



Escola Politécnica - EPBC



31200053609

BT/PEF-8711

LAJE PROTENDIDA E PERDAS DE PROTENSÃO
RESULTANTES DA RETRAÇÃO, FLUÊNCIA DO
CONCRETO E DO AÇO

José C.F. Ferraz
Professor Catedrático
Recebido em 31/07/87

EDITOR CHEFE

C.E.N.Mazzilli

COMISSÃO EDITORIAL

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------|
| - Engenharia de Solos | W.Hachich |
| - Estruturas de Concreto | P.B.Fusco |
| - Estruturas Metálicas e de Madeira | P.B.Fusco |
| - Interação Solo-Estrutura | C.E.M.Maffei |
| - Mecânica Aplicada | D.Zagottis |
| - Métodos Numéricos | I.Q.Barros |
| - Pontes e Grandes Estruturas | J.C.Figueiredo Ferraz |
| - Teoria das Estruturas | V.M.Souza Lima |



1875

1875

1875

1875

1875

1875

1875

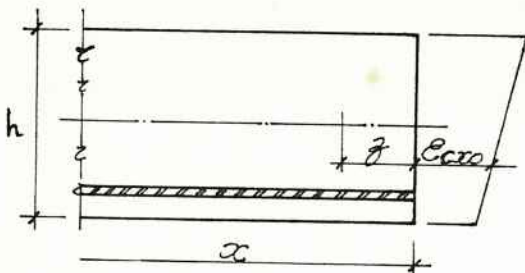
LAJE PROTENDIDA E PERDAS DE PROTENSÃO RESULTANTES
DA RETRAÇÃO, FLUÊNCIA DO CONCRETO E DO AÇO

José Carlos de Figueiredo Ferraz
Professor Catedrático

Este tema tem sido objeto de trabalhos esparsos que, não obstante sua grande valia, propõem soluções muito complicadas, de difícil aplicação. Mesmo no que se refere às tensões, deformações e deslocamentos, na fase de aplicação dos esforços, pouco se tem publicado.

No presente trabalho buscamos apresentar solução deste problema, começando por estudar os efeitos do carregamento no instante inicial de sua aplicação. Em seguida, abordaremos os efeitos da retração, fluência do concreto e da fluência do aço, dentro de um mesmo processo geral, particularizando nos casos cujo exame isolado se faça necessário.

I. Tensões, deformações e deslocamentos para $t = 0$



Consideremos uma laje de altura h , protendida nas duas direções normais entre si, x e y .

A protensão é total e com aderência posterior.

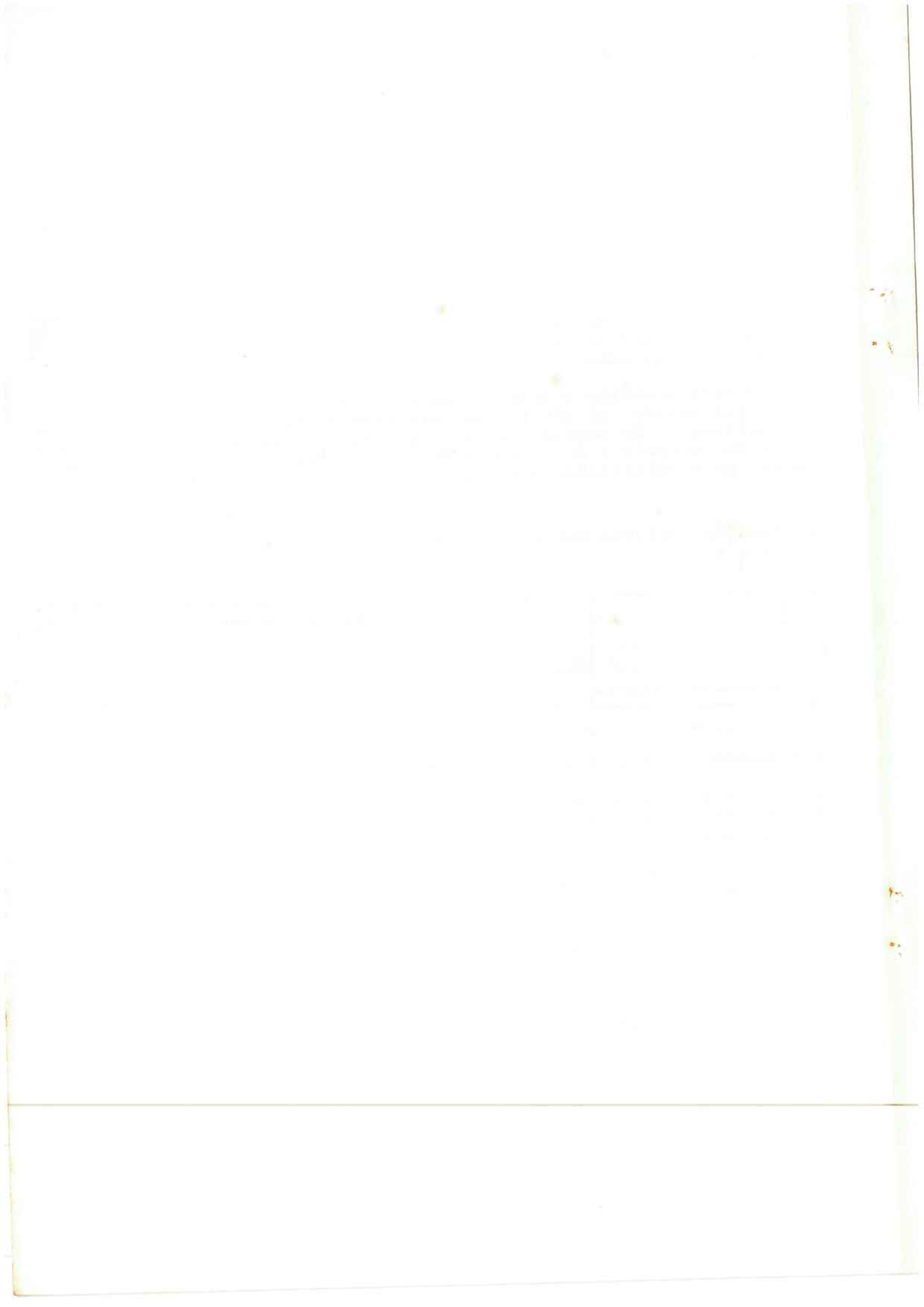
Uma fibra situada a uma distância z do centro de gravidade da seção de largura unitária sofre, respectivamente, nas direções x e y , as deformações:

$$\begin{aligned}\epsilon_{cxo} &= \frac{\sigma_{cxo}}{E_c} - \nu \frac{\sigma_{cyo}}{E_c} \\ \epsilon_{cyo} &= \frac{\sigma_{cyo}}{E_c} - \nu \frac{\sigma_{cxo}}{E_c}\end{aligned}\tag{I.1}$$

sendo ν o coeficiente de Poisson do concreto.

Apelando para a hipótese de Kirchoff podemos escrever.

$$\begin{aligned}\sigma_{cxo} - \nu \sigma_{cyo} &= E_c (A_x + B_x \cdot z) \\ \sigma_{cyo} - \nu \sigma_{cxo} &= E_c (A_y + B_y \cdot z)\end{aligned}\tag{I.2}$$



sendo A_x, B_x, A_y, B_y constantes a serem determinadas das equações de equilíbrio das seções.

Fazendo

$$E_c (A_x + B_x \cdot z) = F$$

$$E_c (A_y + B_y \cdot z) = G$$

vem:

$$\sigma_{cxo} = \frac{F + \nu G}{1 - \nu^2} \tag{I.3}$$

$$\sigma_{cyo} = \frac{G + \nu F}{1 - \nu^2}$$

Por razões de equilíbrio,

$$\int \sigma_{cxo} dS + \sigma_{axo} S_{ax} = 0 \tag{I.4}$$

sendo σ_{axo} e S_{ax} , respectivamente, a tensão de protensão e a área da armadura protendida por unidade de largura.

Assim:

$$\frac{1}{1 - \nu^2} \left[\int [E_c (A_x + B_x \cdot z) dS + \nu \int E_c (A_y + B_y \cdot z) dS] + \sigma_{axo} S_{ax} = 0 \right]$$

Como

$$\int z dS = 0$$

resulta:

$$\frac{E_c S_c}{1 - \nu^2} (A_x + \nu A_y) + \sigma_{axo} S_{ax} = 0 \tag{I.5}$$

De maneira análoga encontraremos:

$$\frac{E_c S_c}{1 - \nu^2} (A_y + \nu A_x) + \sigma_{ayo} S_{ay} = 0 \tag{I.6}$$

Das duas equações (I.5) e (I.6) obtemos:



$$\begin{aligned} A_x &= - (\sigma_{axo} S_{ax} - \nu \sigma_{ayo} S_{ay}) \frac{1}{E_c S_c} \\ A_y &= - (\sigma_{ayo} S_{ay} - \nu \sigma_{axo} S_{ax}) \frac{1}{E_c S_c} \end{aligned} \quad (I.7)$$

D'outra parte

$$M_x = \int \sigma_{cxo} z dS + \sigma_{axo} e_x S_{ax} \quad (I.8)$$

sendo e_x a excentricidade dos cabos de protensão na direção x.

Então:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{1 - \nu^2} \left[\int E_c (A_x + B_x \cdot z) z dS + \nu \int E_c (A_y + B_y \cdot z) z dS \right] + \\ &+ \sigma_{axo} e_x S_{ax} \end{aligned}$$

ou seja,

$$M_x = \frac{E_c J_c}{1 - \nu^2} (B_x + \nu B_y) + \sigma_{axo} e_x S_{ax} \quad (I.9)$$

De modo análogo:

$$M_y = \frac{E_c J_c}{1 - \nu^2} (B_y + \nu B_x) + \sigma_{ayo} e_y S_{ay} \quad (I.10)$$

Então:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{E_c J_c}{1 - \nu^2} \left(\frac{1}{\rho_x} + \frac{\nu}{\rho_y} \right) + \sigma_{axo} e_x S_{ax} \\ M_y &= \frac{E_c J_c}{1 - \nu^2} \left(\frac{1}{\rho_y} + \frac{\nu}{\rho_x} \right) + \sigma_{ayo} e_y S_{ay} \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que:

$$- 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\tau_{xyo}}{G}$$

Como

$$M_{xy} = - \int \tau_{xyo} z dS$$

vem:

$$M_{xy} = 2 G J_c \frac{1}{\rho_{xy}}$$

Fazendo

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \text{ resulta:}$$

$$M_x = D \left(\frac{1}{\rho_x} + \frac{\nu}{\rho_y} \right) + \sigma_{axo} e_x S_{ax}$$

$$M_y = D \left(\frac{1}{\rho_y} + \frac{\nu}{\rho_x} \right) + \sigma_{ayo} e_x S_{ay} \quad (\text{I.12})$$

$$M_{xy} = D(1 - \nu) \frac{1}{\rho_{xy}}$$

Por razões de equilíbrio,

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = - q$$

sendo q a carga por unidade de área.

Daí resulta:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \sigma_{axo} S_{ax} \frac{\partial^2 e_x}{\partial x^2} + \sigma_{ayo} S_{ay} \frac{\partial^2 e_y}{\partial y^2} = q \quad (\text{I.13})$$

Fazendo

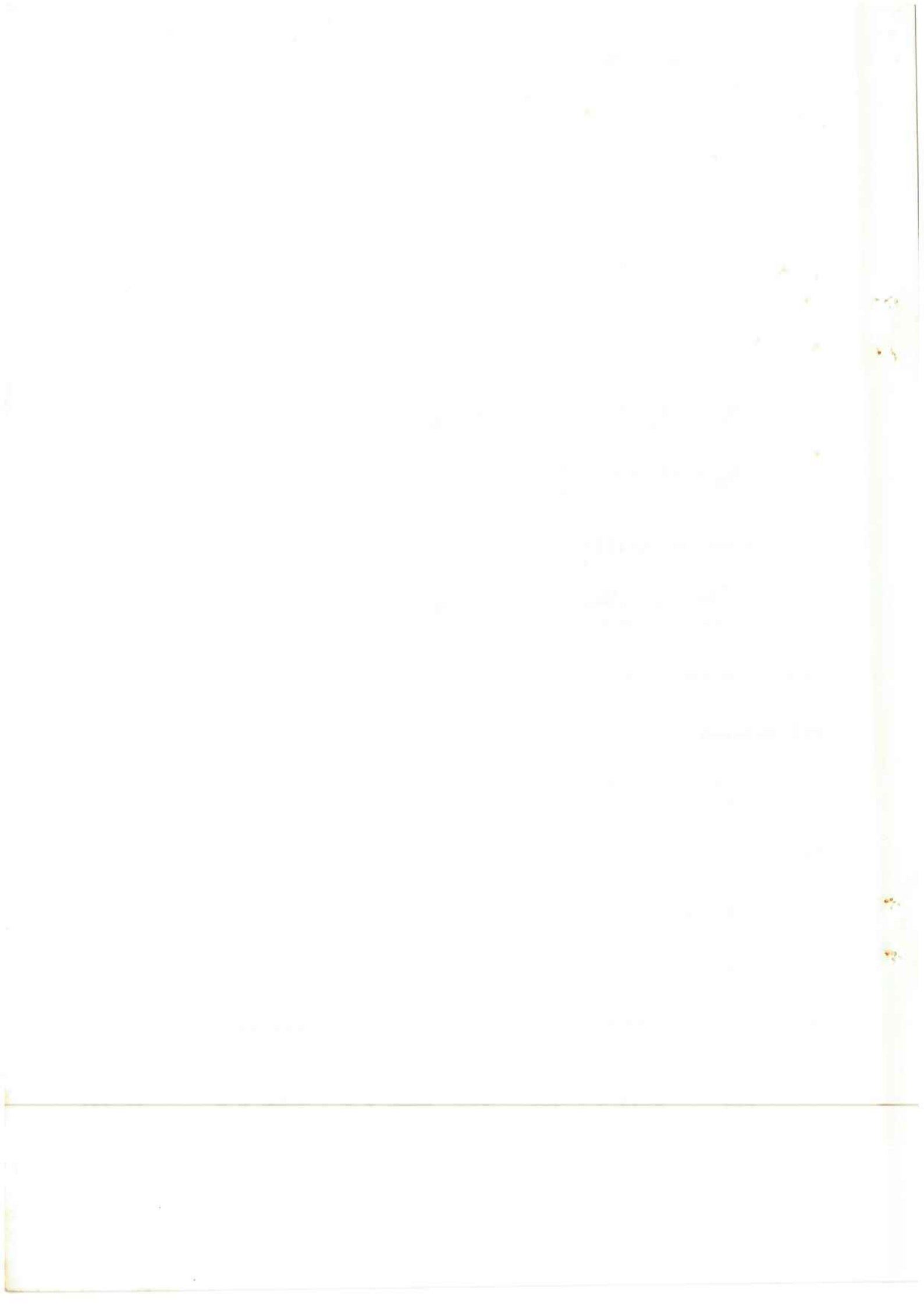
$$\sigma_{axo} S_{ax} = P_{xo}$$

$$\sigma_{ayo} S_{ay} = P_{yo}$$

sendo P_{xo} e P_{yo} as protensões por unidade de largura,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + P_{xo} \frac{\partial^2 e_x}{\partial x^2} + P_{yo} \frac{\partial^2 e_y}{\partial y^2} = q \quad (\text{I.14})$$

No caso particular de:



$$e_x = \frac{4f_x}{l_x} x(l_x - x)$$

$$e_y = \frac{4f_y}{l_y} y(l_y - y)$$

vem:

$$\frac{\partial^2 l_x}{\partial x^2} = - \frac{8f_x}{l_x^2} = q_{px}$$

$$\frac{\partial^2 l_y}{\partial y^2} = - \frac{8f_y}{l_y^2} = q_{py}$$

Fazendo

$$q_{px} + q_{py} = q_p$$

resulta:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q - q_p \quad (I.15)$$

Assim, o efeito da protensão, como era de se esperar, é o de um carregamento q_p , por unidade de área de laje, atuando contra o carregamento.

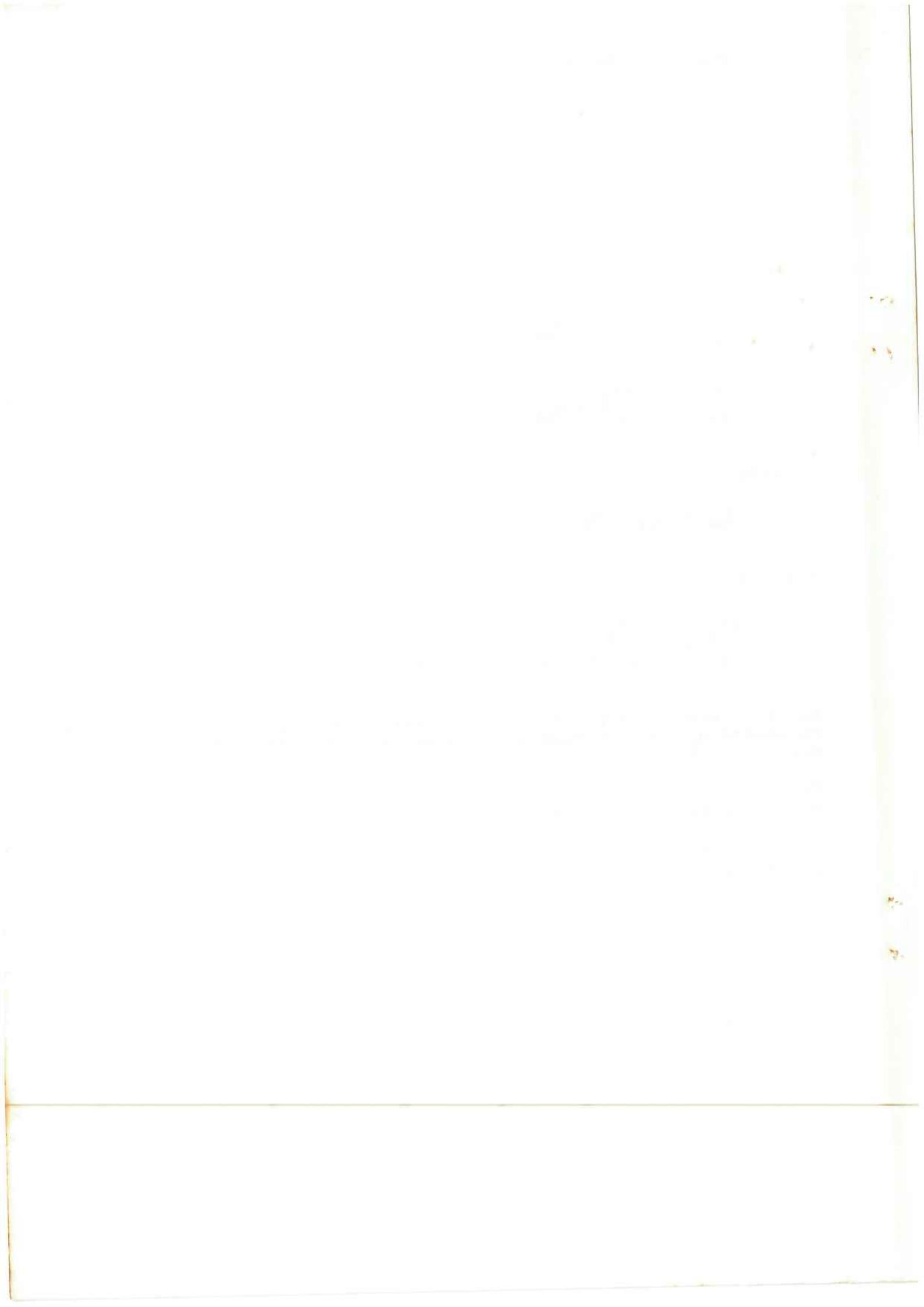
Então, para $t = 0$, isto é, na fase inicial de carregamento, as tensões no concreto, em qualquer fibra, à distância z nas direções x e y , são conhecidas pelas equações (I.3) ou seja, pelas equações (I.2); e isto porque, determinados os deslocamentos w , ficam conhecidos $B_x = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ e $B_y = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

II. Equações reológicas

Da teoria da fluência linear, as deformações são conhecidas por:

$$\epsilon_{xt} = \epsilon_r + \frac{\sigma_{x0} - \nu\sigma_{y0}}{E} \frac{\phi t}{2} + \frac{\sigma_{xt} - \nu\sigma_{yt}}{E} \left(1 + \frac{\phi t}{2}\right)$$

$$\epsilon_{yt} = \epsilon_r + \frac{\sigma_{y0} - \nu\sigma_{x0}}{E} \frac{\phi t}{2} + \frac{\sigma_{yt} - \nu\sigma_{xt}}{E} \left(1 + \frac{\phi t}{2}\right)$$



$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{x0}}{E} \frac{\phi_t^*}{2} + \frac{\tau_{xyt}}{G} \left(1 + \frac{\phi_t^*}{2}\right) \quad (\text{II.1})$$

sendo:

ϕ_t o índice genérico de fluência; o índice "0" corresponde ao instante $t = 0$; ϕ_t^* é o índice de fluência no caso de cisalhamento.

A rigor, o índice ϕ_t seria melhor representado por $\phi_{t\tau}$, onde τ é o instante em que se dá a sollicitação.

Quanto a ϕ_t^* (ou melhor, $\phi_{t\tau}^*$), seu valor pode ser dado por:

$$\phi_t^* = \frac{\phi_t}{1 - \nu} \quad (\text{II.2})$$

onde ν é o coeficiente de Poisson.

Não serão considerados, neste trabalho, as variações, no tempo, dos valores E , G e ν ; mesmo porque são de pouca relevância nos resultados finais.

As parcelas das deformações totais, correspondentes apenas à retração e fluência do concreto e aço são, pois:

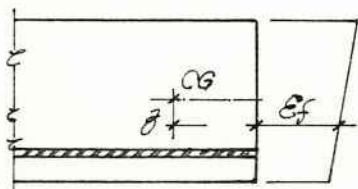
$$\begin{aligned} \epsilon_{fxt} &= \epsilon_r + \frac{\sigma_{x0} - \nu\sigma_{y0}}{E} \phi_t + \frac{\sigma_{xt} - \nu\sigma_{yt}}{E} \left(1 + \frac{\phi_t}{2}\right) - \frac{\sigma_{x0} - \nu\sigma_{y0}}{E} = \\ &= \epsilon_r + \frac{\sigma_{x0} - \nu\sigma_{y0}}{E} \phi_t + \frac{\Delta\sigma_{xt} - \nu\Delta\sigma_{yt}}{E} \left(1 + \frac{\phi_t}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

De maneira análoga:

$$\epsilon_{fyt} = \epsilon_r + \frac{\sigma_{y0} - \nu\sigma_{x0}}{E} \phi_t + \frac{\Delta\sigma_{yt} - \nu\Delta\sigma_{xt}}{E} \left(1 + \frac{\phi_t}{2}\right) \quad (\text{II.4})$$

$$\gamma_{fxyt} = \frac{\tau_{xy0}}{G} \phi_t^* + \frac{\Delta\tau_{xyt}}{G} \left(1 + \frac{\phi_t^*}{2}\right) \quad (\text{II.5})$$

III. Tensões, deformações e deslocamentos ao final do tempo t



Admitindo a hipótese de Kirchhoff, da normal à superfície média da laje permanecer normal depois da deformação, vem:

$$\begin{aligned} \epsilon_r + \frac{\sigma_{x0} - \nu\sigma_{y0}}{E} \phi_t + \frac{\Delta\sigma_{xt} - \nu\Delta\sigma_{yt}}{E} \left(1 + \frac{\phi_t}{2}\right) &= \mu_x + \lambda_x \cdot z \\ \epsilon_r + \frac{\sigma_{y0} - \nu\sigma_{x0}}{E} \phi_t + \frac{\Delta\sigma_{yt} - \nu\Delta\sigma_{xt}}{E} \left(1 + \frac{\phi_t}{2}\right) &= \mu_y + \lambda_y \cdot z \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Fazendo

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\phi_t}{2} &= r_t && \text{Se concreto } r_t = q_2 \\ & && \text{Se aço } r_t = \bar{q}_2 \end{aligned}$$

$$K = E(\mu_x + \lambda_x \cdot z) - (\sigma_{x0} - \nu\sigma_{y0}) \phi_t - E\epsilon_r \quad (\text{III.2})$$

$$L = E(\mu_y + \lambda_y \cdot z) - (\sigma_{y0} - \nu\sigma_{x0}) \phi_t - E\epsilon_r$$

Então,

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{xt} &= \frac{K + \nu L}{r_t(1 - \nu^2)} \\ \Delta\sigma_{yt} &= \frac{L + \nu K}{r_t(1 - \nu^2)} \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

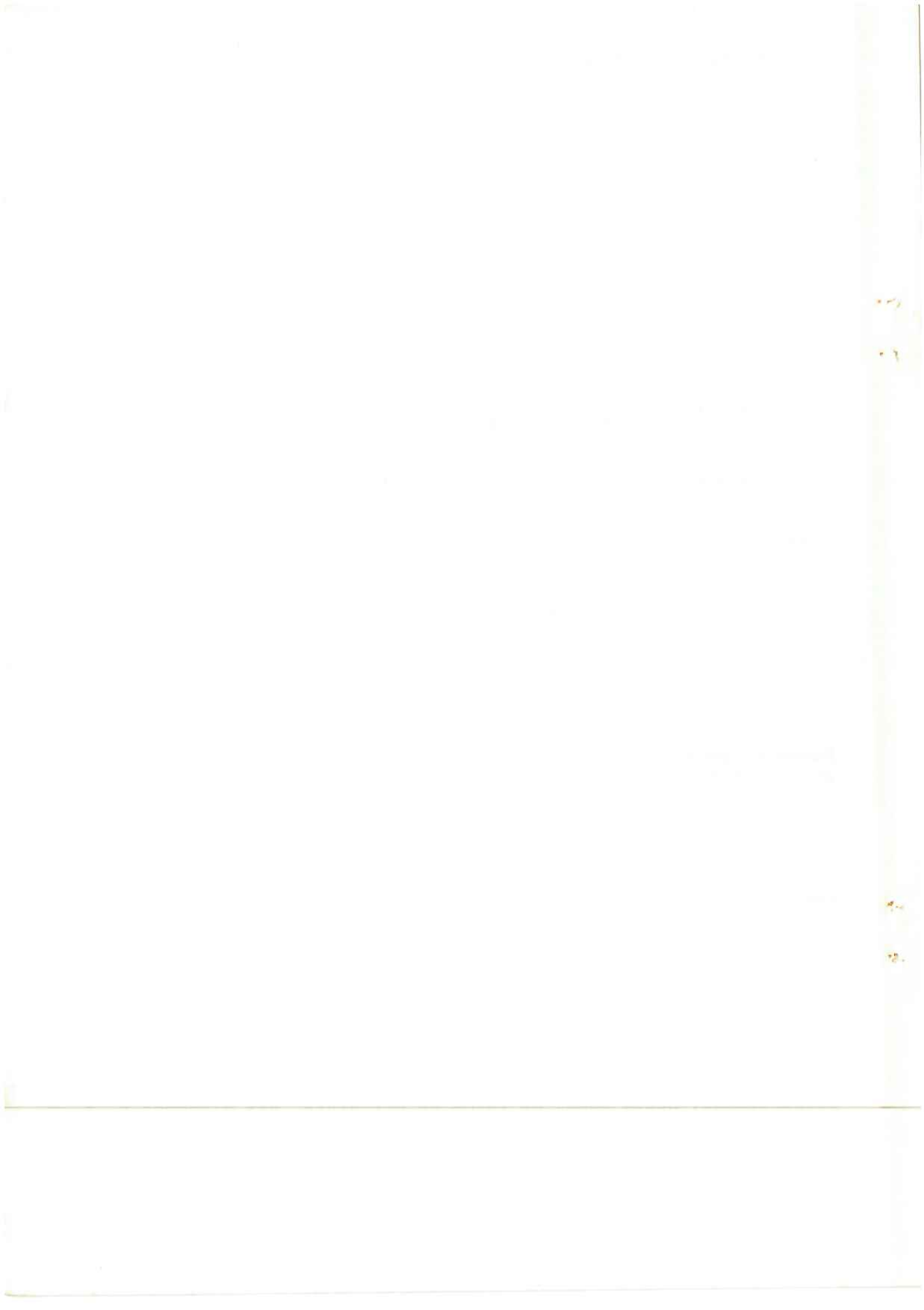
Ademais, sendo w_f o deslocamento vertical da superfície média da laje, produzida apenas pela retração e fluência do concreto e aço, temos:

$$w_{fxyt} = -2z \frac{\partial^2 w_f}{\partial x \partial y} = \frac{\tau_{xy0}}{G} \phi_t^* + \frac{\Delta\tau_{xyt}}{G} r_t^* \quad (\text{III.4})$$

Como

$$\begin{aligned} \lambda_x &= \frac{1}{\tau_x} = -\frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2} \\ \lambda_y &= \frac{1}{\tau_y} = -\frac{\partial^2 w_f}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

significando, neste caso, os raios de curvatura, nas direções x e y , da superfície w_f .



Por razões de equilíbrio,

$$N_{fx} = \int \Delta\sigma_{xt} dS = 0 ; N_{fy} = \int \Delta\sigma_{xt} z dS = 0 \quad (\text{III.6})$$

Estendendo a integral às áreas do concreto e aço; de (III.6), vem:

$$\begin{aligned} \int \Delta\sigma_{xt} dS_x &= \frac{1}{q_2(1-\nu^2)} \int [E_c(\mu_x + \lambda_x \cdot z) - (\sigma_{cxo} - \nu\sigma_{cyo})\phi_t - E_c \epsilon_r] dS_{cx} \\ &+ \frac{1}{q_2(1-\nu^2)} \int \nu[E_a(\mu_y + \lambda_y \cdot z) - (\sigma_{cyo} - \nu\sigma_{cxo})\phi_t - E_c \epsilon_r] dS_{cx} \\ &+ \frac{1}{\bar{q}_2} \int [E_a(\mu_x + \lambda_x \cdot z) - \sigma_{axo} \psi_t] dS_{ax} = \\ &= \frac{1}{q_2(1-\nu^2)} [E_c \mu_x S_c - (N_{cxo} - \nu N_{cyo})\phi_t S_c - E_c \epsilon_r S_c] + \\ &+ \frac{\nu}{q_2(1-\nu^2)} [E_c \mu_y S_c - (N_{cyo} - \nu N_{cxo})\phi_t S_c - E_c \epsilon_r S_c] + \\ &+ \frac{1}{\bar{q}_2} [E_c \mu_x S_{ax} - \sigma_{axo} \psi_t S_{ax}] = 0 \quad (\text{III.7}) \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \int \Delta\sigma_{yt} dS_y &= \frac{1}{q_2(1-\nu^2)} [E_c \mu_y S_c - (N_{cyo} - \nu N_{cxo})\phi_t - E_c \epsilon_r S_c] + \frac{\nu}{\bar{q}_2(1-\nu^2)} \\ &[E_c \mu_x S_c - (N_{cxo} - \nu N_{cyo})\phi_t - E_c \epsilon_r S_c] + \frac{S_{ax}}{\bar{q}_2} [E_c \mu_x - \sigma_{axo} \psi_t] = 0 \quad (\text{III.8}) \end{aligned}$$

Da segunda equação (III.6), segue:

$$\begin{aligned} M_{fx} &= \int \Delta\sigma_{xt} z dS_x = \frac{1}{q_2(1-\nu^2)} \int [E_c(\mu_x + \lambda_x \cdot z) - (\sigma_{cxo} - \nu\sigma_{cyo})\phi_t - E_c \epsilon_r] z dS_{cx} \\ &+ \frac{1}{q_2(1-\nu^2)} \int \nu[E_c(\mu_y + \lambda_y \cdot z) - (\sigma_{cyo} - \nu\sigma_{cxo})\phi_t - E_c \epsilon_r] z dS_{cx} \\ &+ \frac{1}{\bar{q}_2} \int [E_a(\mu_x + \lambda_x \cdot z) - \sigma_{axo} \psi_t] z dS_{ax} \\ &= \frac{E_c J_c}{q_2(1-\nu^2)} [\nu \lambda_x + \nu \lambda_y - \psi_t (M_{cxo} - \nu M_{cyo})] \\ &+ \frac{1}{\bar{q}_2} (E_a J_{ax} \lambda_x - \sigma_{axo} \psi_t e_x S_{ax}) = 0 \quad (\text{III.9}) \end{aligned}$$

Analogamente,

$$M_{fy} = \int \Delta \sigma_{yt} z dS_y = \frac{1}{\bar{q}_2 (1-\nu^2)} [\lambda_y + \nu \lambda_x - \phi_t (M_{cyo} - \nu M_{cxo})]$$

$$\frac{1}{\bar{q}_2} (E_a J_{ay} \lambda_y) - \sigma_{ayo} \psi_t e_y S_{ay} = 0 \quad (\text{III.10})$$

Das quatro equações (III.7), (III.8), (III.9) e (III.10) ficam determinados μ_x , μ_y , λ_x , λ_y , que, levados em (III.3) permitem calcular as variações de tensão ao longo das seções x e y .

Voltando a (II.5), e lembrando que

$$\gamma_{fxyt} = -2z \frac{\partial^2 w}{\sigma_x \sigma_y} = -2z \frac{1}{\rho_{fxy}} - 2z \frac{\sigma_z w}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\tau_{xyo}}{G} \frac{*}{t} + \frac{\Delta \tau_{xyt}}{G} \left(1 + \frac{*}{2}\right)$$

Daí:

$$\Delta \tau_{xyt} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \tau_{xyo} \phi_t^* \quad (\text{III.11})$$

O momento de torção será pois:

$$M_{fxy} = - \int \Delta \tau_{xyt} z dS_c = \int \left(2Gz \frac{\partial^2 z w}{\partial x \partial y} + \tau_{xyo} \phi_t^* \right) z dS_c =$$

$$= 2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} J_c \quad (\text{III.12})$$

Como é sabido da teoria das lajes,

$$\frac{\partial^2 M_{fx}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{fxy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{fy}}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{III.13})$$

eis que a variação do carregamento externo é nula.

Levando as expressões de M_{fx} , M_{fy} e M_{fxy} em (III.13), chegaremos a u ma equação do tipo:

$$D_x \frac{\partial^4 w t}{\partial x^4} + D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \bar{q} \quad (\text{III.14})$$

cujo significado é o da própria equação clássica das lajes, ainda do tempo de Lagrange, onde atua como que uma carga fictícia que produziria os deslocamentos w_f resultantes da retração e fluência do concreto e do aço.

