = \omega_k$ ou $Y_k = \omega_k t + Y_k^0$. Expressimos este fato dizendo que um escoamento ergódico pode ser "pro-

longado" sob perturbações pequenas e ao contrário, toros para os quais ω_1 e ω_2 são racionalmente dependentes (escoamento periódico) quando sujeitos a perturbações serão, em geral, destruídos. A redução desse problema a uma transformação isovolumétrica de um conjunto em si mesmo apresenta vantagens que decorrem da estrutura geométrica de tal transformação. Os trabalhos de Poincaré (1912) e de Moser (1955, 1962 e 1964) nos fornecem idéias bastante produtivas a esse respeito. Com efeito, consideremos o problema de Moser (1962), a respeito de transformações isovolumétricas de um anel circular em si mesmo.

Dado um anel $A \{ 0 < a \leq r \leq b \}$, considere-se a transformação

$$U_0 : \theta^* = \theta + \omega(r) , \quad r^* = r \quad (1.2)$$

com

$$\frac{d\omega}{dr} > 0 , \quad r \in A .$$

Tal transformação conserva circunferências e as faz girar de um ângulo $\omega(r)$, que é tanto maior quanto maior for r . Considere-se, agora, a transformação

$$U : \begin{aligned} \theta^* &= \theta + \omega(r) + F(r, \theta) \\ r^* &= r + G(r, \theta) \end{aligned} \quad (1.3)$$

com F e G pequenas, isto é, em A :

$$\begin{aligned} |F(r, \theta)| &< \epsilon \omega(r) , \quad \text{para todo } \theta \\ |G(r, \theta)| &< \epsilon r \end{aligned}$$

e periódicas de período 2π em θ . Moser mostra, então, que sob certas condições, para $\omega(r)$, F e G , desde que U_0 e U conservem a área (Jacobiano unitário), a transformação U possui curvas fechadas invariantes que estão próximas das circunferências invariantes de U_0 . Uma das condições essenciais é a necessidade de ω ser racionalmente independente de 2π . É intuitivo que deva haver uma conexão entre esses resultados e aqueles que se referem à perturbação de sistemas conservativos. Inclusive espera-se que o tratamento geométrico da questão possa fornecer resultados adicionais. Desde já observamos que as curvas invariantes podem corresponder às várias determinações de uma integral.

2. Sistemas com dois graus de liberdade

Seja a Hamiltoniana analítica em $D(\vec{x}, \vec{y})$

$$H = H_0(x_1, x_2) + \mu \{ H_{1s}(x_1, x_2) + H_{1p}(x_1, x_2, y_1, y_2) \} \quad (2.1)$$

periódica de período 2π em y_1, y_2 e $0 < \mu \leq 1$. Admitamos satisfeitas as propriedades do Teorema K. Admitido, em D , que

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial H_0}{\partial x_2} \neq 0$$

poderemos resolver a equação

$$H_0(x_1, x_2) + \mu H_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = h = \text{const.}$$

em relação a x_2 , obtendo

$$x_2 = \tilde{K}(x_1, y_1, y_2, h, \mu) \quad (2.2)$$

sendo $\tilde{K}$ analítica e periódica de período 2π em y_1, y_2 . Então, é possível desenvolver K em série de potências convergentes de μ . Na realidade, será suficiente que se possa escrever

$$x_2 = \tilde{K}_0(x_1, y_1, y_2, h, 0) + \mu \tilde{K}_1(x_1, y_1, y_2, h, \mu)$$

e, em vista de (2.1), será possível escrever

$$x_2 = \tilde{K}_0(x_1, h) + \mu \tilde{K}_1(x_1, y_1, y_2, h, \mu) \quad (2.3)$$

A relação (2.2) permite eliminar o tempo do sistema gerado por (2.1) tomando y_2 como variável independente. Com efeito

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dy_2} &= \frac{\dot{x}_1}{\dot{y}_2} = - \frac{\partial H}{\partial y_1} / \frac{\partial H}{\partial x_2} = - \frac{\partial \tilde{K}}{\partial y_1} \\ \frac{dy_1}{dy_2} &= \frac{\dot{y}_1}{\dot{y}_2} = \frac{\partial H}{\partial x_1} / \frac{\partial H}{\partial x_2} = - \frac{\partial \tilde{K}}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

com $\tilde{K}$ dado por (2.2). Pondo $y_2 = \tau$, $x_1 = x$ e $y_1 = y$, as equações podem ser escritas

$$x' = \frac{\partial K}{\partial y}, \quad y' = - \frac{\partial K}{\partial x} \quad (2.5)$$

com $K = K(x, y, \tau, \mu) = K_0(x) + \mu K(x, y, \tau, \mu)$.

Considerando o espaço (x, y, τ) , o estudo das soluções de (2.5) pode ser reduzido ao estudo de uma transformação T_μ do plano $\tau = 0$ sobre o plano $\tau = 2\pi$. A transformação T_μ é definida

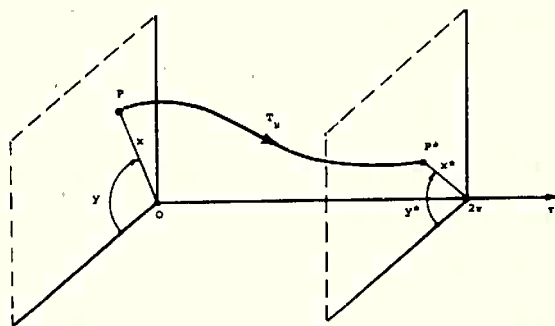
por (2.5) como é fácil mostrar.

Sejam as condições iniciais $\tau = 0$, $x = x_0$, $y = y_0 \in D$ e a solução de (2.5) correspondente

$$\begin{aligned} x &= \phi(\tau, x_0, y_0, \mu) \\ y &= \psi(\tau, x_0, y_0, \mu) \end{aligned} \quad (2.6)$$

A transformação T_μ é, pois, dada por

$$\begin{aligned} T_\mu : \quad x^* &= \phi(\tau, x, y, \mu) \\ y^* &= \psi(\tau, x, y, \mu) \end{aligned} \quad (2.7)$$



Transformação isovolumétrica em coordenadas cilíndricas
(dois graus de liberdade)

Para $\mu = 0$, a transformação $T_0 \{x^* = \phi_0(2\pi, x, y), y^* = \psi_0(2\pi, x, y)\}$ onde $\phi_0 = \phi(2\pi, x, y, 0)$ e $\psi_0 = \psi(2\pi, x, y, 0)$, pode ser escrita imediatamente. Com efeito, para $\mu = 0$, $K = K_0(x)$ e, portanto

$$y(\tau, x_0, y_0) = y_0 + \frac{\omega}{\omega_2} \tau$$

$$x(\tau, x_0, y_0) = x_0$$

onde

$$\omega_i = \frac{\partial H}{\partial x_i} (x_1, x_2(y_1, y_2, x_1)) = \omega_i(x), \quad i = 1, 2$$

e, portanto

$$\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \omega(x).$$

Definindo

$$\alpha(x) = 2\pi\omega(x),$$

a transformação T_0 se escreve

$$\begin{aligned} x^* &= x \\ T_0 : \quad y^* &= y + \alpha(x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

que é do tipo (1.2) estudado por Moser. Resulta que a transformação T_μ poderá ser escrita

$$\begin{aligned} x^* &= x + \mu G(x, y, \mu) \\ T : \quad y^* &= y + \alpha(x) + \mu F(x, y, \mu) \end{aligned}$$

devendo x variar no anel $0 < a \leq x \leq b$. Certamente a transformação T conserva a área, isto é, $dx dy$ é invariante com T_μ . Por outro lado, será fácil mostrar que G e F são periódicas em y de período 2π . Se no anel, $\omega'(x) > 0$, e $\omega(x)$ satisfizer à condição

$$|\omega - \frac{m}{n} 2\pi| \geq \mu n \frac{3}{2} - \sigma, \quad \sigma \text{ inteiro } \geq 4, \quad m \text{ e } n \text{ inteiros, } n \neq 0, \text{ em}$$

tão, o teorema de Moser nos permite afirmar que T_μ possui curvas invariantes que, para μ suficientemente pequeno, são próximas das circunferências $x^* = x$ invariantes de T_0 . Isto significa que as circunferências invariantes (Toros) se conservam para pequenas perturbações, sendo somente deformadas. Por outro lado, se existir uma integral $\phi(x, y) = \text{const.}$, teremos, obviamente,

$$\phi(x^*, y^*) = \phi(x, y) = \text{const.}$$

e, portanto, as curvas $\phi(x, y) = \text{const.}$ são invariantes. Isto nos fornece uma condição necessária para a existência de integrais de (2.5) próximas das integrais $x = \text{const.}$ para $\mu = 0$. Vejamos como se exprime a condição $\alpha'(x) \neq 0$. Como

$$\alpha = 2\pi \frac{\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2(x_1))}{\frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2(x_1))}$$

vem que

$$\frac{d\alpha}{dx_1} = \frac{2\pi}{(\frac{\partial H}{\partial x_2})^2} \left\{ \frac{\partial H}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx}{dx_1} \right) - \frac{\partial H}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} \frac{dx}{dx_1} \right) \right\}$$

Mas, de $H_0(x_1, x_2) = h$, vem que $\frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{dx}{dx_1} = 0$, isto é

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{\frac{\partial H_0}{\partial x_1}}{\frac{\partial H_0}{\partial x_2}}$$

e, portanto,

$$\frac{da}{dx_1} = - \frac{2\pi}{\left(\frac{\partial H_0}{\partial x_2}\right)^3} \Delta(x_1, x_2)$$

onde $\Delta(x_1, x_2)$ é o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial H_0}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_2^2} & \frac{\partial H_0}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H_0}{\partial x_1} & \frac{\partial H_0}{\partial x_2} & 0 \end{vmatrix}$$

que, então, deverá ser diferente de zero. Esta condição é mais geral daquela imposta no Teorema de Kolmogorov, e, de fato, ela já é mencionada por Arnold (1963) na demonstração daquele teorema. Aqui ela é obtida, naturalmente, pela aplicação das condições do teorema de Moser (1962).

3. Sistemas com n graus de liberdade

Consideremos a Hamiltoniana analítica

$$H = H_0(\vec{x}) + \mu H_1(\vec{x}, \vec{y}, \mu) \quad (3.1)$$

periódica de período 2π em $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Para $\mu = 0$, as soluções quasi periódicas

$$\begin{aligned} y_k &= \Omega_k(\vec{x}^0)t + y_k^0 \\ x_k &= x_k^0 \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.2)$$

se desenvolvem sobre o toro T^n e o escoamento é ergódico, como generalização imediata do que foi visto para $n = 2$. Ao longo de toda so

lução do sistema gerado por (3.1) teremos

$$H(\vec{x}, \vec{y}) = h = \text{const.}$$

Suponhamos que $\partial H / \partial x_n \neq 0$. Então, poderemos resolver $H = h$ para x_n , obtendo

$$x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_1, y_2, \dots, y_n, h, \mu) \quad (3.3)$$

Pondo $y_n = \tau$ e eliminando o tempo das equações

$$\dot{x}_k = - \frac{\partial H}{\partial y_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.4)$$

$$\dot{y}_k = + \frac{\partial H}{\partial x_k}$$

teremos

$$x'_k = \frac{\partial f}{\partial y_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.5)$$

$$y'_k = - \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

sendo f dada por (3.3). Notemos, inicialmente, que f dependerá, em geral, de τ e, portanto, não será uma integral de (3.5). Se H é analítica, f é analítica. Novamente, o estudo das soluções de (3.5) pode ser reduzido ao estudo de uma transformação T_μ do plano $y_n = \tau = 0$ para o plano $y_n = \tau = 2\pi$, T_μ sendo gerada por (3.5). Com efeito, escolhamos

$$(x_k^0, y_k^0) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

no plano $y_n = 0$. A solução de (3.5) passando por êsse ponto em $\tau = 0$ será

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(\tau; \vec{x}^0, \vec{y}^0, \mu) \\ y_k &= y_k(\tau; \vec{x}^0, \vec{y}^0, \mu) \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (3.6)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} x_k^* &= x_k(2\pi; \vec{x}, \vec{y}, \mu) \\ T_\mu : y_k^* &= y_k(2\pi; \vec{x}, \vec{y}, \mu) \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (3.7)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_k} = - \frac{\partial H_0}{\partial x_k} / \frac{\partial H}{\partial x_n} = - \frac{\Omega_k}{\Omega_n} (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad (3.8)$$

e, para $\mu = 0$

$$x_k = x_k^0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (3.9)$$

$$y_k = \frac{\Omega_k}{\Omega_n} (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \tau + y_k^0.$$

Sejam

$$\alpha_k(x_1, \dots, x_{n-1}) = 2\pi \frac{\Omega_k}{\Omega_n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

Logo

$$\begin{aligned} T_0 : \quad x_k^* &= x_k \\ y_k^* &= \alpha_k(x_1, \dots, x_{n-1}) + y_k \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (3.10)$$

Poderemos, então, escrever para $\mu \neq 0$

$$\begin{aligned} T_\mu : \quad x_k^* &= x_k + G_k(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \\ y_k^* &= y_k + \alpha_k(x_1, \dots, x_{n-1}) + F_k(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

com $k = 1, 2, \dots, n-1$, e x_k variando no anel $0 < a_k \leq x_k \leq b_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. É claro que G_k e F_k dependem de μ e devem tender a zero para $\mu \rightarrow 0$. Como o sistema é Hamiltoniano, (3.11) deve ser isovolumétrica, isto é,

$$\sum_{k=1}^{n-1} dx_k dy_k = dV$$

é um invariante em relação a T_μ .

Uma integral primeira do sistema gerado por H será

$$G(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = \text{const.}$$

e sujeita a T_μ vai em si mesma, isto é,

$$\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) = \Gamma(\vec{x}^*, \vec{y}^*) = \text{const.}$$

e, portanto, a hipersuperfície $\Gamma = \text{const.}$ é invariante em relação a T_μ . Além disto, uma solução periódica de período $2\pi p$, p inteiro > 0 , será tal que

$$x_k(2\pi p, \vec{x}^0, \vec{y}^0) = x_k^p = x_k^0$$

$$y_k(2\pi p, \vec{x}^0, \vec{y}^0) = y_k^p = y_k^0$$

e, portanto,

$$T_\mu^p p_0 = p_0$$

onde p_0 é o ponto $(\vec{x}^0, \vec{y}^0)$. Logo, é um ponto fixo de T_μ . Em termos geométricos, agora, o problema de Kolmogorov pode ser posto na seguinte forma. Procura-se determinar sob que condições a transformação T_μ terá superfícies invariantes perto do toro $x_k = x_k^0$ que é invariante de T_0 . Esse toro pode ser visualizado por um hipercubo de aresta 2π com as faces opostas identificadas, isto é,

$$(0, y_1, y_3, \dots, y_n) \equiv (2\pi, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

$$(y_1, 0, y_3, \dots, y_n) \equiv (y_1, 2\pi, y_3, \dots, y_n)$$

$$(y_1, y_2, y_3, \dots, 0) \equiv (y_1, y_2, y_3, \dots, 2\pi)$$

Entretanto, o equivalente geométrico da figura correspondente ao caso $n = 2$ é de difícil visualização. Pode-se, também, assegurar que as soluções quasi periódicas cobrem o cubo densamente. Neste hipercubo as trajetórias são retas que têm com o eixo y_k inclinação que é função de $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ e, mais precisamente,

$$\Omega_k / \{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \dots + \Omega_n^2\}^{1/2}$$

são seus cossenos diretores, para $k = 1, 2, \dots, n$.

Para aplicações posteriores, definamos a norma da derivada s -ésima de uma função $f(x_1, \dots, x_n) \in C^s$

$$|f|_s = \sup \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{s_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{s_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{s_n} f(x_1, \dots, x_n) \right|$$

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n \leq s$$

com $x_1, x_2, \dots, x_n$ percorrendo o domínio onde $f(x)$ é definida.

Consideremos a transformação (3.10) definida no anel $0 < a_k \leq x_k \leq b_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$), sob a condição $\det \left\{ \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right\} \neq 0$. Os

toros $x_k = \text{const.}$ são invariantes para T_0 . Consideremos, agora,

T_μ dada por (3.11), com F_k e G_k limitadas e de período 2π em $y_1, y_2, \dots, y_N$. Faremos, agora, a seguinte hipótese: "Tôda superfície limitada e fechada que é próxima do toro $x_k = \text{const.}$ ($k = 1, 2, \dots, N$), representada por

$$x_k = f_k(y_1, y_2, \dots, y_N) = f_k(y_1 + 2\pi, y_2 + 2\pi, \dots, y_N + 2\pi) \quad (3.12)$$

com $\partial f_k / \partial y_j$ limitados convenientemente, intercepta sua superfície imagem por T_μ ". Se admitirmos que T_μ é isovolumétrica e conserva os toros $x_k = a_k$, então, tal hipótese será, obviamente, satisfeita. Em particular, a superfície imagem do toro $x_k = \text{const.}$ deverá interceptar este toro e, portanto, $G(\vec{x}, \vec{y})$ tem, pelo menos, uma raiz $\vec{y}^0$ para cada valor fixo $\vec{x}^0$ de $\vec{x}$. É nosso desejo demonstrar que sob as condições anteriores T_μ possui superfícies limitadas e fechadas invariantes, para valores suficientemente pequenos de F_k e G_k , desde que estas funções sejam diferenciáveis até uma certa ordem conveniente s .

Teorema M: Dado um $\epsilon > 0$ e um inteiro $s \geq 1$, a transformação T_μ tem uma superfície limitada e fechada invariante

$$\begin{aligned} \vec{y} &= \vec{y}' + \vec{p}(\vec{y}') \\ \vec{x} &= \vec{x}^0 + \vec{q}(\vec{y}') \end{aligned} \quad (\text{dimensão } N) \quad (3.13)$$

onde $\vec{p}$ e $\vec{q}$ são periódicas de período 2π em $y_1, y_2, \dots, y_N$, de classe C^s e $|\vec{p}_k|_s + |\vec{q}_k|_s < \epsilon$, desde que:

a) Para a transformação T_μ , tôda superfície fechada do tipo (3.12) e sua imagem se interceptam.

b) No anel $0 < a_k \leq x_k \leq b_k$, $b_k - a_k \geq 1$, pode ser encontrado $C_0 > 1$, tal que

$$\frac{1}{N! C_0^N} \leq \left| \det \left\{ \frac{\partial \alpha_k(\vec{x})}{\partial x_j} \right\} \right| < N! C_0^N \quad (3.14)$$

Será possível determinar $\delta_0(\epsilon, s, C_0) > 0$ e um inteiro $m(s)$ tais que $F_k, G_k \in C^m$ e

$$\begin{aligned} |F_k|_0 + |G_k|_0 &< \delta_0 \\ |a_k|_m + |F_k|_m + |G_k|_m &< C_0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Além disto, asseguramos que a transformação induzida sobre a superfície (3.13) é dada por

$$\bar{y}_k = y'_k + \alpha_k(\vec{x}^0) = y'_k + \omega_k \quad (3.16)$$

Mais precisamente, dados ω_k satisfazendo às relações

$$\alpha_k(\vec{a}) + \varepsilon < \omega_k < \alpha_k(\vec{b}) - \varepsilon \quad (3.17)$$

para as quais

$$\left| \sum_{k=1}^N j_k \omega_k - 2\pi j_{N+1} \right| \geq \varepsilon \left(\sum_{k=1}^N |j_k| \right)^{-3/2} \quad (3.18)$$

para todos os inteiros j_k não simultaneamente nulos, existe uma superfície (3.13) com $\alpha_k(\vec{x}^0) = \omega_k$ (números de rotação).

Vamos, inicialmente, nos ocupar de um teorema mais simples, que diz respeito à transformação

$$\begin{aligned} x_k^* &= x_k + g_k(\vec{x}, \vec{y}) \\ T: \quad y_k^* &= y_k + x_k + f_k(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

definida em $0 < a_k \leq x_k \leq b_k$, onde f_k e g_k são periódicas de período 2π em $y_1, y_2, \dots, y_N$ e $b_k - a_k \geq \frac{1}{C_0}$. Admitiremos

$$|f| + |g| < \delta_0 \quad (3.19)$$

e

$$|D^m f_k| + |D^m g_k| < C_0 \quad (3.20)$$

onde

$$D^m = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{p_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_N} \right)^{p_N} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)^{q_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial y_N} \right)^{q_N}$$

com $p_1 + p_2 + \dots + p_N + q_1 + q_2 + \dots + q_N = m$.

Os números de rotação ω_k serão escolhidos de tal forma que

$$a_k + \varepsilon < \omega_k < b_k - \varepsilon \quad (3.21)$$

e tais a satisfazer (3.18) na forma

$$\left| \sum j_k \omega_k - 2\pi j_{N+1} \right| \geq \varepsilon \left(\sum |j_k| \right)^{-\sigma + \frac{5}{2}}$$

σ inteiro ≥ 4 .

Analogamente ao que foi feito na demonstração do Teorema K, iremos reduzir T , por um processo de iteração, à transformação

$$\begin{aligned} x_k^* &= x_k \\ T_0 : \\ y_k^* &= y_k + x_k \end{aligned}$$

Sejam Q , M , δ três parâmetros satisfazendo às relações

$$M = Q^v > Q > 1$$

$$\delta = M^{-2q}$$

com

$$q = \frac{4}{3}, \quad v = 6(\sigma + 1), \quad m = 3 + 11v \quad (3.22)$$

O processo de iteração convergirá de tal forma que o desvio de T_0 de cresce com δ_0^q onde n é o estágio atingido.

Os parâmetros Q_{n-1} , M_{n-1} , δ_{n-1} referentes ao $(n-1)$ -ésimo estágio de iteração serão relacionados com N , M , δ por

$$Q = Q_{n-1}^q, \quad Q_{n-1} = Q_0^{q^{n-1}}$$

$$M = M_{n-1}^q, \quad M_{n-1} = M_0^{q^{n-1}}$$

$$\delta = \delta_{n-1}^q, \quad \delta_{n-1} = \delta_0^{q^{n-1}}$$

admitindo-se a cada estágio que

$$|f_k| + |g_k| < \delta_{n-1} \quad \text{em} \quad |x_k - \omega_k| < \frac{1}{M_{n-1}} \quad (3.23)$$

$$|D^m Q_{n-1} f_k| + |D^m M_{n-1} g_k| \leq Q_{n-1}^{q_1 + q_2 + \dots + q_N + 1} M_{n-1}^{p_1 + p_2 + \dots + p_N} \quad (3.24)$$

$$(q_1 + q_2 + \dots + q_N + p_1 + p_2 + \dots + p_N = m)$$

Para $n = 1$, as condições (3.23) e (3.24) devem coincidir com (3.19) e (3.20), respectivamente. A primeira será verdade desde que δ_0 seja suficientemente pequeno. Além disso, tomando $M_0 > 1/\epsilon$ e $|x_k - \omega_k| < 1/M_0 < \epsilon$, teremos, certamente, $a_k \leq x_k \leq b_k$. A segunda requer uma pequena análise. A relação (3.20) implica que

$$|D^m Q_0 f_k| + |D^m M_0 g_k| \leq C_0 M_0$$

pois $M > Q$. Em vista desta desigualdade e sendo

$$q_1 + q_2 + \dots + q_N + p_1 + p_2 + \dots + p_N = m \geq v$$

$$Q_0^{q_1 + q_2 + \dots + q_N} M_0^{p_1 + p_2 + \dots + p_N} \geq Q_0^m \geq Q_0^v \geq M_0$$

resulta que

$$C_0 M_0 \leq C_0 Q_0^{q_1 + q_2 + \dots + q_N} M_0^{p_1 + p_2 + \dots + p_N} \leq Q_0^{q_1 + \dots + q_N + 1} M_0^{p_1 + p_2 + \dots + p_N}$$

desde que $Q_0 > C_0$. Então, para $n = 1$, deveremos tomar $M_0 > 1/\epsilon$ e $Q_0 > C_0$, isto é,

$$\delta_0 < \epsilon^{2q}, \quad C_0^{-2qv}$$

podendo-se, eventualmente, tomar um δ_0 menor ainda.

Demonstraremos, agora, um lema, análogo aos lemas referentes ao Teorema K, que diz respeito ao n-ésimo estágio da iteração mencionada.

Lema E: Seja a transformação T satisfazendo às propriedades (3.19) e (3.20) e tal que toda superfície fechada regular vizinha de $x_k = \text{const.}$ e sua imagem, se interceptam. Então, para δ_0 suficientemente pequeno existe uma transformação de coordenadas

$$x_k = \xi_k + u_k(\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

$$y_k = \eta_k + v_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \quad (3.25)$$

para $|\xi_k - \omega_k| < \frac{1}{M_{n-1}} - \frac{1}{M} > \frac{1}{M}$, satisfazendo

$$|v_k|_1 + |u_k|_1 < \frac{1}{Q} \quad (3.26)$$

e tal que, em

$$|\xi_k - \omega_k| < \frac{1}{M}$$

a transformação T toma, nas coordenadas $(\vec{\xi}, \vec{\eta})$, a forma

$$\xi_k^* = \xi_k + \phi_k(\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

$$\eta_k^* = \eta_k + \xi_k + \psi_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \quad (3.27)$$

onde

$$|\phi_k| + |\psi_k| < \delta = \delta_{n-1}^q \quad \text{em} \quad |\xi_k - \omega_k| < \frac{1}{M} \quad (3.28)$$

e

$$|D_{\vec{n}}^{\vec{p}} D_{\vec{\xi}}^{\vec{q}} Q \phi_k| + |D_{\vec{n}}^{\vec{p}} D_{\vec{\xi}}^{\vec{q}} M \psi_k| < Q^{p_1+p_2+\dots+p_N+1} M^{q_1+q_2+\dots+q_N} \quad (3.29)$$

para $p_1 + p_2 + \dots + p_N + q_1 + q_2 + \dots + q_N = m$.

Para poder demonstrar tal lema é necessária uma certa preparação de elementos a serem usados frequentemente. Para isso torna-se imperiosa a demonstração de dois lemas cujo espírito baseia-se na construção de soluções de equações diferenciais não lineares por processos discretos (Moser, 1961, 1962).

Lema E₁: Seja a equação diferença:

$$S(\vec{y}, \vec{\omega}) - S(\vec{y}) = F(\vec{y}) \quad (3.30)$$

onde S e F são supostas periódicas de período 2π em relação a $y_1, y_2, \dots, y_N$ e de média nula, o vetor $\vec{\omega}$ satisfazendo à relação

$$|\sum_{\vec{j} \neq \vec{0}} \vec{j} \cdot \vec{\omega} - 2\pi j_{N+1}| \geq \epsilon \left(\sum_{k=1}^{N'} |j_k| \right)^{-\tau + 3/2} \quad (3.31)$$

onde $\tau = \sigma - 1 \geq 3$, σ inteiro. Então, se $F(\vec{y})$ tiver $\tau \geq 3$ derivadas contínuas, a equação (3.30) tem uma solução contínua, tal que

$$|S(F)|_0 \leq \frac{C}{\epsilon} |F|_{\tau} \quad (3.32)$$

com C uma constante independente de qualquer parâmetro. Além disto, poderemos tomar

$$S(0) = 0$$

Demonstração: Usando para F a série de Fourier

$$F = \sum_{\vec{j} \neq \vec{0}} F_{\vec{j}} e^{i \vec{j} \cdot \vec{y}}$$

a solução é imediata

$$S = \sum_{\vec{j} \neq \vec{0}} \frac{F_{\vec{j}}}{e^{i \vec{j} \cdot \vec{\omega}} - 1} e^{i \vec{j} \cdot \vec{y}} \quad (3.33)$$

Em vista de (3.31) é necessária uma estimativa dos coeficientes. Como F tem τ derivadas contínuas, então

$$|F_{\vec{j}}| \leq \left(\sum_{k=1}^N |j_k| \right)^{\tau} |F|_{\tau} \quad (\sum |j_k| \neq 0)$$

Por outro lado

$$|e^{i \vec{j} \cdot \vec{\omega}} - 1| = 2 \sin \left| \frac{\vec{j} \cdot \vec{\omega} - 2\pi j_{N+1}}{2} \right| \geq \frac{2}{\pi} \epsilon \left(\sum_{k=1}^N |j_k| \right)^{-\tau + 3/2}$$

e, portanto

$$\left| \frac{F_{\vec{j}}}{e^{i \vec{j} \cdot \vec{\omega}} - 1} \right| \leq \frac{\pi}{2\epsilon} \left(\sum_{k=1}^N |j_k| \right)^{-3/2} |F|_{\tau}$$

Então, a série (3.33) converge absolutamente e (3.32) fica provada pondo

$$C = \pi \sum_{\vec{j} \neq \vec{0}} \left(\sum_{k=1}^N |j_k| \right)^{-3/2}$$

Observação: Se $F(\vec{x}, \vec{y})$ é função periódica de período 2π em $\vec{y}$ e média nula, então a equação diferença

$$S(\vec{x}, \vec{y} + \vec{\omega}) - S(\vec{x}, \vec{y}) = F(\vec{x}, \vec{y})$$

pode ser resolvida como antes e obtemos

$$|S|_0 \leq \frac{C}{\epsilon} |D_{\vec{y}}^{\vec{\tau}} F|_0 \quad (3.34)$$

Vamos, agora, introduzir uma operação de alisamento para funções de $2N$ variáveis que aproxima funções $F(\vec{x}, \vec{y})$ por funções mais lisas. Seja $F(\vec{x}, \vec{y})$ uma função contínua no anel

$$\begin{aligned} a_k &< x_k < b_k \\ -\infty &< y_k < +\infty \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

O grau de aproximação em $\vec{x}$ e $\vec{y}$ será mantido independente e medido por dois parâmetros $M, Q > 1$. A função alisada $T_{M,Q}(F)$ será definida no anel menor

$$\alpha_k = a_k + \frac{1}{M} < x_k < b_k - \frac{1}{M} = \beta_k, \quad -\infty < y_k < +\infty$$

onde suporemos $2/M < b_k - a_k$ e será dada por

$$T_{M,Q}(F(\vec{x}, \vec{y})) = \int_{a_k < \xi_k < b_k} \dots \int_{-\infty < \eta_k < +\infty} X_{M,Q}(\vec{x} - \vec{\xi}, \vec{y} - \vec{\eta}) F(\vec{\xi}, \vec{\eta}) d\vec{\xi} d\vec{\eta} \quad (3.35)$$

com $d\vec{\xi} = d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_N$ e $d\vec{\eta} = d\eta_1 d\eta_2 \dots d\eta_N$. O "núcleo" $X_{M,Q}$ será tomado da forma

$$X_{M,Q}(\vec{x}, \vec{y}) = M \times (M \vec{x}) \cdot Q \times (Q \vec{y})$$

onde $X(\vec{x})$ é uma função C^∞ satisfazendo

$$X(\vec{x}) \equiv 0 \quad \text{para} \quad |x_k| > 1 \quad (3.36)$$

$$e \quad \int \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^{k_1} \dots x_N^{k_N} X(\vec{x}) d\vec{x} = \begin{cases} 1 & \text{para } \sum k_i = 0 \\ 0 & \text{para } 0 < \sum k_i < m \end{cases} \quad (3.37)$$

onde $k_i \geq 0$ e m é um número fixo. Então, $T_{M,Q}$ dependerá de m e este será escolhido em harmonia com (3.22).

A condição (3.36) mostra que $X_{M,Q}$ se anula para $|y_k| > \frac{1}{Q}$ e $|x_k| > \frac{1}{M}$. Então, o intervalo de integração em (3.35) pode ser restringido a um intervalo contido em $a_k < x_k < b_k$ pois $a_k < x_k < \beta_k$. Logo, (3.35) pode ser escrita, introduzindo novas variáveis

$$T_{M,Q}(F(\vec{x}, \vec{y})) = \int \int \dots \int \int \int \dots \int_{|u_k| < 1} \int_{|v_k| < 1} x_{1,1}(\vec{u}, \vec{v}) F(\vec{x} - \frac{\vec{u}}{M}, \vec{y} - \frac{\vec{v}}{Q}) d\vec{u} d\vec{v} \quad (3.38)$$

Finalmente, a condição (3.37) mostra que polinômios $P(\vec{x}, \vec{y})$ de grau menor que m são invariantes, isto é,

$$T_{M,Q}(P(\vec{x}, \vec{y})) = P(\vec{x}, \vec{y}) \quad (3.39)$$

Podemos, agora, demonstrar o

Lema E₂: Se $F(\vec{x}, \vec{y})$ é contínua em $a_k < x_k < b_k$, então, em $a_k < x_k < \beta_k$ verifica-se

$$|D_{\vec{x}}^{\vec{q}} D_{\vec{y}}^{\vec{p}} T_{Q,M}(F)| \leq \tilde{C} Q^{p_1+p_2+\dots+p_N} M^{q_1+q_2+\dots+q_N} \sup_{a_k \leq x_k \leq b_k} |F| \quad (3.40)$$

para todos os inteiros $p_1, p_2, \dots, q_N$ e $\tilde{C}$ uma constante que depende da função X , de $\vec{p}$ e de $\vec{q}$. Se $F(\vec{x}, \vec{y}) \in C^m$, então, em $a_k < x_k < \beta_k$ verifica-se

$$|F - T_{Q,M}(F)| \leq C Q^{-p_1-p_2-\dots-p_N} M^{-q_1-q_2-\dots-q_N} \sup_{\substack{p_1+p_2+\dots+q_N=m \\ a_k < x_k < b_k}} |D_{\vec{x}}^{\vec{q}} D_{\vec{y}}^{\vec{p}} F| \quad (3.41)$$

onde a constante C depende da função X , mas é independente de Q e M .

Demonstração: De (3.35) segue-se, imediatamente, que

$$|D_{\vec{x}}^{\vec{q}} D_{\vec{y}}^{\vec{p}} T_{Q,M}(F)| \leq \sup_{a_k < x_k < b_k} |F| \int \dots \int |D_{\vec{x}}^{\vec{q}} D_{\vec{y}}^{\vec{p}} X_{M,Q}(\vec{x} - \vec{\xi}, \vec{y} - \vec{\eta})| d\vec{\xi} d\vec{\eta} \leq$$

$$\leq \sup_{a_k < x_k < b_k} |F| Q^{p_1+p_2+\dots+p_N} M^{q_1+q_2+\dots+q_N} \int \dots \int |D_{\vec{x}}^{\vec{q}} X(\vec{x})| d\vec{x} \int \dots \int |D_{\vec{y}}^{\vec{p}} X(\vec{y})| d\vec{y}$$

o que prova (3.40).

Consideremos agora (3.38), desenvolvendo $F(\vec{x} - \frac{\vec{u}}{M}, \vec{y} - \frac{\vec{v}}{Q})$ em série de Taylor ao redor de $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$, até termos de ordem $< m$, com resto. Como $T_{Q,M}$ conserva polinômios de grau $< m$, apenas o resto $R_m(\vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{v})$ daquela série contribuirá para $F - T_{Q,M}(F) = (I - T_{Q,M})F$. Aquêlê resto é estimado fãcilmente:

$$|R_m| \leq \sup_{\substack{p_1 + p_2 + \dots + p_N = m \\ (\vec{u}, \vec{v})}} N \frac{|u_1^{q_1} u_2^{q_2} \dots u_N^{q_N} v_1^{p_1} v_2^{p_2} \dots v_N^{p_N}|}{Q^{q_1 + q_2 + \dots + q_N} M^{p_1 + p_2 + \dots + p_N}} |D_{\vec{x}}^{\vec{q}} D_{\vec{y}}^{\vec{p}} F(\vec{\xi}, \vec{\eta})|$$

onde

$$|\xi_k - x_k| < \frac{1}{M}, \quad |\eta_k - y_k| < \frac{1}{Q}$$

e

$$|u_k| < 1, \quad |v_k| < 1 \dots$$

Logo, de (3.38) obtemos

$$|(I - T_{Q,M}) F(\vec{x}, \vec{y})| \leq C \sup_{\substack{p_1 + \dots + p_N = m \\ (\vec{u}, \vec{v})}} Q^{-p_1 - p_2 - \dots - p_N} M^{-q_1 - q_2 - \dots - q_N} |D_{\vec{x}}^{\vec{q}} D_{\vec{y}}^{\vec{p}} F(\vec{\xi}, \vec{\eta})|$$

onde

$$C = N \sup_{p_1 + \dots + p_N = m} \int \dots \int |u_1^{q_1} u_2^{q_2} \dots u_N^{q_N} v_1^{p_1} v_2^{p_2} \dots v_N^{p_N} x_{1,1}(\vec{u}, \vec{v})| d\vec{u} d\vec{v}$$

o que prova o lema.

Observação: Para $a_k < x_k < b_k$ temos, com $p_1 + p_2 + \dots + p_N = \tau$, $q_1 + q_2 + \dots + q_N = 0$,

$$S^* = |S(T_{Q,M}(F(\vec{x}, \vec{y})))| \leq \frac{C}{\epsilon} |D_{\vec{y}}^{\vec{\tau}} T_{Q,M}(F)|_0 \leq \tilde{C} C \frac{Q^\tau}{\epsilon} |F|_0$$

e, escolhendo $Q > \frac{1}{\epsilon}$, $\sigma = \tau + 1$, resulta

$$S^* \leq \tilde{C} C Q^{\tau+1} |F|_0 = \tilde{C} C Q^\sigma |F|_0 \quad (3.42)$$

Da mesma forma

$$S^{*2} = |S(S(T_{Q,M}(F(\vec{x}, \vec{y}))))| \leq \tilde{C} C Q^{2\sigma} |F|_0 \quad (3.43)$$

É, também, fãcil mostrar que é possível construir uma função $X(\vec{x})$ com as propriedades enunciadas.

Prova do Lema E: Consideremos, então, a transformação

$$\begin{aligned} x_k^* &= x_k + g_k(\vec{x}, \vec{y}) \\ T : \\ y_k^* &= y_k + x_k + f_k(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

em $|x_k - \omega_k| < \frac{1}{M_{n-1}}$, que deve ser transformada por meio de

$$\begin{aligned} x_k &= \xi_k + u_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \\ y_k &= \eta_k + v_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

para nova transformação

$$\begin{aligned} T^* : \\ \xi_k^* &= \xi_k + \phi_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \\ \eta_k^* &= \eta_k + \xi_k + \psi_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \end{aligned} \quad (3.46)$$

que é mais próxima de T_0 ($g_k = f_k = 0$).

Das relações acima decorrem as equações

$$\begin{aligned} \xi_k + \phi_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) + u_k(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}^*) &= \xi_k + u_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) + g_k(\vec{\xi} + \vec{u}, \vec{\eta} + \vec{v}) \\ \eta_k + \xi_k + \psi_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) + v_k(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}^*) &= \eta_k + v_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) + \xi_k + u_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) + f_k(\vec{\xi} + \vec{u}, \vec{\eta} + \vec{v}) \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \phi_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) + u_k(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}^*) &= u_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) + g_k(\vec{\xi} + \vec{u}(\vec{\xi}, \vec{\eta}), \vec{\eta} + \vec{v}(\vec{\xi}, \vec{\eta})) \\ \psi_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) + v_k(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}^*) &= v_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) + u_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) + f_k(\vec{\xi} + \vec{u}(\vec{\xi}, \vec{\eta}), \vec{\eta} + \vec{v}(\vec{\xi}, \vec{\eta})) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Vamos, agora, linearizar as equações que resultam de $\phi_k = \psi_k = 0$ supondo f_k, g_k, u_k, v_k e $|x_k - \omega_k|$ da mesma ordem de grandeza μ . Os termos que forem da ordem $\geq \mu^2$ serão desprezados.

Desta forma, obteremos

$$\begin{aligned} v_k(\vec{\xi}, \vec{\eta} + \vec{\omega}) - v_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) &= u_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) + f_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \\ u_k(\vec{\xi}, \vec{\eta} + \vec{\omega}) - u_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) &= g_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \end{aligned} \quad (3.48)$$

que são equações diferenças. A segunda, que é do tipo tratado nos lemas anteriores, somente pode ser resolvida se $g_k(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ tiver média nula nos $\vec{\eta}$. E, de qualquer forma, as funções f_k e g_k deverão ser convenientemente alisadas, de modo a contrabalançar a perda de derivadas. Então, definiremos u_k e v_k como soluções do sistema

$$u_k(\xi, \vec{n} + \vec{\omega}) - u_k(\xi, \vec{n}) = T(g_k - \bar{g}_k) \quad (3.49)$$

$$v_k(\xi, \vec{n} + \vec{\omega}) - v_k(\xi, \vec{\omega}) = u_k(\xi, \vec{\omega}) + T(f_k(\xi, \vec{n})), \quad \bar{v}_k = 0$$

onde $T = T_{Q,M}$ é o operador definido anteriormente e $\bar{g}_k$ e $\bar{u}_k$ indicam as médias em relação aos $\vec{n}$.

Se efetuarmos a média da segunda de (3.49) obteremos

$$\bar{u}_k + \overline{T(f_k)} = 0$$

e, portanto, da primeira:

$$u_k = S(T(g_k)) + \bar{u}_k = S(T(g_k)) - \overline{T(f_k)} \quad (3.50)$$

Da segunda de (3.49) vem, então

$$v_k = S(u_k + T(f_k)) = S(S(T(g_k))) + S(T(f_k)) \quad (3.51)$$

As relações (3.50) e (3.51) definem, agora, u_k e v_k no anel

$$|\xi_k - \omega_k| < \frac{1}{M_{n-1}} - \frac{1}{M} = \mu.$$

Vejamos a verificação de (3.26), (3.28) e (3.29)

a) Utilizando (3.42) e (3.43) e considerando (3.28), vem que

$$|u_k| + |v_k| \leq C_1 Q^{2\sigma} (|f_k|_0 + |g_k|_0) < C_1 Q^{2\sigma} \delta_{n-1} = C_1 Q^{2\sigma} M^{-2} \quad (3.52)$$

e, análogamente

$$\begin{aligned} |D_{\xi}^+ u_k| + |D_{\xi}^+ v_k| &\leq C_2 Q^{2\sigma} M^{-1} \\ |D_{\eta}^+ u_k| + |D_{\eta}^+ v_k| &\leq C_2 Q^{2\sigma} M^{-1} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Como admitimos $v > 2\sigma + 1$, então

$$\begin{aligned} |u_k| + |v_k| &< \frac{1}{Q^M} \\ |u_k|_1 + |v_k|_1 &< \frac{1}{Q} \end{aligned} \quad (3.54)$$

e que prova (3.37). Segue-se que u_k , v_k são definidas no anel

$$|\xi_k - \omega_k| < \frac{1}{M_{n-1}} - \frac{1}{M} > \frac{3}{M}$$

desde que se tome $M_0 > 4^{\frac{1}{(q+1)}}$ e nesse vale (3.52). Pelo teorema das funções implícitas, a imagem de $|\xi_k - \omega_k| < \frac{3}{M}$ sujeita à transformação (3.45) cobrirá, no mínimo, o anel $|x_k - \omega_k| < \frac{2}{M}$ e, portanto, a

transformação inversa é definida univocamente em $|x_k - \omega_k| < \frac{2}{M}$ e é continuamente diferenciável nessa região se $M(\geq M_0)$ for escolhido suficientemente grande. Logo, a transformação (3.46) é definida e diferenciável em $|x_k - \omega_k| < \frac{1}{M}$ pois (3.45) transforma essa região em

$$|x_k - \omega_k| \leq |\xi_k - \omega_k| + |u_k| < \frac{1}{M} + \frac{1}{Q M}$$

e (3.44) em

$$|x_k^* - \omega_k| < |x_k - \omega_k| + \delta_{n-1} < \frac{1}{M} + \frac{1}{Q M} + \frac{1}{M^2} < \frac{2}{M}$$

onde a transformação inversa de (3.46) é univocamente definida

b) O cálculo das estimativas de $|\phi_k|$ e $|\psi_k|$ em

$$|\xi_k - \omega_k| < \frac{1}{M}$$

faz uso da hipótese de que toda superfície fechada vizinha de $x_k = \text{constante}$, ou seja, $\xi_k = \xi_k^0$ tem superfície imagem

$$\xi_k^* = \xi_k^0 + \phi_k(\vec{\xi}^0, \vec{n})$$

que encontra $\xi_k = \xi_k^0$ e, portanto, $\phi_k(\vec{\xi}^0, \vec{n})$ tem, pelo menos, um zero em $\vec{n}$. Decorre que

$$\sup_{\vec{n}} |\phi_k(\vec{\xi}^0, \vec{n})| \leq \text{osc}_{\vec{n}} \phi_k(\vec{\xi}^0, \vec{n}) \leq 2 \sup_{\vec{n}} |\phi_k(\vec{\xi}^0, \vec{n}) + z_k(\vec{\xi}^0)|$$

onde $z_k(\vec{\xi})$ são funções arbitrárias de $\vec{\xi}$ e "osc" indica a amplitude de oscilação da função ϕ_k que é periódica em $\vec{n}$. Por conveniência tomaremos

$$z_k(\vec{\xi}) = - \overline{T(g_k(\vec{\xi}, \vec{n}))}.$$

Obtemos de (3.47)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\phi_k(\vec{\xi}, \vec{n})|_0 &\leq |\phi_k(\vec{\xi}, \vec{n}) - \overline{T(g_k(\vec{\xi}, \vec{n}))}|_0 = \\ &= |u_k(\vec{\xi}, \vec{n}) - u_k(\vec{\xi}^*, \vec{n}^*) + g_k(\vec{\xi} + \vec{u}, \vec{n} + \vec{v}) - \overline{T(g_k(\vec{\xi}, \vec{n}))}|_0 \end{aligned}$$

Usando, agora, sucessivamente (3.49)₁ e as estimativas (3.53), vem finalmente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\phi_k(\vec{\xi}, \vec{n})|_0 &\leq c_2 Q^{2\sigma+1} M^{-2} |\xi_k - \omega_k| + |u_k|_1 (|\phi_k|_0 + |\psi_k|_0) + \\ &+ |T(g_k(\vec{x}, \vec{y}))|_1 (|u_k|_0 + |v_k|_0) + |(I - T)(g_k(\vec{x}, \vec{y}))|_0 \end{aligned}$$

onde a norma dos termos indicados como funções de $(\vec{x}, \vec{y})$ indica o fato de serem definidas no anel $|\xi_k - \omega_k| < \frac{1}{M_{n-1}} - \frac{1}{M}$. Análogamente obtemos, subtraindo $(3.48)_1$ de $(3.47)_2$

$$|\psi_k(\vec{\xi}, \vec{\eta})|_0 \leq C_2 Q^{2\sigma+1} M^{-2} |\xi_k - \omega_k| + |v_k|_1 (|\phi_k|_0 + |\eta_k|_0) + \\ + |T(f_k(\vec{x}, \vec{y}))|_1 (|u_k|_0 + |v_k|_0) + |(I - T)(f_k(\vec{x}, \vec{y}))|_0$$

Somando essas duas estimativas e considerando os resultados do Lema E_2 , isto é,

$$|T(f_k)|_1 \leq C_3 M |f_k|_0 < \frac{C}{M}$$

$$|T(g_k)|_1 \leq \frac{C}{M}$$

e com (3.24)

$$|\phi_k|_0 + |\psi_k|_0 \leq C_4 (Q^{2\sigma+1} M^{-3} + Q_{n-1}^{1+(1-q)m}) \quad (3.55)$$

Mas

$$C_4 Q^{2\sigma+1} M^{-3} = C_4 M^{\frac{2\sigma+1}{v}-3} < \frac{1}{2} M^{-2q}$$

para M_0 suficientemente grande e

$$v > \frac{2\sigma+1}{3-2q} = 6\sigma+3 \quad (3.56)$$

Também:

$$C_4 Q_{n-1}^{1+(1-q)m} < \frac{1}{2} M^{-2q} = \frac{1}{2} Q_{n-1}^{-2q^2 v}$$

desde que se tenha

$$m(q-1) > 1 + 2q^2 v \quad (3.57)$$

o que é verificado. Logo, de (3.55) vem

$$|\phi_k|_0 + |\psi_k|_0 < M^{-2q} = \delta$$

e isto prova (3.28).

c) Finalmente, vamos provar (3.29).

Introduzindo

$$\tilde{x}_k = M x_k, \quad \tilde{\xi}_k = M \xi_k, \quad \tilde{y}_k = Q y_k, \quad \tilde{\eta}_k = Q \eta_k$$

a transformação T torna-se

$$\begin{aligned} \tilde{T} : \quad \bar{x}_k^* &= \bar{x}_k + \bar{g}_k(\bar{x}, \bar{y}) \quad , \quad \bar{g}_k = M g_k \\ \bar{y}_k^* &= \bar{y}_k + \frac{Q}{M} \bar{x}_k + \bar{f}_k(\bar{x}, \bar{y}) \quad , \quad \bar{f}_k = Q f_k \end{aligned} \quad (3.58)$$

De (3.24), para $p_1 + p_2 + \dots + p_N + q_1 + q_2 + \dots + q_N = m$,

$$\begin{aligned} |D_{\bar{x} \bar{y}}^{\vec{p} \vec{q}} Q f_k| + |D_{\bar{x} \bar{y}}^{\vec{p} \vec{q}} M g_k| &\leq Q_{n-1} \frac{M}{M_{n-1}} \left(\frac{Q_{n-1}}{Q}\right)^{q_1+q_2+\dots+q_N} \left(\frac{M_{n-1}}{M}\right)^{p_1+p_2+\dots+p_N} \leq \\ &\leq Q_{n-1} \frac{M}{M_{n-1}} \left(\frac{Q_{n-1}}{Q}\right)^m = Q_{n-1}^{1+(1-q)(m-v)} \leq 1 \end{aligned}$$

Por outro lado

$$|Q f_k| + |M g_k| \leq M \delta_{n-1} = \frac{1}{M} \leq 1$$

para $|x_k - \omega_k| < \frac{1}{M_{n-1}}$. Logo $\bar{f}_k$ e $\bar{g}_k$ são definidas para todo $\bar{y}$ real e na região

$$|\bar{x}_k - M \omega_k| < \frac{M}{M_{n-1}} > 1$$

são limitadas por 1 assim como suas derivadas de ordem m . Pelo teorema da média, aplicado sucessivamente a tôdas as derivadas até aquela ordem, resultará

$$|\bar{f}_k(\bar{x}, \bar{y})|_m + |\bar{g}_k(\bar{x}, \bar{y})|_m < C_5$$

e a constante C_5 depende só de m . A transformação $\tilde{T}$ (3.58) será, pois, tal que

$$|\bar{x}_k + \bar{g}_k|_m + |\bar{y}_k + \frac{Q}{M} \bar{x}_k + \bar{f}_k|_m < C_6$$

o que escrevemos abreviadamente

$$|\tilde{T}|_m < C_6.$$

Para a transformação de coordenadas (3.45), na forma

$$\begin{aligned} \bar{x}_k &= \bar{\xi}_k + \bar{u}_k(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \\ \bar{y}_k &= \bar{\eta}_k + \bar{v}_k(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \end{aligned} \quad \bar{W} :$$

obteremos, análogamente, para $p_1 + p_2 + \dots + p_N + q_1 + q_2 + \dots + q_N \leq m + 2\sigma$,

$$|\tilde{u}_k|_m + |\tilde{v}_k|_m < C_7 M Q^{2\sigma} \delta_{n-1} = C_7 M^{-1} Q^{2\sigma} < \frac{1}{Q} < \frac{1}{4}$$

e, agora, o teorema das funções implícitas afirma a existência da transformação inversa com as derivadas até ordem m limitadas por constantes independentes de Q , M em $|x_k - \omega_k| < \frac{2}{M}$. Então,

$$|\tilde{W}|_m < 2, \quad |\tilde{W}^{-1}|_m < 2$$

e a transformação

$$\tilde{\Phi} = \tilde{W}^{-1} \tilde{T} \tilde{W}$$

é dada nas suas componentes por funções cujas derivadas até a ordem m são limitadas por uma constante C_8 independente de M e Q . Logo, para ϕ_k e ψ_k valerão as estimativas

$$|D_{\vec{\eta}}^{\vec{p}} D_{\vec{\xi}}^{\vec{q}} Q \psi_k| + |D_{\vec{\eta}}^{\vec{p}} D_{\vec{\xi}}^{\vec{q}} M \phi_k| < C_8 Q^{p_1+p_2+\dots+p_N} M^{q_1+q_2+\dots+q_N}$$

para $p_1 + p_2 + \dots + p_N + q_1 + q_2 + \dots + q_N \leq m$, em $|\xi_k - \omega_k| < \frac{1}{M}$ desde que se tenha $Q_0 > C_8$.

O Lema E está inteiramente demonstrado.

A seguir vamos mostrar que o Teorema M é consequência do Lema E, no caso em que $\alpha_k(\vec{x}) = x_k$, $s = 1$. Indiquemos

$$\begin{aligned} x_k^* &= x_k + g_k(\vec{x}, \vec{y}) \\ T^0 : \quad y_k^* &= y_k + x_k + f_k(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned} \quad (a_k \leq x_k \leq b_k)$$

$$\begin{aligned} T^\infty : \quad x_k^* &= x_k \\ y_k^* &= y_k + x_k \end{aligned}$$

e $|f_k| + |g_k| < \delta_0$ para $|T^0 - T^\infty| < \delta_0$.

O Lema E afirma que existe uma transformação

$$\begin{aligned} W_1 : \quad x_k &= \xi_k + u_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \\ y_k &= \eta_k + v_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \end{aligned}$$

que leva T^0 em T^1 por

$$T^1 = W_1^{-1} T^0 W_1$$

onde, formalmente

$$|T^1 - T^\infty| < \delta_0^q = \delta_1$$

Repetindo o processo de redução de T^0 definida num anel sempre menor, obtemos

$$T^n = W_n^{-1} T^{n-1} W_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.59)$$

com

$$|T^n - T^\infty| < \delta_n = \delta_{n-1}^q \quad (3.60)$$

Se $(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ são as coordenadas relativas a T^n , então, esta é definida em

$$|\xi_k - \omega_k| < \frac{1}{M_n} = \frac{1}{M_{n-1}^q} \quad (3.61)$$

Em virtude de (3.26) a transformação W_n de coordenadas do $(n-1)$ -ésimo estágio para o n -ésimo, se aproxima da transformação idêntica de uma forma que pode ser escrita

$$|W_n - I|_1 < \frac{1}{Q_n} = \frac{1}{Q_{n-1}^q} \quad (3.62)$$

As relações (3.60) e (3.61) mostram que sobre o toro $\xi_k = \omega_k$, T^n converge para T^∞ que é uma rotação $\eta_k^* = \eta_k + \omega_k$. A relação entre $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ (de T^n) e $\vec{x}, \vec{y}$ (de T^0) será dada por

$$S_n = W_1 W_2 \dots W_n$$

e

$$T^n = S_n^{-1} T^0 S_n$$

como decorre imediatamente de (3.59).

A transformação S_n é definida em $|\xi_k - \omega_k| < \frac{1}{M_n}$ e reduz este ao anel menor $|x_k - \omega_k| < \frac{1}{M_0}$. Escrevendo S_n na forma

$$x_k = \xi_k + p_k^n(\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

$$y_k = \eta_k + q_k^n(\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

será suficiente mostrar que as funções p_k^n e q_k^n e suas derivadas primeiras convergem para funções $p_k(\vec{\eta})$ e $q_k(\vec{\eta})$ uniformemente. Se isto for verdade, a superfície invariante do Teorema M (no caso especi

al $\alpha_k = x_k$ e $s = 1$) será

$$x_k = u_k + p_k(\vec{n})$$

$$y_k = v_k + q_k(\vec{n})$$

Para mostrar isto, verificamos imediatamente que

$$|p_k^n| + |q_k^n| < \sum_{t=1}^n (|u_t| + |v_t|) < \sum_{t=1}^n \frac{1}{Q_t}$$

e, para Q_0 suficientemente grande, o último termo pode ser tornado $< \epsilon$. A convergência das derivadas de p_k^n e q_k^n requer um pouco mais de cuidado. Indiquemos a matriz jacobiana de W_n por J_n . Como se tem

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} &= \delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j}, & \frac{\partial x_k}{\partial \eta_j} &= \frac{\partial u_k}{\partial \eta_j} \\ \frac{\partial y_k}{\partial \xi_j} &= \frac{\partial v_k}{\partial \xi_j}, & \frac{\partial y_k}{\partial \eta_j} &= \delta_{kj} + \frac{\partial v_k}{\partial \eta_j} \end{aligned}$$

resultará

$$J_n - I = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} & \frac{\partial u_k}{\partial \eta_j} \\ \frac{\partial v_k}{\partial \xi_j} & \frac{\partial v_k}{\partial \eta_j} \end{pmatrix}$$

O máximo do valor absoluto dos elementos dessa matriz, $|J_n - I|$, será, em virtude de (3.62), para $|u_k|_1 + |v_k|_1 < \frac{1}{Q}$:

$$|J_n - I| < \frac{1}{Q_n}$$

Agora, a matriz jacobiana G_n de S_n será, evidentemente, o produto das n matrizes $J_1, \dots, J_n$:

$$G_n = J_1 J_2 \dots J_n$$

e, por outro lado, a convergência das derivadas primeiras de p_k^n e q_k^n é equivalente à convergência do produto $J_1 J_2 \dots J_n = G_n$. Mas a matriz J_t é majorada por

$$I + \frac{1}{Q_t} U, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, basta provar a convergência do produto

$$\prod_{t=1}^{\infty} \left(I + \frac{1}{Q_t} U \right)$$

que é comutativo e, portanto, menor ou igual a

$$\prod_{t=1}^{\infty} \exp \frac{U}{Q_t} = \exp \sum_{t=1}^{\infty} \frac{U}{Q_t}$$

que certamente converge. Obtemos, também

$$|G_n - I| \leq \left| \prod_{t=1}^{\infty} \left(I + \frac{1}{Q_t} U \right) - I \right| \leq \left| \exp \left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{Q_t} U \right) - I \right| \leq \exp \frac{C_0}{Q_0} - 1 \leq \frac{C_0}{Q_0}$$

Escolhendo Q_0 suficientemente grande, obteremos

$$|G_n - I| < \epsilon$$

que mostra ser $|p_k|_s + |q_k|_s < \epsilon$ para $s = 1$, conforme o Teorema M requer.

Finalmente, podemos mostrar que a prova do Lema E fornece a prova para o Teorema M no caso em que se elimine a hipótese $\alpha_k(\vec{x}) = x_k$. Com efeito, será suficiente efetuar uma mudança de variáveis. Representemos T_μ por

$$\begin{aligned} x_k^* &= x_k + G_k(\vec{x}, \vec{y}) \\ T_\mu : \quad y_k^* &= y_k + \alpha_k(\vec{x}) + F_k(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}$$

definida em $a_k \leq x_k \leq b_k$.

Ponhamos

$$\xi_k = \alpha_k(\vec{x})$$

$$\eta_k = y_k$$

O sistema (3.63), em vista de (3.14) e (3.15)₂ tem solução e a transformação (3.63) é biunívoca admitindo m derivadas de uma dada limitação. A transformação T_μ torna-se, então

$$\begin{aligned} \xi_k^* &= \xi_k + g_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \\ T : \quad \eta_k^* &= \eta_k + \xi_k + f_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \end{aligned}$$

com

$$f_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = F_k(\vec{x}(\vec{\xi}), \vec{\eta})$$

$g_k(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \alpha_k(\vec{x} + \vec{G}(\vec{x}, \vec{y})) - \alpha_k(\vec{x}) = \alpha_k(\vec{x}(\vec{\xi})) + \vec{G}(\vec{x}(\vec{\xi}), \vec{\eta}) - \alpha_k(\vec{x}(\vec{\xi}))$
e, portanto, (3.19) e (3.20) serão satisfeitas para um C_0 conveniente. O anel onde T é definido conterá, certamente, o anel de "largura" C_0^{-1} , isto é,

$$\alpha_k(\vec{b}) - \alpha_k(\vec{a}) \geq C_0^{-1}$$

com

$$\alpha_k(\vec{a}) \leq \varepsilon_k \leq \alpha_k(\vec{b})$$

que resulta de (3.63).

A demonstração do Teorema M para $s > 1$ será feita análogamente, bastando estabelecer novas relações entre os parâmetros M, Q, δ e entre q, s, v, σ, m . Não iremos prosseguir tal tarefa pois se reduz a um sem número de repetições do que foi feito para $s = 1$. É, entretanto, importante notar que

I) Em relação ao teorema de Kolmogorov, o Teorema M é equivalente, mas não requer analiticidade da Hamiltoniana, mas sim, apenas uma diferenciabilidade até uma certa ordem (que, em geral, resultará grande, mas finita). Isto ficou evidente e resultou, naturalmente, do fato de adotarmos métodos discretos na demonstração, cuja validade se fundamenta nos Lemas E_1 e E_2 .

II) O aparecimento dos pequenos denominadores nas séries obtidas, do tipo $e^{i \vec{j} \cdot \vec{\omega}} - 1$ (vide Lema E_1) é controlada por uma estimativa do tipo (3.31). Resultados clássicos da aproximação diofantina mostram que uma tal relação, para todos os inteiros j_k , somente não será satisfeita para um conjunto de valores ω_k cuja medida, em relação à medida do hipercubo unitário $0 < \omega_k < 1$ ($k = 1, 2, \dots, n$) é da ordem de ε e vai a zero com este. Os pequenos valores possíveis de tais denominadores são contrabalançados pelo fato de que a convergência para a transformação T^∞ se dá com $\delta_0^{q^n}$.

III) Obtivemos, como no caso de dois graus de liberdade, uma condição mais geral de não-degenerescência em relação à condição

de Kolmogorov, porém menos geral daquela expressa no Teorema K. Com efeito, lembrando a definição de $\alpha_k = 2\pi\omega_k = 2\pi \frac{\Omega_k}{\Omega_n}$, $\Omega_n \neq 0$, a condição (3.18) se exprime

$$\left| \sum_{k=1}^{N+1=n} j_k \Omega_k \right| \geq \epsilon' \left(\sum_{k=1}^n |j_k| \right)^{-3/2}$$

que é equivalente à condição de Kolmogorov. Por outro lado, vejamos a que corresponde a condição $\det \left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} \right) \neq 0$, que é a (3.14). Temos

$$\alpha_k = 2\pi \frac{\frac{\partial H_0}{\partial x_k}}{\frac{\partial H_0}{\partial x_n}} (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, h))$$

e, portanto,

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} = 2\pi \frac{\frac{\partial H_0}{\partial x_n} \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_k \partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial H_0}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_n \partial x_j} + \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_n^2} \frac{\partial x_n}{\partial x_j} \right)}{\left(\frac{\partial H_0}{\partial x_n} \right)^2}$$

Mas, de $H_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = h$, vem que

$$\frac{\partial H_0}{\partial x_j} + \frac{\partial H_0}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial x_j} = 0 \quad \dots$$

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_j} = - \frac{\partial H_0}{\partial x_j} / \frac{\partial H_0}{\partial x_n} \quad \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} &= \frac{2\pi}{\left(\frac{\partial H_0}{\partial x_n} \right)^3} \left\{ \frac{\partial H_0}{\partial x_n} \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial H_0}{\partial x_n} - \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_k \partial x_n} \frac{\partial H_0}{\partial x_j} \right) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial H_0}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_n \partial x_j} \frac{\partial H_0}{\partial x_n} - \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_n^2} \frac{\partial H_0}{\partial x_j} \right) \right\} \end{aligned}$$

e como $\frac{\partial H_0}{\partial x_n} = \Omega_n$ é finito e não nulo, a condição $\det \left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} \right) \neq 0$ é

equivalente a

$$\begin{vmatrix}
 \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial H_0}{\partial x_1} \\
 \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_2 \partial x_n} & \frac{\partial H_0}{\partial x_2} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 H_0}{\partial x_n^2} & \frac{\partial H_0}{\partial x_n} \\
 \frac{\partial H_0}{\partial x_1} & \frac{\partial H_0}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial H_0}{\partial x_n} & 0
 \end{vmatrix} \neq 0$$

É claro, também, que se $\Omega_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) e se a condição de Kolmogorov fôr satisfeita, esta também será. Entretanto, pode esta ser verificada sem o ser aquela.

4. Sistemas degenerados

Vamos encerrar êste capítulo fazendo algumas observações que permitirão demonstrar, de maneira análoga ao parágrafo anterior, um teorema que é equivalente ao teorema de Arnold e ao Teorema A.

Seja μ o pequeno parâmetro que entra em H , a Hamiltoniana do problema, tal que $0 < \mu \leq 1$, mas que em geral é muito menor que um. Admitamos, ainda, alguns $\Omega_k = 0$ para $k = 1, 2, \dots, p < n$. Então definiremos, como foi feito no Teorema A, a parte "secular" H_{1s} da perturbação e a partir desta, sendo $H = H_0 + \mu (H_{1s} + H_{1p})$,

$$\Omega_k = \frac{\partial H_{1s}}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$\Omega_j = \frac{\partial H_0}{\partial x_j} \quad (j = p+1, p+2, \dots, n)$$

Então, a transformação T_μ irá poder ser escrita

$$x_k^* = x_k + \mu G_k(\vec{x}, \vec{y}) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$y_k^* = y_k + \mu \{ \alpha_k(\vec{x}) + F_k(\vec{x}, \vec{y}) \} + \beta_k \quad (k = 1, 2, \dots, p) \quad (4.1)$$

$$y_j^* = y_j + \alpha_j(\vec{x}) + \mu F_j(\vec{x}, \vec{y}) \quad (j = p+1, p+2, \dots, n)$$

definida em $0 < a_k \leq x_k \leq b_k$, $b_k - a_k \geq 1$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Nestas condições o Teorema M ainda será válido, com as seguintes modificações essenciais:

a) A transformação (3.16) deve ser substituída por

$$\bar{y}_k = y'_k + \mu \alpha_k(\vec{x}^0) = y'_k + \mu \omega_k(\vec{x}^0) \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

$$\bar{y}_j = \bar{y}'_j + \alpha_j(\vec{x}^0) = y'_j + \omega_j(\vec{x}^0) \quad (j = p+1, p+2, \dots, n)$$

e, ainda, δ_0 poderá ser escolhido independentemente de μ . Isto é importante pois se para $\mu \rightarrow 0$, tivéssemos $\delta_0 \rightarrow 0$, a demonstração perderia totalmente a sua validade.

b) A transformação T_0 será substituída por

$$x_k^* = x_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$y_k^* = \mu \alpha_k(\vec{x}) + y_k + \beta_k \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

$$y_k^* = \alpha_j(\vec{x}) + y_j \quad (j = p+1, p+2, \dots, n)$$

com

$$\mu \alpha_k(\vec{a}) < \mu \alpha_k(\vec{x}) < \mu \alpha_k(\vec{b})$$

c) O intervalo definido por (3.17) deverá ser modificado para

$$\alpha_k(\vec{a}) + \epsilon < \frac{\omega_k - \beta_k}{\mu} < \alpha_k(\vec{b}) - \epsilon$$

e, finalmente, a condição (3.18) será escrita

$$\left| \sum_{k=1}^p i_k \mu \omega_k + \sum_{j=p+1}^{n-1} i_j \omega_j - 2\pi i_n \right| \geq \mu \epsilon \left(\sum_{k=1}^{n-1} |i_k| \right)^{-3/2}$$

para todos os inteiros i_k, i_j não simultaneamente nulos.

Com estas modificações o teorema se demonstra análogamente, sem maiores problemas.

CAPÍTULO IV

QUESTÕES DE MECÂNICA CLÁSSICA

1. Movimento de um sólido com um ponto fixo

Analizaremos certas propriedades do movimento de Euler-Poincaré. Sejam ϕ (longitude do nodo), ψ (ascensão reta) e θ (inclinação) os ângulos de Euler que definem a orientação de um sistema triretangular ligado ao sólido, com origem no ponto fixo (isento de atrito).

Usando a nomenclatura usual, com

$$\begin{aligned} p &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ q &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ r &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned} \quad (1.1)$$

valem as equações de Euler

$$\begin{aligned} A\dot{p} - (B - C)qr &= 0 \\ B\dot{q} - (C - A)pr &= 0 \\ C\dot{r} - (A - B)pq &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

que admitem as integrais primeiras

$$\begin{aligned} 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= 2E = \text{const.} \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &= G^2 = \text{const.} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Estas permitem reduzir o problema a um grau de liberdade. É conveniente, para efetuar esta redução, escrever (1.2) na forma canônica. Sejam

$$\begin{aligned} p_{\phi} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = (Ap \sin \psi + Bq \cos \psi) \sin \theta + Cr \cos \theta \\ p_{\psi} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = Cr \\ p_{\theta} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = Ap \cos \psi - Bq \sin \psi \end{aligned} \quad (1.4)$$

e as variáveis $(p_\phi, p_\psi, p_\theta; \phi, \psi, \theta)$ são canônicas e a Hamiltoniana é

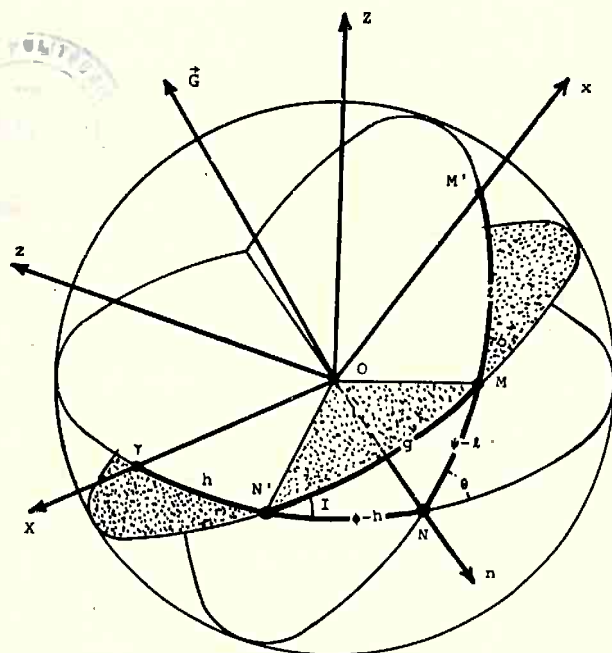
$$F_0 = \frac{1}{2A} (\sigma \sin \psi + p_\theta \cos \psi)^2 + \frac{1}{2B} (\sigma \cos \psi - p_\theta \sin \psi)^2 + \frac{1}{2C} p_\psi^2 \quad (1.5)$$

onde

$$\sigma = (p_\phi - p_\psi \cos \theta) / \sin \theta, \quad \theta \neq 0, \pi.$$

A solução da equação de Hamilton-Jacobi associada a (1.5) já foi obtida por Jacobi, Serret, Radau e outros clássicos. Entretanto, todo processo usado, recai em complicações excessivas, envolve integrais elípticas de vários tipos e, na realidade, não parece resultar em nenhuma simplificação do problema, nem do ponto de vista matemático nem físico. Provavelmente a melhor idéia está na descrição geométrica de Poincot. É nosso desejo apresentar uma redução simples que é intermediária dos tipos citados.

A figura representa uma esfera de raio unitário e centro no ponto fixo O do sólido.



Representação do Movimento de Poincot

Sobre essa esfera traçamos as intersecções de três planos: N'N plano inercial, N'M plano invariável e NM plano xy ligado ao sólido. O eixo OX é inercial e o eixo Ox é fixo no sólido. No caso, o momento angular total $\vec{G} = G \vec{\zeta}$ é constante, isto é, $G = \text{const.}$. Sua projeção $H = G \cos I$ sobre o eixo OZ inercial, também é constante, pois I é invariável. Entretanto, sua projeção $L = G \cos b$ sobre o plano xy fixo no sólido será, em geral, variável. Essas quantidades relacionam-se com (1.4) pelas equações

$$\begin{aligned} p_{\phi} &= H \\ p_{\theta} &= G \sin b \sin (\psi - \theta) \\ p_{\psi} &= L \end{aligned} \quad (1.6)$$

e os ângulos b e ψ estão indicados na figura, isto é, $\psi = \angle MM'$ e $b = \angle M'MN'$. No triângulo esférico N'NM temos

$$dg = -\sin(\psi - \theta) \sin b d\theta + \cos b d(\psi - \theta) + \cos I d(\phi - h)$$

que, multiplicada por G e, em virtude de (1.6), fornece

$$G dg + L d\psi + H dh = p_{\theta} d\theta + p_{\psi} d\psi + p_{\phi} d\phi.$$

Logo, a transformação $(p_{\phi}, p_{\psi}, p_{\theta}; \phi, \psi, \theta) \rightarrow (L, G, H; \psi, g, h)$ é completamente canônica. Nestas novas variáveis

$$F_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} \sin^2 \psi + \frac{1}{B} \cos^2 \psi \right) (G^2 - L^2) + \frac{1}{2C} L^2 \quad (1.7)$$

As equações do movimento são, pois

$$\begin{aligned} \dot{L} &= - \frac{\partial F_0}{\partial \psi} & , & & \dot{\psi} &= \frac{\partial F_0}{\partial L} \\ \dot{G} &= - \frac{\partial F_0}{\partial g} & , & & \dot{g} &= \frac{\partial F_0}{\partial G} \\ \dot{H} &= - \frac{\partial F_0}{\partial h} & , & & \dot{h} &= \frac{\partial F_0}{\partial H} \end{aligned} \quad (1.8)$$

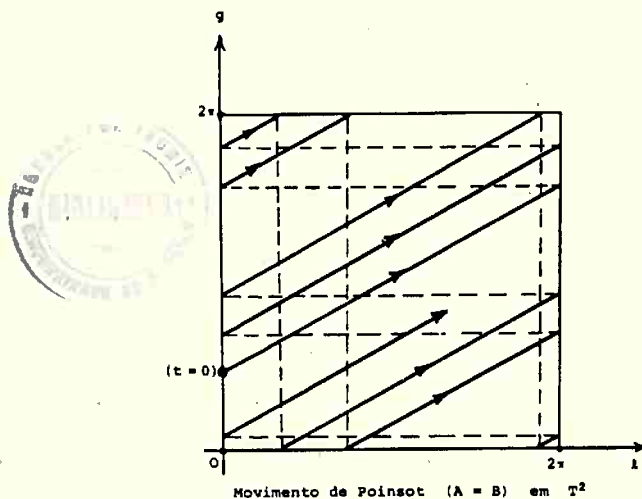
as quais mostram, em particular, que

$$\begin{aligned} G &= \text{const.} = G_0 \\ H &= \text{const.} = H_0 \\ h &= \text{const.} = h_0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

como era de se esperar. A primeira é a integral do momento angular e as duas outras mostram que o plano por O perpendicular a G é invariável. No caso $A = B$ a integração é imediata:

$$\begin{aligned} L &= \text{const.} = L_0 \\ \ell &= -L_0 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C} \right) t + \ell_0 = \omega_1 t + \ell_0 \\ g &= \frac{G}{A} t + g_0 = \omega_2 t + g_0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Se $A = B = C$, o único ângulo variável é g , como é fisicamente evidente. O movimento (1.10) é, em geral, quasi periódico e, em virtude da não degenerescência, ele será mantido sob perturbações suficientemente pequenas (por exemplo: $B - A = \epsilon A$, $0 < \epsilon < 1$).



Consideremos o caso geral, supondo $C > B > A > 0$. A Hamiltoniana F_0 é constante ao longo de toda solução de (1.8). Dadas as condições iniciais $L_0, G_0, H_0, \ell_0, g_0, h_0$, toda solução

$$\begin{aligned} \ell &= \ell(\ell_0, G_0, L_0; t) \\ g &= g(\ell_0, G_0, L_0; t) \\ L &= L(\ell_0, G_0, L_0; t) \end{aligned}$$

produzirá

$$\left(\frac{1}{A} \sin^2 \ell + \frac{1}{B} \cos^2 \ell \right) (G^2 - L^2) + \frac{1}{C} L^2 = 2E(\ell_0, G_0, L_0) = \text{const.} \quad (1.11)$$

e o valor de E somente depende de l_0, G_0, L_0 .

Fixados os parâmetros A, B e C e G_0 , as curvas definidas por (1.11) no plano de fase (l, L) só dependem de E . O problema fica reduzido a um grau de liberdade e a análise da totalidade dos movimentos se faz análogamente ao movimento de um pêndulo simples. Com efeito, se $C > B > A > 0$, as curvas (1.11) no plano (l, L) têm a forma esquematizada na figura, simétrica em relação a $L = 0$ e $l = \pi/2$.

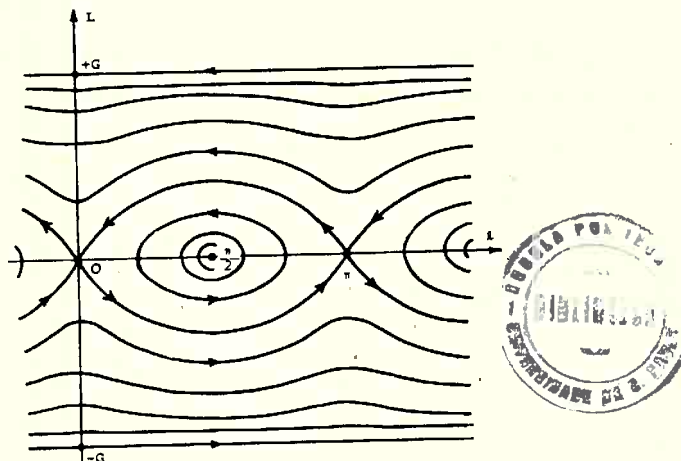


Diagrama isoenérgico do Movimento de Poinsot

Verificamos a existência de um ponto elíptico $(\pi/2, 0)$ e dois pontos hiperbólicos $(0, 0), (\pi, 0)$. O primeiro é uma rotação ao redor de Ox e os outros dois ao redor de Oy . Rotações ao redor de Oz correspondem às duas retas $L = \pm G = \text{const.}$. A estabilidade ou instabilidade dos vários movimentos decorre imediatamente. As trajetórias que unem os pontos hiperbólicos são movimentos assintóticos que tendem ou departem de movimentos estacionários instáveis.

Consideremos, agora, o sólido sujeito a um campo gravitacional constante, tomando o plano horizontal como referência (plano $N'N$). Se w é o peso do sólido e z_G a cota do seu baricentro em relação a esse plano, o potencial de gravidade é $V = wz_G$. Sejam (x_G, y_G, z_G) as coordenadas de G relativas ao sistema $Oxyz$ rígido com o sólido. Então

$$z_G = x_G \sin \psi \sin \theta + y_G \cos \psi \sin \theta + z_G \cos \theta.$$

Do triângulo esférico NMN' obtemos

$$\cos \theta = \cos b \cos I - \sin b \sin I \cos g$$

$$\sin \psi \sin \theta = \sin I \sin g \cos l + (\sin b \cos I + \cos b \sin I \cos g) \sin l \quad (1.12)$$

$$\cos \psi \sin \theta = -\sin I \sin g \sin l + (\sin b \cos I + \cos b \sin I \cos g) \cos l$$

onde $\cos b = L/G$, $\cos I = H/G$ e $0 \leq b \leq \pi$, $0 \leq I \leq \pi$.

A Hamiltoniana do sólido pesado torna-se

$$\begin{aligned} F = F_0 + V = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} \sin^2 l + \frac{1}{B} \cos^2 l \right) (G^2 - L^2) + \frac{1}{2C} L^2 + \\ & + w \{ \sin I \sin g (x_G \cos l - y_G \sin l) + (\sin b \cos I + \\ & + \cos b \sin I \cos g) (x_G \sin l + y_G \cos l) + \\ & + z_G (\cos b \cos I - \sin b \sin I \cos g) \} \end{aligned} \quad (1.13)$$

e, no caso geral, temos duas integrais

$$\begin{aligned} F &= \text{const.} = E \\ H &= G \cos I = \text{const.} = H_0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Os casos de Lagrange ($A = B$, $x_G = y_G = 0$) e de Euler-Poinsot ($x_G = y_G = z_G$) estudam-se facilmente.

2. Sólido pesado com simetria dinâmica de revolução

No caso, sendo $A = B$, vem que

$$F_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) L^2 + \frac{1}{2A} G^2 \quad (2.1)$$

Escolhendo o eixo Ox convenientemente, resultará $y_G = 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned} V = & w \{ x_G [\sin I \sin g \cos l + (\sin b \cos I + \cos b \sin I \cos g) \sin l] + \\ & + z_G [\cos b \cos I - \sin b \sin I \cos g] \} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dadas as constantes E e H_0 , o problema tem dois graus de liberdade. Além disto, com escolha conveniente das unidades, podemos sempre supor $0 < w \leq 1$ e teremos

$$F = F_0 + w F_1 \quad (w F_1 = V) \quad (2.3)$$

Verifica-se, fãcilmente, que F é analítica e limitada para valores de L, G, H, l, g físicamente possíveis (e limitados). Por outro lado, o sistema gerado por F_0 é degenerado em relação a F pois em F_0 não aparece o momento H . Verifica-se, imediatamente, que

$$F_{1s} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1 dl dg dh = z_G \cos b \cos I$$

ou

$$F_{1s} = z_G \frac{L H}{G^2}.$$

Sendo $\phi = F_0 + w F_{1s}$, obtemos

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial L^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial L \partial G} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial L \partial H} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial G \partial L} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial G^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial G \partial H} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial H \partial L} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial H \partial G} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial H^2} \end{vmatrix} = \frac{2\gamma^2}{G^8} (\gamma L H + \alpha G^4 - 4\beta L^2 G^2) \neq 0,$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{2A}, \quad \beta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right), \quad \gamma = w z_G.$$

Aquêle determinante não sendo nulo, podemos afirmar a existência de soluções quasi-periódicas para w suficientemente pequeno. Chegamos a resultados análogos no caso de sólidos assimétricos (A, B, C quais quer), desde que a diferença $|B - A|$ seja suficientemente pequena. A êsse respeito Arnold produziu já algum resultado interessante (1963).

Trataremos, finalmente, da questão de integrais primeiras adicionais para o caso $A = B$. Além da Hamiltoniana, a única integral a disposição é H que aliás será suposta como um mero parâmetro. Perguntamos se existe uma integral primeira $\phi(L, G, l, g)$ em involução com F . Em particular, consideraremos integrais que possam ser escritas como séries de potências convergentes em $\epsilon = w$, isto é,

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 + \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \dots \\ \phi_k &= \phi_k(L, G, l, g) \end{aligned} \tag{2.4}$$

se é que tal integral possa existir. Os resultados descritos em capí-

tulos anteriores permitem afirmar que, para ϵ suficientemente pequeno e valores condicionados de A e C e das condições iniciais, a transformação perturbada daquela gerada por F_0 , tem superfícies invariantes que contêm as soluções. A construção efetiva de tais superfícies não é simples e aqui nos propomos, apenas, de produzir uma integral, mas como aplicação do método descrito no fim do Capítulo III. Verificaremos que é possível obter uma série (2.6) que, de fato, termina e é, portanto, uma integral para todo valor de ϵ . Para isto será necessário escolher convenientemente ϕ_0 , A , C , x_G , z_G . Como para $\epsilon = 0$ (ou $x_G = z_G = 0$) as integrais são L e G , então qualquer outra integral correspondente a este caso deve ser função de L e G (Note-se que a própria Hamiltoniana F_0 satisfaz esta condição). Na realidade, poderíamos considerar integrais ϕ funções de H também, mas como F independe de h , é fácil ver que nada poderíamos concluir sobre a dependência de H a menos de somas de funções arbitrárias deste momento. Por outro lado, supor ϕ função de h é fisicamente incoerente, pois, em vista da simetria de revolução, não podemos ter uma integral que depende da escolha particular da direção inercial OX .

Consideremos, pois, a Hamiltoniana

$$F = F_0 + \epsilon F_1$$

e a série formal

$$\phi = \phi_0 + \epsilon \phi_1 + \dots$$

com

$$\phi_0 = \psi(L, G)$$

$$\phi_k = \phi_k(L, G, l, g) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Da condição involutória $(F, \phi) = 0$, temos

$$(F_0, \psi) = 0$$

$$(F_0, \phi_k) + (F_1, \phi_{k-1}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.5)$$

e a primeira será satisfeita qualquer que seja ψ . Ponhamos

$$F_0 = \frac{a}{2} L^2 + \frac{b}{2} G^2 \quad (2.6)$$

$$F_1 = A^0 \sin(l + g) + B^0 \sin(l - g) + C^0 \sin l + D^0 \cos g + E^0$$

onde

$$\begin{aligned}
 A^0 &= x_G (L + G) (G^2 - H^2)^{1/2} / 2 G^2, \\
 B^0 &= x_G (L - G) (G^2 - H^2)^{1/2} / 2 G^2, \\
 C^0 &= x_G H (G^2 - L^2)^{1/2} / G^2, \\
 -D^0 &= z_G (G^2 - L^2)^{1/2} (G^2 - H^2)^{1/2} / G^2, \\
 E^0 &= z_G L H G^{-2}
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Teremos, então,

$$\begin{aligned}
 a L \frac{\partial \phi_k}{\partial L} + b G \frac{\partial \phi_k}{\partial G} &= \{ A^0 \cos(l+g) + B^0 \cos(l-g) + C^0 \cos l \} \frac{\partial \phi_{k-1}}{\partial L} + \\
 &+ \{ A^0 \cos(l+g) - B^0 \cos(l-g) - D^0 \sin g \} \frac{\partial \phi_{k-1}}{\partial G} + \\
 &- \{ A_L^0 \sin(l+g) + B_L^0 \sin(l-g) + C_L^0 \sin l + D_L^0 \cos g + E_L^0 \} \frac{\partial \phi_{k-1}}{\partial L} + \\
 &- \{ A_G^0 \sin(l+g) + B_G^0 \sin(l-g) + C_G^0 \sin l + D_G^0 \cos g + E_G^0 \} \frac{\partial \phi_{k-1}}{\partial G}
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para $k = 1$, resulta imediatamente

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{A^0(\psi_L + \psi_G)}{aL + bG} \sin(l+g) + \frac{B^0(\psi_L - \psi_G)}{aL - bG} \sin(l-g) + \frac{C^0 \psi_L}{aL} \sin l + \\
 &+ \frac{D^0 \psi_G}{bG} \cos g + E' = A' \sin(l+g) + B' \sin(l-g) + C' \sin l + D' \cos g + E'
 \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde E' é uma função arbitrária de L, G . A função ϕ_1 é da mesma forma que F_1 . Com efeito, isto é necessário, pois, tomando $\psi = k F_0$, k constante, deveria poder resultar $\phi_1 = F_1$ + função arbitrária de L e G . É evidente, também, que não existe nenhuma função $\psi \neq 0$ tal que se tenha $\phi_1 = 0$.

Para $k = 2$, de (2.8) obtemos

$$\begin{aligned}
 \phi_2 &= A_{0,1} \cos g + A_{0,2} \cos 2g + A_{1,-1} \cos(l-g) + A_{1,0} \cos l + A_{1,1} \cos(l+g) + \\
 &+ A_{1,2} \cos(l+2g) + A_{2,-2} \cos(2l-2g) + A_{2,-1} \cos(2l-g) + A_{2,0} \cos 2l + \\
 &+ A_{2,1} \cos(2l+g) + A_{2,2} \cos(2l+2g) + B_{1,-2} \sin(l-2g) + B_{1,-1} \sin(l-g) + \\
 &+ B_{1,0} \sin l + B_{1,1} \sin(l+g) + B_{1,2} \sin(l+2g) + E''
 \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde E'' é uma função arbitrária de L , G e $A_{k,j}$ e $B_{k,j}$ funções de ψ_L , ψ_G , A^0 , B^0 , C^0 , D^0 , E' , L , G , a , b e de suas derivadas. Se impusermos a condição $\phi_2 = 0$, todos os coeficientes devem se anular, resultando destes

$$E'' = E'_L = E'_G = 0$$

e, com k uma constante não nula

$$A' = k A^0$$

$$B' = k B^0$$

$$C' = k C^0$$

$$D' = k D^0$$

e, portanto, resultará $\phi_0 = k F_0$, $\phi_1 = k F_1$ que, evidentemente, fornece uma integral proporcional a F . Equivale a dizer que qualquer integral da forma $\phi = \phi_0 + \epsilon \phi_1$ é proporcional a F .

De (2.8), para $k = 3$, obtemos

$$\phi_3 = \sum_{k=-3}^3 \sum_{j=-3}^3 \{ A'_{k,j} \cos(kl + jg) + B'_{k,j} \sin(kl + jg) \}$$

com k e j não simultaneamente nulos e $A'_{k,j}$, $B'_{k,j}$ funções de ψ_L , ψ_G , A^0 , B^0 , C^0 , D^0 , E' , E'' , L , G , a , b e de suas derivadas. Anulando todos os coeficientes deste polinômio, obtemos:

$$\text{I) } a = b \quad (A = 2C)$$

$$\text{II) } D^0 = E^0 = E' = 0 \quad (z_G = 0)$$

$$\text{III) } \psi = (G^2 - L^2)^2 / A^4$$

$$\text{IV) } E'' = 2 x_G^2 \{ G^2 (L^2 + H^2) - 2 L^2 H^2 \} / A^2 G^4$$

Com estas condições, obtemos de (2.9):

$$\begin{aligned} \phi_1 = \frac{2 x_G}{A^3} \left(1 - \frac{L^2}{G^2} \right) \sqrt{G^2 - H^2} \{ (G - L) \sin(l + g) - (G + L) \sin(l - g) \} + \\ + \frac{4 x_G H^2}{A^3 G^2} (G^2 - L^2)^{3/2} \sin l \end{aligned}$$

ou

$$\phi_1 = \frac{4 x_G}{A^3} G^2 \sin^2 b \{ \sin I (\sin g \cos l - \cos b \cos g \sin l) + \\ - \cos I \sin b \sin l \} \quad (2.11)$$

Finalmente, de (2.10), obtemos

$$\phi_2 = \frac{4 x_G^2}{A^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{L^2 + H^2}{G^2} - 2 \frac{L^2 H^2}{G^4} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{H^2 + L^2}{G^2} + \frac{L^2 H^2}{G^4} \right) \cos 2g + \right. \\ \left. + 2 \frac{L H}{G^2} \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \cos g \right\}$$

ou

$$\phi_2 = \frac{4 x_G^2}{A^2} (1 - \cos^2 b \cos^2 I - \sin^2 b \sin^2 I \cos^2 g + \\ + 2 \sin b \cos b \sin I \cos I \cos g) \quad (2.12)$$

e fica, assim, obtida a integral

$$\phi = \phi_0 + w \phi_1 + w^2 \phi_2 \quad (2.13)$$

Mostraremos que esta coincide com a integral de Kowalevsky (ver, por exemplo, Leimanis, 1958). Coloquemos ϕ em função de p, q, r e dos ângulos de Euler. De (1.1), (1.3), (1.4), (1.6) e (1.7) decorre que

$$\text{I)} \quad \phi_0 = A^{-4} G^4 \left(1 - \frac{L^2}{G^2} \right)^2 = A^{-4} G^4 \sin^4 b = (p^2 + q^2)^2$$

$$\text{II)} \quad \phi_1 = -4 x_G A^{-1} \{ (p^2 - q^2) \sin \psi \sin \theta + 2 p q \cos \psi \sin \theta \}$$

$$\text{III)} \quad \phi_2 = 4 x_G^2 A^{-2} (1 - \cos^2 \theta) = 4 x_G^2 A^{-2} \sin^2 \theta$$

Logo, chamando

$$\mu = w x_G A^{-1}$$

$$\xi = \sin \psi \sin \theta$$

$$\eta = \cos \psi \sin \theta$$

$$\zeta = \cos \theta$$

resulta

$$\phi = (p^2 - q^2 - 2\mu \xi)^2 + (2 p q - 2\mu \eta)^2$$

o que prova nossa afirmação anterior. Pudemos, dessa maneira, construir a integral correspondente ao caso $A = B = 2C$, por um processo de apro

ximação sucessiva e mostrar que esta é a única do tipo indicado. É, também, evidente que tal processo de pesquisa de integrais pode se tornar extremamente laborioso e se tal integral dependesse, digamos, da décima potência de w , não cremos seria possível resolver o problema, pois, as séries gerais que se obtêm teriam da ordem de 500 coeficientes a serem anulados. Este é um dos problemas em que se faz sentir a necessidade de um computador rápido (Note que programas que efetuam de rivação, integração e multiplicação de séries, em forma literal, já estão em pleno uso em várias Instituições fora do país).

Mostraremos, agora, como se pode obter a mesma integral por meio de transformações canônicas do tipo discutido no Lema 1 do Capítulo II. Por simplicidade usaremos unidades tais que se tenha

$$B = A = 1$$

$$C = \frac{1}{2} \quad (\text{relação admitida "a priori"})$$

e poremos

$$2 w x_G / A = \epsilon$$

A integral de Kowalevsky escreve-se, então,

$$\phi = (p^2 - q^2 - \epsilon \xi)^2 + (2 p q - \epsilon \eta)^2 = \phi_0 + \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2$$

com

$$\phi_0 = (p^2 + q^2)^2 = (G^2 - L^2)^2$$

Consideremos as variáveis

$$x_1 = (G^2 - L^2)^2$$

$$x_2 = G$$

$$x_3 = H$$

e façamos a extensão canônica

$$y_1 = - 1/4 L (G^2 - L^2)$$

$$y_2 = g + G L / L$$

$$y_3 = h$$

Nestas variáveis a Hamiltoniana $F = F_0 + \epsilon F_1$ se escreve

$$F_0 = x_2^2 - \frac{1}{2} x_1^{1/2} = F_0(x_1, x_2)$$

$$F_1 = (x_2^2 - x_3^2)^{1/2} x_2^{-1} \sin g \cos l + x_3 x_1^{1/4} x_2^{-3/2} \sin l + \\ + (x_2^2 - x_3^2)^{1/2} (x_2^2 - x_1^{1/2})^{1/2} x_2^{-2} \cos g \sin l$$

onde

$$l = -4(x_2^2 - x_1^{1/2})^{1/2} x_1^{1/2} y_1$$

$$g = 4x_2 x_1^{1/2} y_1 + y_2$$

Em vista da escolha de x_1 desejamos, agora, efetuar uma transformação canônica para variáveis (x'_1, y'_1) de modo que a Hamiltoniana expressa em termos destas não seja função, pelo menos, de y'_1 . Tal transformação canônica será gerada por uma função

$$S = x'_1 y_1 + x'_2 y_2 + x'_3 y_3 + \epsilon S_1(\vec{x}', \vec{y}) + \epsilon^2 S_2(\vec{x}', \vec{y}) + \dots$$

tal que

$$x_i = x'_i + \epsilon \frac{\partial S}{\partial y'_i} + \dots$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

$$y'_1 = y_1 + \epsilon \frac{\partial S}{\partial x'_1} + \dots$$

Seja, ainda

$$F' = F'_0 + \epsilon F'_1 + \dots$$

a Hamiltoniana F expressa em termos de $(\vec{x}', \vec{y}')$. O método de Poincaré fornece

$$F'_0 = F_0(x'_1, x'_2)$$

$$F'_1 = F_1 + \frac{\partial F_0}{\partial x'_1} \frac{\partial S}{\partial y'_1} + \frac{\partial F_0}{\partial x'_2} \frac{\partial S}{\partial y'_2}$$

e da segunda

$$L' \frac{\partial S}{\partial l} + G' \frac{\partial S}{\partial g} + \left\{ \frac{1}{2} \sin I' (1 + \cos b') \sin(g + l) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sin I' (1 - \cos b') \sin(g - l) + \sin b' \cos I' \sin l \right\} = -F'_1$$

e como

$$F'_1 = - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \dots \} dl dg = 0$$

resulta para S_1 :

$$S_1 = \frac{1}{2(G' + L')} \sin I' (1 + \cos b') \cos(g + l) + \\ + \frac{1}{2(G' - L')} \sin I' (1 - \cos b') \cos(g - l) + \\ + \frac{1}{L'} \sin b' \cos I' \cos l .$$

Logo, em primeira aproximação

$$x_1 = \frac{\partial S}{\partial y_1} = x'_1 + \epsilon \frac{\partial S}{\partial y_1} + 0(\epsilon^2) = x'_1 - 4\epsilon(G^2 - L^2) L \frac{\partial S}{\partial l} + \\ + 4\epsilon(G^2 - L^2) G \frac{\partial S}{\partial g} + 0(\epsilon^2) = x'_1 + 4\epsilon(G^2 - L^2) (G \frac{\partial S}{\partial g} - L \frac{\partial S}{\partial l}) + \\ + 0(\epsilon^2) = x'_1 + \epsilon \{ -2(G - L)^2 \sin I (1 + \cos b) \sin(g + l) - \\ + 2(G + L)^2 \sin I (1 - \cos b) \sin(g - l) + 4(G^2 - L^2) \sin b \cos I \sin l \} + \\ + 0(\epsilon^2) = x'_1 - 4\epsilon G^2 \sin^2 b \{ \sin I (\cos b \cos g \sin l - \sin g \cos l) + \\ + \sin b \cos I \sin l \} + 0(\epsilon^2) = x'_1 - \epsilon \phi_1 + 0(\epsilon^2)$$

isto é,

$$x'_1 = x_1 + \epsilon \phi_1 + 0(\epsilon^2)$$

e, como

$$F' = F'_0 + 0(\epsilon^2) \quad \text{pois} \quad F'_1 = 0$$

então, com um erro da ordem de ϵ^2 , x'_1 é constante, isto é, é constante com o mesmo erro $x_1 + \epsilon \phi_1$ que é parte da integral ϕ . Prosseguindo na determinação de S_2 iríamos obter

$$x_1 = x'_1 - \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \frac{\partial S}{\partial y_1} + 0(\epsilon^3)$$

e deverá, certamente, resultar

$$\epsilon^2 \frac{\partial S}{\partial y_1} = -\epsilon^2 \phi_2 + 0(\epsilon^3)$$

anulando-se, a seguir, todos os termos de terceira ordem em ϵ . Isto é fácil de ser verificado, bastando para isto definir S_2 por meio da equação

$$F'_2 = \frac{\partial F_0}{\partial x_1} \frac{\partial S}{\partial y_1} + \frac{\partial F_0}{\partial x_2} \frac{\partial S}{\partial y_2} + \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial S}{\partial y_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial S}{\partial y_2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 F_0}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial S}{\partial y_1} \frac{\partial S}{\partial y_2} + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial S}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \frac{\partial S}{\partial y_2} \right\} ,$$

onde F'_2 é definido por

$$F'_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \dots \} d\ell dg = F'_2(x'_1, x'_2, x'_3)$$

que, no caso, resulta não nulo.

3. Movimento de Euler - Poincot

Consideremos a Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 \ell}{A} + \frac{\cos^2 \ell}{B} \right) (G^2 - L^2) + \frac{1}{2C} L^2$$

e mostremos como se obtém a integração do problema associado, por aproximação sucessiva. É claro que, no caso, isto não é estritamente necessário, mas fornece um processo de se obter séries convergentes que coincidem com os desenvolvimentos em série das integrais elípticas que resultavam da integração direta. Admitiremos $C > B > A$. Vamos definir um parâmetro ϵ através da relação

$$\epsilon = 1 - \frac{A}{B}, \quad 0 < \epsilon < 1$$

Resultará

$$H = \left(\frac{1}{2A} - \frac{\epsilon}{4A} \right) G^2 + \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) + \frac{\epsilon}{4A} \right\} L^2 + \frac{\epsilon}{4A} (G^2 - L^2) \cos 2\ell =$$

$$= \alpha L^2 + \beta G^2 + \epsilon \gamma (G^2 - L^2) \cos 2\ell = F_0 + \epsilon F_1. \quad (3.1)$$

I) O sistema gerado por F_0 é integrável

$$\ell = 2\alpha L_0 t + \ell_0$$

$$g = 2\beta G_0 t + g_0$$

$$L = L_0$$

$$G = G_0$$

II) O problema é não degenerado, pois

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_0}{\partial L^2} & \frac{\partial^2 F_0}{\partial L \partial G} \\ \frac{\partial^2 F_0}{\partial G \partial L} & \frac{\partial^2 F_0}{\partial G^2} \end{vmatrix} = 4\alpha\beta = \frac{2-\epsilon}{4A} \left(\frac{2}{C} - \frac{2-\epsilon}{A} \right)$$

que será diferente de zero se $C \neq \frac{2AB}{A+B}$. Mas, se a igualdade for verificada, como $C > B$, resultaria $AB > B^2$ contra a hipótese de ser $B > A$.

III) H é analítica e ϵF_1 limitada para valores finitos de G e L .

Desta forma o processo citado no Teorema K é convergente para $\epsilon(G^2 - L^2) / 4A$ suficientemente pequeno. Façamos, pois, a transformação canônica $(L, G, l, g) \rightarrow (L', G', l', g')$ por meio de

$$S = L'l + G'g + \epsilon S_1(L', G', l) + \epsilon^2 S_2(L', G', l) + \dots$$

com

$$L = L' + \epsilon \frac{\partial S}{\partial l} + \dots$$

$$G = G'$$

$$l' = l + \epsilon \frac{\partial S}{\partial L'} + \dots$$

$$g' = g + \epsilon \frac{\partial S}{\partial G'}$$

Desenvolvendo H em série de Taylor, resultará

$$\begin{aligned} F_0 + \epsilon F_1 &= F_0(L', G') + \epsilon \left\{ \frac{\partial F_0}{\partial L'} \frac{\partial S}{\partial l} + F_1(L', G', l) \right\} + O(\epsilon^2) = \\ &= F_0^{(1)} + \epsilon F_1^{(1)} + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

e, desta resultam

$$I) F_0' = F_0(L', G') = \alpha L'^2 + \beta G'^2$$

$$II) \frac{\partial F_0}{\partial L'} \frac{\partial S}{\partial l} + F_1(L', G', l) = F_1^{(1)}$$

$$III) F_1^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(L', G', l) dl = 0$$

e, portanto

$$S_1 = -\frac{\gamma}{4\alpha} \frac{G'^2 - L'^2}{L'} \sin 2l \quad (3.2)$$

e, a menos de termos de $O(\epsilon^2)$, teremos

$$\begin{aligned} L &= L' - \frac{\epsilon \gamma}{2\alpha} \frac{G'^2 - L'^2}{L'} \cos 2l \\ l' &= l + \frac{\epsilon \gamma}{4\alpha} \frac{G'^2 + L'^2}{L'^2} \sin 2l \\ g' &= g - \frac{\epsilon \gamma}{2\alpha} \frac{G'}{L'} \sin 2l \end{aligned} \quad (3.3)$$

Esta é uma transformação canônica gerada pela função

$$T_1 = L' \ell + G' g + \epsilon S_1 (L', G', \ell) . \quad (3.4)$$

Escrevendo (3.3) na forma explícita teremos que resolver a equação de Kepler

$$2\ell' = 2\ell + \frac{\epsilon \gamma}{2\alpha} \frac{G'^2 + L'^2}{L'^2} \sin 2\ell$$

Desta resulta que

$$\ell = \ell' + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin 2p\ell'}{p} J_p \left(p \frac{\epsilon \gamma}{2\alpha} \frac{G'^2 + L'^2}{L'^2} \right)$$

$$\sin 2\ell = \frac{4\alpha}{\epsilon \gamma} \frac{L'^2}{G'^2 + L'^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin 2p\ell'}{p} J_p \left(p \frac{\epsilon \gamma}{2\alpha} \frac{G'^2 + L'^2}{L'^2} \right)$$

$$\cos 2\ell = -\frac{\epsilon \gamma}{4\alpha} \frac{G'^2 + L'^2}{L'^2} + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos 2p\ell'}{p} J'_p \left(p \frac{\epsilon \gamma}{2\alpha} \frac{G'^2 + L'^2}{L'^2} \right)$$

onde $J_p(x)$ é a função de Bessel de ordem p e argumento x e

$$J'_p(x) = \frac{d J_p(x)}{dx}$$

Temos, por exemplo:

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{192} - \frac{x^6}{9216} + \dots \right)$$

$$J_2(2x) = \frac{x^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{360} + \dots \right)$$

.....

$$J'_1(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3x^2}{8} + \frac{5x^4}{192} - \frac{7x^6}{9216} + \dots \right)$$

$$J'_2(2x) = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{2x^2}{3} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{90} + \dots \right)$$

.....

Logo

$$\begin{aligned} \cos 2\ell = & -\frac{\epsilon \gamma}{4\alpha} \frac{G'^2 + L'^2}{L'^2} + 2 J'_1 \left(\frac{\epsilon \gamma}{2\alpha} \frac{G'^2 + L'^2}{L'^2} \right) \cos 2\ell' + \\ & + 2 J'_2 \left(2 \frac{\epsilon \gamma}{2\alpha} \frac{G'^2 + L'^2}{L'^2} \right) \frac{\cos 4\ell'}{2} + 2 J'_3 \left(3 \frac{\epsilon \gamma}{2\alpha} \frac{G'^2 + L'^2}{L'^2} \right) \frac{\cos 6\ell'}{3} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2 \ell &= \cos 2 \ell' - \frac{\epsilon \gamma}{4\alpha} \frac{G'^2 + L'^2}{L'^2} + \frac{\epsilon \gamma}{4\alpha} \frac{G'^2 + L'^2}{L'^2} \cos 4 \ell' + \\ &+ \frac{\epsilon^2 \gamma^2}{16 \alpha^2} \left(\frac{G'^2 + L'^2}{L'^2} \right)^2 \{ \dots \cos 2 \ell' + \dots \cos 6 \ell' \} + \\ &+ \frac{\epsilon^3 \gamma^3}{64 \alpha^3} \left(\frac{G'^2 + L'^2}{L'^2} \right)^3 \{ \dots \cos 4 \ell' + \dots \cos 8 \ell' \} + \\ &+ \frac{\epsilon^4 \gamma^4}{256 \alpha^4} \left(\frac{G'^2 + L'^2}{L'^2} \right)^4 \{ \dots \cos 2 \ell' + \dots \cos 6 \ell' + \dots + \cos 10 \ell' \} + \dots \end{aligned}$$

e teremos

$$\cos 2 \ell = \cos 2 \ell' - \frac{\epsilon \gamma}{4\alpha} \frac{G'^2 + L'^2}{L'^2} + \frac{\epsilon \gamma}{4\alpha} \frac{G'^2 + L'^2}{L'^2} \cos 4 \ell' + O(\epsilon^2)$$

Introduzindo esta em L :

$$\begin{aligned} L &= L' - \frac{\epsilon \gamma}{2\alpha} \frac{G'^2 - L'^2}{L'} \cos 2 \ell' + \frac{\epsilon^2 \gamma^2}{8\alpha^2} \frac{G'^4 - L'^4}{L'^3} + O(\epsilon^3) \\ L^2 &= L'^2 + \frac{\epsilon^2 \gamma^2}{8\alpha^2} \left(\frac{G'^2 - L'^2}{L'} \right)^2 + \frac{\epsilon^2 \gamma^2}{8\alpha^2} \left(\frac{G'^2 - L'^2}{L'} \right)^2 \cos 4 \ell' + \\ &- \frac{\epsilon \gamma}{\alpha} (G'^2 - L'^2) \cos 2 \ell' + \frac{\epsilon^2 \gamma^2}{4\alpha^2} \frac{G'^4 - L'^4}{L'^2} + O(\epsilon^3) \end{aligned}$$

Resultará:

$$\begin{aligned} H^{(1)} &= \alpha L'^2 + \beta G'^2 + \frac{\epsilon^2 \gamma^2}{8\alpha} \frac{G'^4 - 6G'^2 L'^2 + 5L'^4}{L'^2} + \\ &+ \frac{3 \epsilon^2 \gamma^2}{8\alpha} \left(\frac{G'^2 - L'^2}{L'} \right)^2 \cos 4 \ell' + O(\epsilon^3) = \bar{F}_0^{(1)} + \epsilon^2 \bar{F}_1^{(1)} \end{aligned}$$

onde $\bar{F}_1^{(1)}$ é a parte periódica de $H^{(1)}$.

Efetuada n transformações deste tipo, obtemos

$$\begin{aligned} H^{(n)} &= \alpha L^{(n)2} + \beta G^{(n)2} + \sum_{j=1}^n \epsilon^{2j} p^{(j)}(G^{(n)}, L^{(n)}) + \\ &+ \epsilon^{2n} Q^{(n)}(G^{(n)}, L^{(n)}) \cos(2^{n+1} \ell^{(n)}) + O(\epsilon^{2n+1}) \end{aligned}$$

No limite teremos

$$H^* = \alpha L^{*2} + \beta G^{*2} + \epsilon^2 P(G^*, L^*; \epsilon)$$

que gera um sistema integrável e

$$L^* = \text{const.}, \quad G^* = \text{const.}$$

$$\dot{L}^* = 2 \alpha L^* + \epsilon^2 \frac{\partial P}{\partial L^*} = \omega_1^* = \text{const.}$$

$$\dot{G}^* = 2 \beta G^* + \epsilon^2 \frac{\partial P}{\partial G^*} = \omega_2^* = \text{const.}$$

As relações entre L , l , g e L^* , l^* , g^* serão do tipo (3.3) e $G^* = G$. Finalmente, a transformação

$$L' = L^* + \epsilon \phi(L^*, G^*, \epsilon)$$

$$G' = G^* + \epsilon \psi(L^*, G^*, \epsilon)$$

com

$$\phi = - \left(\frac{\beta G^2 P}{\alpha^2 L^2 + \alpha G^2} \right)^{1/2}$$

$$\psi = + \left(\frac{\alpha L^2 P}{\alpha \beta L^2 + \beta G^2} \right)^{1/2}$$

reduz H^* à forma

$$H' = \alpha L'^2 + \beta G'^2$$

e as frequências das variáveis conjugadas l' e g' serão 2α e 2β .



4. Oscilações autônomas quasi-lineares

Até o momento consideramos sistemas conservativos. Neste parágrafo vamos mostrar como métodos semelhantes àqueles descritos podem ser aplicados a um sistema dissipativo em geral. Inspiramo-nos, aqui, em idéias semelhantes aos métodos de Krylov - Bogoliubov (1943) e van der Pol (1926, 1927) e nos trabalhos de Bogoliubov (1945, 1963), Mitropolski (1964), Arnold (1961) e Moser (1956, 1965).

Consideremos a equação diferencial

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \epsilon Z(z, \dot{z}, \epsilon) \quad (4.1)$$

supondo Z analítica nos argumentos reais z , $\dot{z}$, ϵ em alguma região do espaço $(z, \dot{z})$ e para $0 < \epsilon \leq 1$. A frequência ω é real e constante.

Por meio da transformação

$$z = \sqrt{\frac{2x}{\omega}} \sin y \quad (4.2)$$

$$\dot{z} = \sqrt{2\omega x} \cos y$$

a equação (4.1) se transforma em

$$\dot{x} = \varepsilon \sqrt{\frac{2x}{\omega}} \cos y \quad Z^*(x, y) = \varepsilon g(x, y) \quad (4.3)$$

$$\dot{y} = \omega - \varepsilon \frac{\sin y}{\sqrt{2\omega x}} \quad Z^*(x, y) = \omega + \varepsilon f(x, y) \quad (4.4)$$

e admitiremos que as funções $g(x, y)$ e $f(x, y)$ sejam periódicas de período 2π em y , o que é razoável em vista de (4.2). Novamente procuraremos linearizar o sistema (4.3) e (4.4), isto é, obter uma transformação

$$x = \xi + \varepsilon v(\eta, \varepsilon) + \varepsilon V(\eta, \varepsilon)\xi = x(\xi, \eta, \varepsilon) \quad (4.5)$$

$$y = \eta + \varepsilon u(\eta, \varepsilon) = y(\eta, \varepsilon)$$

de modo que (4.3) e (4.4) se reduzam à forma

$$\dot{\xi} = 0(\xi^2) \quad (4.6)$$

$$\dot{\eta} = \bar{\omega} + 0(\xi^2)$$

A escolha $\xi \equiv 0$ evidentemente reduzirá (4.6) a um sistema diretamente integrável. No caso, admitiremos o sistema mais geral

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Omega + Mx + \varepsilon g(x, y) \\ \dot{y} &= \omega + \lambda + \varepsilon f(x, y) \end{aligned} \quad (4.7)$$

e mostraremos que existem constantes Ω, M, λ funções de ε e ω , tais que (4.5) reduz (4.7) à forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 0(\xi^2) \\ \dot{\eta} &= \omega + 0(\xi^2) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Será possível resolver o problema original se resultar

$$\begin{aligned} \Omega &= M = 0 \\ \bar{\omega} &= \omega - \lambda \end{aligned} \quad (4.9)$$

Suporemos as funções v, V, u periódicas de período 2π em η , analíticas em ε e η e de média nula em relação a η . Além disto, suporemos

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \lambda_1 \epsilon + \lambda_2 \epsilon^2 + \dots \\
 M &= M_1 \epsilon + M_2 \epsilon^2 + \dots \\
 \Omega &= \Omega_1 \epsilon + \Omega_2 \epsilon^2 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

e, em vista das hipóteses de analiticidade

$$\begin{aligned}
 v &= v_0 + \epsilon v_1 + \epsilon^2 v_2 + \dots \\
 V &= V_0 + \epsilon V_1 + \epsilon^2 V_2 + \dots \\
 u &= u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

com v_k, V_k, u_k ($k = 0, 1, \dots$) desenvolvíveis em séries de Fourier; por exemplo

$$v_k = \sum_j v_{kj} e^{ij\eta}, \quad v_{kj} = \text{const.}$$

De (4.5)₂ vem que

$$\dot{y} = \dot{\eta} + \epsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} \dot{\eta}$$

e comparando com (4.6)₂ :

$$\dot{\eta} + \epsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} \dot{\eta} = \omega + \lambda + \epsilon f(x(\xi, \eta, \epsilon), y(\eta, \epsilon)) \tag{4.12}$$

De (4.5)₁ :

$$\dot{x} = \dot{\xi} + \epsilon \frac{\partial V}{\partial \eta} \dot{\eta} + \epsilon \frac{\partial V}{\partial \eta} \xi \dot{\eta} + \epsilon V \dot{\xi}$$

e comparando com (4.6)₁ :

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi} + \epsilon \frac{\partial V}{\partial \eta} \dot{\eta} + \epsilon \frac{\partial V}{\partial \eta} \xi \dot{\eta} + \epsilon V \dot{\xi} &= \Omega + M(\xi + \epsilon v + \epsilon V \xi) + \\
 &+ \epsilon g(x(\xi, \eta, \epsilon), y(\eta, \epsilon))
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

A derivada parcial desta em relação a ξ fornece:

$$\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial V}{\partial \eta} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial V}{\partial \eta} \dot{\eta} + \epsilon \frac{\partial V}{\partial \eta} \xi \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \xi} + \epsilon V \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \xi} = M(1 + \epsilon V) + \epsilon \frac{\partial g}{\partial \xi}
 \tag{4.14}$$

Admitidas (4.8) verdadeiras, para $\xi = 0$, resulta de (4.12), (4.13) e (4.14) :

$$\begin{aligned}
 \epsilon \omega \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \lambda + \epsilon f(\epsilon v; \eta + \epsilon u) \\
 \epsilon \omega \frac{\partial V}{\partial \eta} &= \Omega + \epsilon M v + \epsilon g(\epsilon v, \eta + \epsilon u) \\
 \epsilon \omega \frac{\partial V}{\partial \eta} &= M(1 + \epsilon V) + \epsilon \frac{\partial g}{\partial x}(\epsilon v, \eta + \epsilon u)(1 + \epsilon V)
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

Resta mostrar que de (4.15) é possível obter as funções u , v , V definindo convenientemente λ , M e Ω . Usando (4.10) e (4.11), os termos de ordem ϵ fornecem

$$\begin{aligned}\omega \frac{du_0}{d\eta} &= \lambda_1 + f(0, \eta) \\ \omega \frac{dv_0}{d\eta} &= \Omega_1 + g(0, \eta) \\ \omega \frac{dV_0}{d\eta} &= M_1 + \frac{\partial g}{\partial \xi}(0, \eta)\end{aligned}\quad (4.16)$$

Em vista das hipóteses:

$$\begin{aligned}f(\xi, \eta) &= \sum_k f_k(\xi) e^{ik\eta} \\ g(\xi, \eta) &= \sum_k g_k(\xi) e^{ik\eta} \\ \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi, \eta) &= \sum_k \frac{dg_k(\xi)}{d\xi} e^{ik\eta}\end{aligned}$$

Pondo

$$u_0 = \sum_k u_{0k} e^{ik\eta} \quad (k \neq 0)$$

a primeira de (4.16) fornece

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -f_0(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(0, \eta) d\eta = \text{const.} \\ u_{0k} &= \frac{f_k(0)}{i\omega k} = \text{const.}\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= -g_0(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(0, \eta) d\eta = \text{const.} \\ v_{0k} &= \frac{g_k(0)}{i\omega k} = \text{const.}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}M_1 &= -\frac{dg_0}{d\xi}(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial \xi}(0, \eta) d\eta = \text{const.} \\ V_{0k} &= \frac{g'_k(0)}{i\omega k} = \text{const.}\end{aligned}$$

o que mostra que as séries formais (4.10) e (4.11) podem ser obtidas. A prova da convergência dessas séries, se ω for limitado inferiormente e supostas (4.17) convergentes, não apresenta maiores problemas e é

fácil ver que, para termos de ordem ϵ^k ($k = 2, 3, \dots$) as equações são do mesmo tipo que (4.16). Resultará, então, em geral,

$$\eta = \omega t + \eta_0$$

$$x = \epsilon v(\eta, \epsilon) = \epsilon \sum_{k=0}^{\infty} \sum_j \epsilon^k v_{kj} e^{ij(\omega t + \eta_0)}$$

$$y = \omega t + \eta_0 + \epsilon \sum_{k=0}^{\infty} \sum_j \epsilon^k u_{kj} e^{ij(\omega t + \eta_0)}$$

e, portanto, em vista de (4.2), teremos uma solução periódica da equação (4.1), generalizada convenientemente para levar em conta os termos introduzidos de (4.3) e (4.4) para (4.7).

Um exemplo típico de (4.1) é a equação autônoma de van der Pol (ver, por exemplo: Hale, 1963) em que $Z(z, \dot{z}, \epsilon)$ é um polinômio sem termo independente. Ponhamos com $z_1 = z$ e $z_2 = \dot{z}$:

$$Z(z, \dot{z}, \epsilon) = \omega_1 z_1 + \omega_2 z_2 + P_2(z_1, z_2, \epsilon)$$

com P_2 um polinômio iniciando com termo do segundo grau (no mínimo). As equações

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\omega^2 z_1 + \epsilon Z(z_1, z_2, \epsilon) \end{aligned} \quad (4.18)$$

podem ser escritas

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= (\epsilon \omega_1 - \omega^2) z_1 + \epsilon \omega_2 z_2 + \epsilon P_2(z_1, z_2, \epsilon) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Admitamos as raízes características definidas por

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \epsilon \omega_1 - \omega^2 & \epsilon \omega_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

distintas, isto é, $\omega^2 \neq \epsilon \omega_1 + \frac{1}{4} \epsilon^2 \omega_2^2$. Então, a parte linear de (4.19) é redutível à forma diagonal por meio de uma transformação

$$\vec{z} = B \vec{x}, \quad |B| \neq 0,$$

desde que

$$B^{-1} A B = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Resultará

$$\dot{\vec{x}} = \Lambda \vec{x} + \epsilon B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ p_2 \end{pmatrix} = \Lambda \vec{x} + \vec{g}(\vec{x}) \quad (4.20)$$

e, necessariamente, g_k ($k = 1, 2$) são polinômios em x_1, x_2 iniciando com termos, pelo menos, de segundo grau. De acordo com os métodos desenvolvidos no Capítulo I, procuremos sob que condições existe uma transformação

$$\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{y}) = \vec{y} + \vec{\phi}^*(\vec{y}) \quad (4.21)$$

tal que (4.20) se reduza à forma linear

$$\dot{\vec{y}} = \Lambda \vec{y} \quad (4.22)$$

ou seja

$$\dot{y}_k = \lambda_k y_k \quad (k = 1, 2)$$

Ainda suporemos ϕ_k uma série de potências em y_1 e y_2 e ϕ_k^* inicia com termos, pelo menos, de segundo grau.

Levando em conta as várias equações, resulta

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \vec{y}} \Lambda \vec{y} = \Lambda \vec{\phi} + \vec{g}(\vec{\phi}) \quad (4.23)$$

que é uma equação para $\vec{\phi}$. Em vista da forma de $\vec{g}$, será fácil verificar que as equações

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial \phi_n}{\partial y_k} \lambda_k y_k - \lambda_n \phi_n = g_n(\phi_1, \phi_2) \quad (4.24)$$

para $n = 1, 2$, fornecem os coeficientes de $\vec{\phi}$ se

$$\sum_{k=1}^2 \lambda_k p_k - \lambda_j \neq 0 \quad (j = 1, 2) \quad (4.25)$$

com $p_1 + p_2 \geq 2$, sendo p_1 e p_2 inteiros não negativos.

Se as partes reais dos λ_k tiverem o mesmo sinal, a prova da convergência será feita análogamente ao processo utilizado por Siegel (1956) para a demonstração do Teorema de Lyapunov. É digno notar que as hipóteses acima se verificam para a equação de van der Pol (que tomamos aqui como exemplo):

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \epsilon(1 - z^2) \dot{z} \quad (4.26)$$

desde que

$$\omega \neq \frac{\epsilon}{2}.$$



5. Soluções periódicas da equação de van der Pol

Mostremos como é possível determinar uma solução periódica de (4.26). Por meio de (4.2) obtemos

$$\dot{x} = \frac{\epsilon x}{2\omega} \{ 2(1 - \omega x) \sin 2y - \omega x \sin 4y \} \quad (5.1)$$

$$\dot{y} = \omega - \frac{\epsilon}{2\omega} + \frac{\epsilon}{2\omega} \left\{ \frac{\omega x}{2} + \cos 2y - \frac{\omega x}{2} \cos 4y \right\}$$

Escrevamos o sistema correspondente a (4.7) na forma

$$\dot{x} = \Omega + Mx + \frac{\epsilon x}{2\omega} \{ 2(1 - \omega x) \sin 2y - \omega x \sin 4y \} \quad (5.2)$$

$$\dot{y} = \omega + \lambda^* + \frac{\epsilon}{2\omega} \left\{ \frac{\omega x}{2} + \cos 2y - \frac{\omega x}{2} \cos 4y \right\}$$

Por meio de (4.5) reduziremos (5.2) à forma

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \bar{\omega} + O(\xi^2) \\ \dot{\xi} &= O(\xi^2) \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde nos interessa o caso $\xi = 0$. Resultará uma solução periódica de frequência $\bar{\omega}$ a ser determinada. Procedendo de acordo com o exposto no parágrafo anterior, obtemos:

$$\epsilon \bar{\omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \omega - \bar{\omega} + \lambda^* + \frac{\epsilon}{2\omega} \left\{ \frac{\omega}{2} \epsilon v + \cos 2(\eta + \epsilon u) - \frac{\omega}{2} \epsilon v \cos 4(\eta + \epsilon u) \right\} \quad (5.4)$$

$$\epsilon \bar{\omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} = \Omega + M \epsilon v + \frac{\epsilon^2 v}{2\omega} \{ 2(1 - \epsilon \omega v) \sin 2(\eta + \epsilon u) - \epsilon \omega v \sin 4(\eta + \epsilon u) \} \quad (5.5)$$

$$\epsilon \bar{\omega} \frac{\partial V}{\partial \eta} = (1 + \epsilon V) \left\{ M + \frac{\epsilon}{\omega} \sin 2(\eta + \epsilon u) - 2 \epsilon^2 v \sin 2(\eta + \epsilon u) - \epsilon^2 v \sin 4(\eta + \epsilon u) \right\} \quad (5.6)$$

que deverão ser satisfeitas independentemente do valor de ϵ , levando em conta (4.10) e (4.11). Aqui tomaremos

$$\lambda = \omega - \bar{\omega} + \lambda^* \quad (5.7)$$

e mostraremos que se pode obter $M = \Omega = 0$ e $\lambda^* = -\frac{\epsilon}{2\omega}$.

Os termos de ordem ϵ fornecem

$$\begin{aligned} \bar{\omega} \frac{du_0}{d\eta} &= \lambda_1 + \frac{1}{2\omega} \cos 2\eta \\ \bar{\omega} \frac{dv_0}{d\eta} &= \Omega_1 \\ \bar{\omega} \frac{dv_0}{d\eta} &= M_1 + \frac{1}{\omega} \sin 2\eta \end{aligned} \quad (5.8)$$

e destas, resulta a solução

$$\lambda_1 = \Omega_1 = M_1 = 0$$

$$u_0 = \frac{1}{4\omega\bar{\omega}} \sin 2\eta, \quad v_0 = 0, \quad V_0 = \frac{-1}{2\omega\bar{\omega}} \cos 2\eta$$

Para a ordem ϵ^2 temos

$$\begin{aligned} \bar{\omega} \frac{du_1}{d\eta} &= \lambda_2 + \frac{v_0}{4} - \frac{v_0}{4} \cos 4\eta - \frac{u_0}{\omega} \sin 2\eta \\ \bar{\omega} \frac{dv_1}{d\eta} &= \Omega_2 + v_0 M_1 + \frac{v_0}{\omega} \sin 2\eta \\ \bar{\omega} \frac{dv_1}{d\eta} &= M_2 + \frac{2u_0}{\omega} \cos 2\eta - 2v_0 \sin 4\eta - v_0 \sin 4\eta + M_1 V_0 + \frac{V_0}{\omega} \sin 2\eta \end{aligned}$$

que, em virtude dos resultados anteriores, fornecem

$$\lambda_2 = \frac{1}{8\omega^2\bar{\omega}}, \quad \Omega_2 = M_2 = 0$$

$$u_1 = \frac{1}{32\omega^2\bar{\omega}^2} \sin 4\eta, \quad v_1 = V_1 = 0$$

É fácil ver que, em geral, obteremos

$$\lambda_k = \frac{1}{2^{2k-1}\omega^k\bar{\omega}^{k-1}}, \quad \Omega_k = M_k = 0 \quad (k = 2, 3, \dots)$$

e, portanto $\Omega = M = 0$ conforme anunciamos. Por outro lado

$$\lambda = \frac{\epsilon^2}{8\omega^2\bar{\omega}} + \frac{\epsilon^3}{32\omega^3\bar{\omega}^2} + \dots + \frac{\epsilon^k}{2^{2k-1}\omega^k\bar{\omega}^{k-1}} + \dots = \frac{\epsilon}{2\omega} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\epsilon}{4\omega\bar{\omega}}} - 1 \right\}$$

e deve-se pois, ter, em virtude de (5.7),

$$\frac{\epsilon}{2\omega} \frac{1}{1 - \frac{\epsilon}{4\omega\tilde{\omega}}} = \omega - \tilde{\omega}$$

Desta resulta, impondo a condição que para $\epsilon = 0$ seja $\tilde{\omega} = \omega$,

$$\omega_1 = \frac{4\omega^2 - \epsilon + \sqrt{16\omega^4 - 24\omega^2\epsilon + \epsilon^2}}{8\omega}$$

que é a frequência da solução periódica de (4.26). É interessante com-
parar este método com os processos clássicos (ver, por exemplo, Hale,
1963).



6. Pontos fixos no problema restrito dos três corpos

Moser (1953) já mostrou a aplicabilidade do teorema de pon-
tos fixos de Birkhoff ao problema restrito. Vamos aqui, mostrar essa
aplicabilidade de maneira mais simples e mais direta, baseados nos de-
senvolvimentos apresentados no Capítulo I.

Em termos das variáveis de Poincaré (1892, vol I) a Hamilto-
niana do problema restrito plano circular, com unidades convenientes,
pode ser escrita

$$H = \frac{-1}{2x_1^2} - x_1 + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \mu H_1(\vec{x}, \vec{y}, \mu) \quad (6.1)$$

onde μ é a massa reduzida do menor dos dois primários. Se a (semi-
eixo maior), e (excentricidade), l (anomalia média) e ω (argumen-
to de pericentro) forem os elementos da elipse kepleriana do movimento
do corpo de massa infinitéssimo em relação ao primário de massa $1 - \mu$,
então

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad y_1 = l + \omega - t$$

$$x_2 = \sqrt{2(L - G)} \cos(\omega - t), \quad y_2 = -\sqrt{2(L - G)} \sin(\omega - t)$$

$$\text{onde } L = \sqrt{a}, \quad G = L \sqrt{1 - e^2}.$$

Para $\mu = 0$, (6.1) reduz-se a

$$H_0 = \frac{-1}{2 x_1^2} - x_1 + \frac{1}{2} (x_2^2 + y_2^2) \quad (6.2)$$

cuja solução é

$$x_1 = x_1^0 = \text{const.}$$

$$y_1 = (n_1^0 - 1)t + y_1^0, \quad y_1^0 = \text{const.}, \quad n_1^0 = \left(\frac{1}{x_1^0}\right)^3$$

$$x_2 = \xi_2 \cos t - \eta_2 \sin t$$

$$y_2 = \xi_2 \sin t + \eta_2 \cos t, \quad \xi_2 \text{ e } \eta_2 \text{ constantes.}$$

Por outro lado, para $\epsilon = 0$ (solução periódica de primeira espécie):

$$x_1 = x_1^0$$

$$y_1 = (n_1^0 - 1)t + y_1^0$$

$$x_2 = y_2 = 0$$

e o período é

$$P_0 = \frac{2\pi}{n_1^0 - 1} = \frac{2\pi}{\omega^0}$$

Poincaré (1892) mostrou que se $\omega_0 \neq \frac{1}{p}$, $p = 0, -\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2, \dots$, então, para $\mu > 0$, suficientemente pequeno, existem soluções periódicas com período P_0 e para estas é possível tomar $y_1(0) = 0$ e resultará $y_1(P_0) = 2\pi$. Sejam $x_1' = x_1'(0)$, $x_2' = x_2'(0)$, $y_2' = y_2'(0)$ e H' as condições iniciais e o valor de H que produzem tais soluções periódicas para $\mu > 0$. Mostremos que nas vizinhanças de tais soluções periódicas existem outras que se fecham após um período próximo de um múltiplo inteiro de P_0 (Ver também: Moser, 1953). Para isto aplicaremos o Teorema dos pontos fixos de Birkhoff.

Consideremos as condições iniciais definidas por $H = H'$ e

$$\begin{aligned} x_2(0) &= x_2' + \xi_2 \\ y_2(0) &= y_2' + \eta_2 \\ y_1(0) &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Para $\xi_2 = \eta_2 = 0$ obtemos uma solução periódica de período P_0 . Pa-

ra μ , ξ_2 , η_2 suficientemente pequenos a solução correspondente a (6.3) cortará o plano $y_1 = 2\pi$ após um tempo $P = P_0 + \tau$ e teremos

$$x_2(P) = x_2' + \xi_2'$$

$$y_2(P) = y_2' + \eta_2'$$

$$y_1(P) = 2\pi$$

$$H = H^*$$

Em vista da analiticidade da solução em relação às condições iniciais (estamos excluindo os pontos singulares), poderemos escrever

$$\begin{aligned}\xi_2' &= \alpha \xi_2 + \beta \eta_2 + \text{términos de grau superior} \\ \eta_2' &= \gamma \xi_2 + \delta \eta_2 + \text{términos de grau superior}\end{aligned}\quad (6.4)$$

que é uma transformação isovolumétrica tendo a origem como ponto fixo. Admitamos que este seja estável (no caso, ponto elíptico), isto é, os autovalores λ da parte linear são imaginários puros e conjugados de módulo unitário. Admitamos, ainda, λ^2 , λ^3 , λ^4 diferentes da unidade (Condição de Birkhoff). Então, de acordo com o exposto no Capítulo I, existe uma transformação isovolumétrica que reduz (6.4) à forma

$$\begin{aligned}\xi_2' &= \xi_2 \cos \Omega - \eta_2 \sin \Omega + \dots \\ \eta_2' &= \xi_2 \sin \Omega + \eta_2 \cos \Omega + \dots\end{aligned}\quad (6.5)$$

que é da forma (3.37) do Capítulo I; e teremos

$$\Omega = \alpha + \beta(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \dots$$

Bastará mostrar que $\beta \neq 0$ e poderemos aplicar o teorema de Birkhoff. Como α e β são funções analíticas de μ bastará mostrar que $\beta \neq 0$ para $\mu = 0$. Mas, neste caso

$$H(0) = -\frac{1}{2x_1^2(0)} - x_1(0) + \frac{1}{2}(\xi_2^2 + \eta_2^2) = -\frac{1}{2x_1^2} - x_1 + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2)\quad (6.6)$$

e a solução correspondente é

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1(0) \\ y_1 &= (n_1 - 1)t, \quad n_1 = \left(\frac{1}{x_1(0)}\right)^3\end{aligned}$$

$$x_2 = \xi_2 \cos t - \eta_2 \sin t$$

$$y_2 = \xi_2 \sin t + \eta_2 \cos t$$

e para $y_1 = 2\pi$, isto é, $p_1 = \frac{2\pi}{n_1 - 1} = \frac{2\pi}{\omega_1}$, resulta

$$\begin{aligned} x_2(P_1) &= \xi'_2 = \xi_2 \cos \frac{2\pi}{\omega_1} - \eta_2 \sin \frac{2\pi}{\omega_1} \\ y_2(P_1) &= \eta'_2 = \xi_2 \sin \frac{2\pi}{\omega_1} + \eta_2 \cos \frac{2\pi}{\omega_1} \end{aligned} \quad (6.7)$$

que, para $\mu = 0$, corresponde a (6.5). Logo, para $\mu = 0$

$$\Omega = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{n_1 - 1} = \frac{2\pi x_1^3(0)}{1 - x_1^3(0)}$$

Pondo $\xi_2^2 + \eta_2^2 = \delta$ e observando que para $\delta = 0$, $\omega_1 = \omega^0$ e $x_1(0) = x_1^0$, resulta de (6.6)

$$\Omega = \frac{2\pi}{\omega^0} - \frac{3\pi(1 + \omega^0)}{x_1^0(\omega^0)^3} \delta + \dots$$

o que mostra que, em geral, $\beta \neq 0$.

Logo, de acordo com o teorema de Birkhoff (vide Capítulo I, parágrafo 3) existem pontos fixos para uma certa p -ésima iteração da transformação (6.5) e a estes correspondem soluções periódicas ($\mu \neq 0$, e $\neq 0$) de período pP , com $P = P_1 + \tau(\mu)$.

7. Movimento quasi-periódico de um satélite artificial

Uma aplicação imediata do Teorema A é ao estudo das soluções do sistema gerado pela Hamiltoniana

$$F = -\frac{1}{2L^2} - \frac{\epsilon}{L^6} \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{H^2}{G^2} \right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \frac{H^2}{G^2} \right) \frac{a^3}{r^3} \cos(2g + 2f) \right\}$$

correspondente a um geopotencial aproximado (ver, por exemplo: Brouwer, 1961). O momento H é constante e pode ser considerado um mero parâmetro. Para $\epsilon = 0$, o problema é degenerado, pois o momento G não

está presente em F_0 . Escrevendo F na forma

$$F = F_0 + \epsilon (F_{1s} + F_{1p})$$

verifica-se, facilmente, que

$$F_{1s} = -\frac{1}{L^6} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{H^2}{G^2} \right) \frac{L^3}{G^3}$$

e as condições do Teorema A são satisfeitas (supondo r suficientemente grande). Então, existe um sistema de coordenadas (L', G', l', g') nas quais a solução do problema gerado por F se escreve

$$L' = \text{const.}$$

$$G' = \text{const.}$$

$$l' = \lambda_1 t + l'_0$$

$$g' = \epsilon \lambda_2 t + g'_0$$

com

$$\lambda_1 = \frac{\partial}{\partial L} (F_0 + \epsilon F_{1s}) \Big|_{L=L_0, G=G_0, H=H_0}$$

$$\lambda_2 = \frac{\partial}{\partial G} F_{1s} \Big|_{L=L_0, G=G_0, H=H_0}$$

para λ_1, λ_2 satisfazendo a condição (4.4) do Capítulo II. Isto mostra que, pelo menos com o potencial usado, o processo de Poincaré (chamado de von Zeipel na literatura citada) é convergente.

8. Perturbações periódicas lineares. Sistemas não autônomos

Analizemos, finalmente, o exemplo de um sistema não autônomo. Em particular, considere-se a equação generalizada de Mathieu:

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \epsilon F(t, \epsilon) z \quad (8.1)$$

onde $F(t, \epsilon) = F(t + 2\pi, \epsilon)$ é analítica em t, ϵ para $0 < \epsilon \leq 1$ e tem média nula. Por meio da transformação

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{2x}{\omega}} \sin y \\ \dot{z} &= \sqrt{2x\omega} \cos y \end{aligned} \quad (8.2)$$

a equação (8.1) se reduz à forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{2\epsilon}{\omega} x \sin y \cos y F(t, \epsilon) \\ \dot{y} &= \omega - \frac{\epsilon}{\omega} \sin^2 y F(t, \epsilon)\end{aligned}\quad (8.3)$$

por nós já considerada no caso autônomo.

Por meio da transformação

$$\begin{aligned}x &= \xi + \epsilon v(\eta, t, \epsilon) + \epsilon V(\eta, t, \epsilon) \xi \\ y &= \eta + \epsilon u(\eta, t, \epsilon)\end{aligned}\quad (8.4)$$

vamos mostrar que existem funções v , V e u periódicas de período 2π em η e t , tais que (8.3) se reduz à forma linear (para $\xi \equiv 0$):

$$\dot{\eta} = \Omega(\epsilon, \omega) \quad (8.5)$$

Isto nos permitirá definir o expoente característico associado à solução de (8.1) conforme a teoria de Floquet. Procedendo de maneira análoga ao parágrafo 4 deste capítulo, obtemos facilmente

$$\begin{aligned}\epsilon(\Omega \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial t}) &= \omega - \Omega - \frac{\epsilon}{\omega} \sin^2(\eta + \epsilon u) F(t, \epsilon) \\ \epsilon(\Omega \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial t}) &= \frac{2\epsilon^2}{\omega} v \sin(\eta + \epsilon u) \cos(\eta + \epsilon u) F(t, \epsilon) \\ \epsilon(\Omega \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial t}) &= \frac{2\epsilon}{\omega} (1 + \epsilon V) \sin(\eta + \epsilon u) \cos(\eta + \epsilon u) F(t, \epsilon)\end{aligned}$$

Destas, supondo $\omega - \Omega = \epsilon \lambda$, resultam as equações

$$\Omega \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda - \frac{1}{\omega} \sin^2(\eta + \epsilon u) F(t, \epsilon) \quad (8.6)$$

$$\Omega \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\epsilon}{\omega} v \sin(2\eta + 2\epsilon u) F(t, \epsilon) \quad (8.7)$$

$$\Omega \frac{\partial (1 + \epsilon V)}{\partial \eta} + \frac{\partial (1 + \epsilon V)}{\partial t} = \frac{\epsilon}{\omega} (1 + \epsilon V) \sin(2\eta + 2\epsilon u) F(t, \epsilon) \quad (8.8)$$

Suponhamos que de (8.6) se possa obter λ e a função u periódica de período 2π em t e η . Então, os membros à direita de (8.7) e (8.8), divididos, respectivamente, por v e $(1 + \epsilon V)$ serão funções conhecidas de t e η e periódicas de período 2π nessas variáveis. Se v e $1 + \epsilon V$ forem submetidas às mesmas condições de contorno é evidente que

$$v = 1 + \epsilon V \quad (8.9)$$

Por outro lado, derivando (8.6) parcialmente em relação a η resulta

$$\Omega \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = - \frac{1}{\omega} \sin(2\eta + 2\epsilon u) \left(1 + \epsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) F(t, \epsilon)$$

ou seja

$$\Omega \frac{\partial}{\partial \eta} \left(1 + \epsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(1 + \epsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = - \frac{\epsilon}{\omega} \left(1 + \epsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \sin(2\eta + 2\epsilon u) F(t, \epsilon)$$

o que mostra que, a menos de um sinal, a equação para $1 + \epsilon \frac{\partial u}{\partial \eta}$ é da forma que (8.7) ou (8.8). Em particular, teremos necessariamente que

$$\ln \left(1 + \epsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \ln v = f(\eta - \Omega t)$$

onde f é arbitrária. Pondo $f = \ln g(\eta - \Omega t)$, resulta que

$$\left(1 + \epsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) v = g(\eta - \Omega t) \quad (8.10)$$

onde g é arbitrária. Se fôr possível determinar $u(\eta, t)$, então, as funções v e $1 + \epsilon v$ são determinadas algèbricamente, a menos de uma função arbitrária. Se u fôr periódica de período 2π em η e t e se desejarmos as mesmas propriedades para v e V , a fortiori a função $g(\eta - \Omega t)$ deverá ser tomada constante, a menos que Ω seja um racional. Isto, entretanto, conforme veremos, é uma condição que deve ser excluída se quisermos obter a função u de (8.6). Então, teremos necessariamente

$$v \left(1 + \epsilon \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = k(\epsilon, \omega) = \text{constante}. \quad (8.11)$$

Suposto isto, a transformação (8.4), para $\xi = 0$, se escreve

$$x = \epsilon v(\eta, t, \epsilon)$$

$$y = \eta + \epsilon u(\eta, t, \epsilon)$$

ou seja

$$x = \epsilon v(\Omega t + \eta_0, t, \epsilon) \quad (8.12)$$

$$y = \Omega t + \eta_0 + \epsilon u(\Omega t + \eta_0, t, \epsilon)$$

onde v e u são periódicas de período 2π em η e t . Não serão, entretanto, periódicas em t , desde que ficou excluída a hipótese de ser Ω racional. Tendo em vista (8.2) e levando em conta (8.12), é fácil ver que se obterá

$$z = \alpha(t) \cos \Omega t + \beta(t) \sin \Omega t$$

o que prova ser Ω o expoente característico de Floquet.

Resta, pois, provar que (8.6) define a função $u(\eta, t)$ periódica de período 2π em η e t e a constante $\lambda = \lambda(\Omega, \omega, \epsilon)$.
Supondo

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots, \quad \lambda = \lambda_0 + \epsilon \lambda_1 + \epsilon^2 \lambda_2 + \dots$$

e

$$u_k = u_k(\eta, t) = u_k(\eta + 2\pi, t + 2\pi),$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u_k d\eta dt = 0$$

obtemos, para os coeficientes de ϵ^0 :

$$\Omega \frac{\partial u_0}{\partial \eta} + \frac{\partial u_0}{\partial t} = \lambda_0 - \frac{1}{\omega} \sin^2 \eta F(t, 0)$$

e, portanto, $\lambda_0 = 0$. Por outro lado, por hipótese, poderemos escrever

$$F(t, \epsilon) = \sum_k F_k(\epsilon) e^{ikt}, \quad F_0(\epsilon) = 0$$

o que fornece u_0 , conforme já discutimos no Lema E_1 (Capítulo III) em relação à equação (3.29) do mesmo capítulo. Será suficiente que se tenha

$$|k\Omega - j| \geq \epsilon |k|^{-p}$$

com k inteiro não nulo e p um número positivo conveniente, para todo j inteiro. A demonstração da convergência da série u é em todo análoga à que fizemos no Teorema M, sendo a cada estágio u_k definida por uma equação do tipo

$$\Omega \frac{\partial u_k}{\partial \eta} + \frac{\partial u_k}{\partial t} = \lambda_k + \sum_{p,q} A_{p,q}^{(k)} e^{i(p\eta + qt)}$$

onde tomaremos

$$\lambda_k = -A_{0,0}^{(k)}.$$

Resultará, por fim

$$\lambda = \epsilon \lambda_1 + \epsilon^2 \lambda_2 + \dots = \epsilon G(\epsilon, \Omega, \omega)$$

isto é

$$\omega - \Omega = \epsilon^2 G(\epsilon, \Omega, \omega)$$

a qual fornece

$$\Omega = \Omega(\epsilon, \omega) = \omega + \epsilon^2 \Omega_2(\omega) + \epsilon^3 \Omega_3(\omega) + \dots$$

que é o expoente característico procurado.

Se a equação (8.1) corresponder a um problema n-dimensional, isto é

$$\dot{\vec{z}} + A \vec{z} = \epsilon B(t, \epsilon) \vec{z}$$

com $\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, A uma matriz constante e $B(t, \epsilon)$ uma matriz periódica de período 2π , o processo acima indicado é aplicável bastando que A tenha autovalores distintos. A única diferença essencial será o fato da equação correspondente a (8.6) não ser apenas função da incógnita u_k , mas sim de todas as outras u_j ($j=1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$) e v_j ($j=1, 2, \dots, n$). Isto, entretanto, não invalida o processo de obter u e v por aproximações sucessivas, simultaneamente.

9. Observações finais

Não é a finalidade deste trabalho prolongar a sequência de aplicações possíveis, que são inúmeras, das técnicas desenvolvidas. É nosso desejo, porém, ressaltar que muitos problemas considerados fundamentais ainda aguardam uma solução que poderia, eventualmente, ser obtida por convenientes generalizações ou modificações dos resultados obtidos. Mencionamos, entre outros problemas, aqueles que nos parecem mais evidentes dentro da estrutura dessa tese: estabilidade de pontos fixos elípticos para sistemas com mais de dois graus de liberdade, existência de soluções periódicas (que aqui pouco nos preocupou), generalização do teorema de pontos fixos de Birkhoff para sistemas com mais de um grau de liberdade, estruturação analítica do Teorema de Bendixson-Poincaré em termos de perturbações (ver, por exemplo: Coddington e Levinson, 1955), extensão dos teoremas dos Capítulos II e III a sistemas não conservativos (da natureza indicada nos parágrafos 4, 5 e 8 deste

capítulo), generalização da teoria de Floquet para sistemas lineares cujos coeficientes são funções quasi-periódicas, e, finalmente, extensão das técnicas utilizadas para sistemas contínuos (infinitos graus de liberdade) para os quais Arnold já fez contribuições fundamentais.

Os resultados obtidos ao longo deste trabalho mostram que, ainda no âmbito da análise clássica, é possível definir de maneira precisa certos aspectos do comportamento qualitativo de sistemas não integráveis.

A necessidade da Hamiltoniana ser decomponível numa parte correspondente a um sistema integrável e outra parte convenientemente limitada é suficientemente geral para a aplicabilidade das técnicas de perturbação a um número grande de problemas. Por outro lado, o requisito de analiticidade não é essencial conforme demos exemplo no terceiro capítulo. É necessário, porém, que se tenha diferenciabilidade até uma ordem suficientemente grande. Em Mecânica, esses requisitos são normalmente satisfeitos.



BIBLIOGRAFIA

- Arnold, V. I. - 1961, Izv. Akad. Nauk, ser. mat. 25, 21.
 1961, Doklady Akad. Nauk 137, 255. (*)
 1961, Doklady Akad. Nauk 138, 13. (*)
 1962, Doklady Akad. Nauk 142, 758. (*)
 1962, Doklady Akad. Nauk 145, 487. (*)
 1963, Uspeki Math. Nauk 18, 13.
 1963, Uspeki Math. Nauk 18, 91.
 1963, Siber. Math. J. 4, 471.
- Belaga, G. G. - 1962, Doklady Akad. Nauk 143, 255. (*)
- Birkhoff, G. D. - 1915, Rend. Circ. Mat. Palermo 39, 265. (*)
 1926, Acta Math. 47, 297.
 1927, "Dynamical Systems", Amer. Math. Soc. Coll. Pub. n° 9, Providence.
 1927, Amer. J. of Math. 49, 1. (*)
 1931, Proc. Nat. Acad. Sci. 17, 650. (*)
- Bogoliubov, N. - 1945, "Sôbre alguns métodos estatísticos na Física-Matemática", Izv. Akad. Nauk.
 1963, "The method of integral manifolds in non-linear mechanics" em Contrib. to Diff. Eq. 2, 123, Princeton.
- Brouwer, D. e Clemence, G. M. - 1961, "Methods of Celestial Mechanics", Academic Press, New York.
- Bruns, H. - 1887, Acta Math. 11, 25.
- Cartan, H. - 1963, "Elementary Theory of Analytic Functions of one or several Complex Variables", Addison-Wesley, Reading.
- Cesari, L. - 1959, "Asymptotic Behavior and Stability Problems", Springer, Berlin.
- Cherry, T. M. - 1926, Proc. London Math. Soc. 27, 151. (*)
- Chetayev, N. G. - 1961, "The Stability of Motion", Pergamon, New York. (*)
- Coddington E. A. e Levinson, N. - 1955, "Ordinary Differential Equations", McGraw-Hill, New York.
- Cremer, H. - 1938, Math. Annalen 115, 573. (*)
- Denjoy, A. - 1932, J. de Math. Pures Appl. 97, 333. (*)
- Dulac, H. - 1908, Bull. Sci. Math. 32, 230. (*)
- Gelman, A. E. - 1957, Doklady Akad. Nauk 116, 535. (*)
- Giacaglia, G. E. O. - 1965, "Evaluation of Methods of Integration by

Series in Celestial Mechanics", Tese de doutoramento, Yale University, New Haven.

- Hale, J. - 1963, "Nonlinear Oscillations", McGraw-Hill, New York.
- Jefferys, W. H. - 1966, Astron. J. 71, 566. (*)
- Jefferys, W. H. e Moser, J. - 1966, Astr. J. 71, 568. (*)
- Kantorovich, L. B. - 1948, Uspeki Math. Nauk 3, 89. (*)
- Koksma, J. F. - 1936, "Diophantische Approximationen" em Ergeb. Math. Ihrer Grenzg., Springer, Berlin.
- Kolmogorov, A. N. - 1954, Doklady Akad. Nauk 48, 527.
1957, Proc. Int. Cong. Math. vol I, 315, North-Holland, Amsterdam. (*)
- Kowalevsky, S. - 1889, Acta Math. 12, 177. (*)
- Krylov, N. e Bogoliubov, N. - 1943, "Introduction to Nonlinear Mechanics", Princeton Univ. Press, Princeton.
- Kyner, W. T. - 1964, Comm. Pure Appl. Math. 17, 227. (*)
- Lefschetz, S. (Ed.) - 1952, "Contribution to the Theory of Nonlinear Oscillations", vol. II, Princeton Univ. Press, Princeton. (*)
- Leimanis, E. e Minorsky, N. - 1958, "Dynamics and Nonlinear Mechanics", John Wiley, New York.
- Leontovich, A. M. - 1962, Doklady Akad. Nauk 143, 525. (*)
- Mitropolski, J. A. - 1964, Ukrain Mat. J. 16, 475.
- Moser, J. - 1953, Math. Annalen 126, 325.
1955, Comm. Pure Appl. Math. 8, 409.
1955, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl. 6, 87. (*)
1956, Proc. CERN Symp., 290, Genève.
1961, Proc. Nat. Acad. Sci. 47, 1824.
1962, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math-Phys. Kl. Nr. 1, 1.
1962, Mathematika 6, 3. (*)
1962, Mathematika 6, 51. (*)
1963, Int. Symp. on Nonlinear Diff. Eq. and Nonlinear Mech. 71, Academic Press, New York. (*)
1964, "Hamiltonian Systems" - Curso proferido na New York University.
1965, Comm. Pure Appl. Math. 18, 167.
1965, Am. Math. Soc. Meeting, Denver.
- Nehari, Z. - 1952, "Conformal Mapping", McGraw-Hill, New York.
- Poincaré, H. - 1889, Acta Math. 13, 1. (*)

Poincaré, H. - 1892, 1893, 1898, "Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste", vol I, II, III, Gauthier Villars, Paris.

1912, Rend. Circ. Mat. Palermo 33, 375. (*)

Siegel, C. L. - 1936, Trans. Amer. Math. Soc. 39, 225. (*)

1941, Ann. of Math. 42, 806.

1942, Annals of Math. 43, 607. (*)

1945, Annals of Math. 46, 423. (*)

1954, Math. Annalen 128, 144. (*)

1956, "Vorlesungen über Himmelsmechanik", Springer, Berlin.

Sternberg, S. - 1957, Proc. Am. Math. Soc. 8, 787.

van der Pol, B. - 1926, Phil. Mag. 2, 21.

1927, Phil. Mag. 3, 145.

van Kampen, E. R. - 1935, Amer. J. of Math. 57, 142. (*)

von Zeipel, H. - 1917, Arkiv Mat. Fys. Astr. 11, 1.

Whittaker, E. T. - 1901, Proc. London Math. Soc. 34, 206. (*)

1960, "Analytical Dynamics", Cambridge Univ. Press, New York.

Whittaker, E. T. e Watson, G. N. - 1963, "Modern Analysis", Cambridge Univ. Press, New York.

(*) - Obras cuja referência não é feita explicitamente ao longo do trabalho.



