OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL DE ROTORES FLEXÍVEIS: DESENVOLVIMENTO DE METODOLOGIAS, ESTUDO DE CASOS

ROGÉRIO LACOURT RODRIGUES
Engeware Informática Comércio e Importação
Av. Kennedy, 164/5º - CEP 09725 S. Bernardo do Campo SP
AGENOR DE TOLEDO FLEURY
Agrupamento de Sistemas de Controle - DME - IPT SP

SUMÁRIO

Neste trabalho é apresentada uma metodologia para otimização de dimensionamento de estruturas que podem ser modeladas como cascas axissimétricas sujeitas a um carregamento estático e vibrações desta mesma natureza. A análise estrutural é feita empregando-se o Método dos Elementos Finitos. Como exemplo de aplicação mostramos os resultados obtidos na otimização do volante de um atuador de sistema de controle de atitude do tipo Roda de Reação.

INTRODUÇÃO

O problema da determinação da forma ótima para volantes, estudado desde o final do séc. XIX, tem atraído a atenção de diversos pesquisadores em tempos mais recentes. Baseando-se em um modelo estrutural contínuo, tanto Sandgren e Ragsdell (1983) quanto Ebrahimi (1988) estudaram discos circulares com furo central e espessura variável ao longo do raio, sujeitos apenas ao carregamento centrifugo.

Com o emprego de um modelo estrutural discretizado por elementos finitos é possivel aplicar técnicas de otimização a estruturas bastante mais complexas no que diz respeito a sua geometria, diversidade de materiais, tipo de restrições, etc. Recorrendo a este tipo de modelagem Nó e Aguinagalde (1987) apresentam uma formulação para otimização de dimensões usando elementos de viga e de placa. Pode-se mesmo chegar a otimizar a forma de estruturas tridimensionais modeladas por elementos sólidos, como propõe Yang (1989).

Em contrapartida à generalidade alcançada com o uso do MEF torna-se necessário implementar procedimentos mais sofisticados para se determinar numericamente os gradientes das respostas envolvidas no problema de otimização (deslocamentos, tensões, autovalores, etc.) em relação às variáveis de projeto estabelecidas. Phelan e Haber (1987) fizeram uma comparação entre os métodos conhecidos de análise de sensibilidade: diferenças finitas, diferenciação direta e da variável adjunta.

Neste texto apresentamos a formulação para otimização de dimensões aplicada a estruturas modeladas por elementos de casca axissimétrica de 3 nós (Weaver Junior e Johnston, 1984). A análise de sensibilidade é feita empregando-se o método de diferenciação direta e para a solução do problema de otimização recorremos à técnica de gradiente denominada Método Modificado das Direções Viáveis (Vanderplaats, 1984). Como caso de teste analisamos o volante de uma roda de reação, que é um atuador rotativo de grande precisão utilizado em controle fino de atitude de satélites artificiais.

O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

De modo geral a formulação dos problemas de otimização é denotada por:

$$\begin{aligned} &\min && f(\mathbf{X},\mathbf{Y}) && \\ &\text{suj a} && g_j(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \le 0 && j = 1, m \\ & && h_k(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = 0 && k = 1, l \\ & && x^*_{+i} \le x_i \le x^*_{-i} && i = 1, n \end{aligned} \tag{1}$$

onde se deseja achar o vetor $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de variáveis de projeto que minimize a função objetivo $f(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, mantendo válidas as restrições, e que respeite determinadas relações com as variáveis de estado $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

No caso aqui analisado o vetor X corresponde às espessuras, t, nos nós dos elementos de casca. O vetor **Y** é formado pelas componentes do vetor de deslocamentos nodais, D, e dos autovetores Φ_i dos modos de vibrar.

A função objetivo é a massa da estrutura, formulada por:

$$f = M = \sum_{i=1}^{2ne} m_{tr\ i} \tag{2}$$

onde ne é o número de elementos do modelo e m_{tr} é a massa de cada tramo de elemento.

As restrições de desigualdade podem ser de quatro tipos:

i) Sobre o primeiro autovalor dos modos de vibrar:

$$g_1 = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1^*} \le 0 \tag{3}$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor e o símbolo * denota valor limite.

ii) Sobre deslocamentos:

$$g_j = \frac{d_j}{d_j^*} - 1 \le 0 \tag{4}$$

onde d_j é uma componente do vetor **D**.

iii) Sobre tensões:

$$g_j = \frac{\bar{\sigma}_j^2}{\bar{\sigma}_j^{*2}} - 1 \leq 0 \qquad (5)$$

onde σ_j é a tensão equivalente de Von Mises calculada para um ponto na estrutura.

iv) Sobre o momento de inércia relativo ao eixo de simetria:

$$g = 1 - \frac{I_{zz}}{I_{zz}^*} \leq 0 \qquad (6)$$

As restrições de lateralidade, exclusivamente sobre as variáveis de projeto, são estabelecidas de forma a evitar soluções construtivamente inviáveis (e.g. espessuras negativas).

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Neste trabalho recorremos ao método direto de análise de sensibilidade, em que as derivadas de restrições que dependem das variáveis de estado são calculadas a partir das expressões obtidas posteriormente à aproximação por elementos finitos.

i) Restrição no 1º autovalor.

A expressão para o cálculo dos pares autovalor-autovetor dos modos livres de vibrar é:

$$S\,\Phi_j = \lambda_j\, \mathbf{M}\, \Phi_j \qquad (7)$$

onde S e M são respectivamente matrizes globais de rigidez e de massa e os λ_j, Φ_j são os referidos pares.

Derivando (7) em relação a uma variável de projeto x_i e manipulando extensivamente esta expressão , chega-se a:

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} = \Phi_j^T \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \Phi_j - \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \Phi_j \right) \qquad (8)$$

onde $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i}$ são montadas a partir das derivadas das matrizes de elementos correspondentes.

ii) Restrições em deslocamentos.

A equação de equilíbrio estático é dada por:

$$S\,\mathbf{D} = \mathbf{A} \qquad (9)$$

onde **A** é o vetor de ações nodais e **D** é o vetor de deslocamentos globais. Derivando e manipulando:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x_i} = S^{-1} \left[- \frac{\partial S}{\partial x_i} \mathbf{D} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \right] \qquad (10)$$

Recorrendo ao vetor de separação $\mathbf{d}^{(j)}$ com componentes

$$d_k^{(j)} = \begin{cases} 1 \text{ se } k = j \\ 0 \text{ se } k \neq j \end{cases} \qquad k = 1, \ldots, n$$

tem-se que $d_j = \mathbf{d}^{(j)T}\,\mathbf{D}$, e com isso:

$$\frac{\partial d_j}{\partial x_i} = \mathbf{d}^{(j)T} S^{-1} \left[- \frac{\partial S}{\partial x_i} \mathbf{D} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \right] \qquad (11)$$

iii) Restrições em tensões.

A expressão para o cálculo da tensão equivalente de Von Mises é:

$$\bar{\sigma}_j^2 = \sigma_j^T\, \mathbf{V}\, \sigma_j \qquad (12)$$

onde σ_j é o vetor de tensões e **V** é a matriz de coeficientes de Von Mises (Nó e Aguinagalde, 1987).

Por outro lado, quando se discretiza por elementos finitos as tensões são interpoladas dos deslocamentos do elemento por:

$$\sigma_j = \mathbf{C}_j\, \mathbf{q}_j \qquad (13)$$

sendo:

$$\mathbf{q}_j = \mathbf{D}^{(j)}\, \mathbf{D} \qquad (14)$$

Derivando (13):

$$\frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{C}_j}{\partial x_i} \mathbf{q}_j + \mathbf{C}_j \frac{\partial \mathbf{q}_j}{\partial x_i} \qquad (15)$$

Derivando a expressão (5) para restrições em tensões:

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 2\, \sigma_j^T\, \mathbf{V} \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i} =$$

$$= 2\, \sigma_j^T\, \mathbf{V} \left[\frac{\partial \mathbf{C}_j}{\partial x_i} \mathbf{q}_j + \mathbf{C}_j \frac{\partial \mathbf{q}_j}{\partial x_i} \right] \qquad (16)$$

onde de (14) e (9):

$$\frac{\partial \mathbf{q}_j}{\partial x_i} = \mathbf{D}^{(j)} S^{-1} \left[- \frac{\partial S}{\partial x_i} \mathbf{D} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \right] \qquad (17)$$

O MÉTODO MODIFICADO DAS DIREÇÕES VIÁVEIS

Para resolver o problema de programação não linear com restrições posto pelas expressões de (1) a (6) empregamos o Método Modificado das Direções Viáveis, MMDV, apresentado por Vanderplaats (1984).

O procedimento geral para os métodos de gradiente é seguir a fórmula de atualização:

$$\mathbf{X}^k = \mathbf{X}^{k-1} + \alpha^*\, \mathbf{d}^k \qquad (18)$$

onde k é o número da iteração, $\mathbf{d}^k$ é o vetor de direção de busca e α^* um parâmetro escalar de movimento.

Assim, procede-se à otimização em duas etapas: a primeira de escolha da direção de busca e a seguinte executando uma busca unidimensional nesta direção para reduzir a função objetivo sujeita às restrições.

No MMDV a direção de busca deve satisfazer dois critérios, usabilidade e viabilidade, ilustrados na Figura 1.

Quando não há restrições de igualdade esses critérios são traduzidos matematicamente pelo subproblema de otimização:

$$\max \quad -\nabla f(\mathbf{X})\,\mathbf{d}$$

$$\text{suj} \quad \nabla g\,\mathbf{d} \le 0$$

$$\mathbf{d}\,\mathbf{d} \le 1 \qquad (19)$$

onde a função objetivo corresponde ao critério de usabilidade. A primeira restrição, em que as linhas de ∇g contêm as transpostas dos gradientes do conjunto J de restrições ativas, representa o critério de viabilidade. A segunda restrição simplesmente impõe a normalização do vetor de direção de busca **d**.

Já para a busca unidimensional, Vanderplaats (1984) propõe uma estratégia em que o parâmetro α é estimado de forma a tornar ativa alguma das restrições potencialmente ativas nas proximidades do atual ponto de projeto $\mathbf{X^0}$, resultando em movimento em direção a um vértice. Naturalmente nesse movimento procura-se ao mesmo tempo minimizar f.

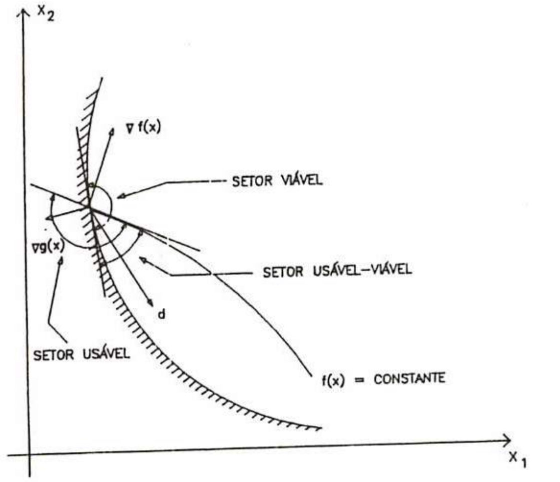

Figura 1. Direção usável-viável.

Então, considerando-se um subconjunto K de restrições quase ativas, tem-se que o α que levará uma delas para 0 segue:

$$g_j(\mathbf{X}) - \alpha \frac{dg_j(\mathbf{X})}{d\alpha} = 0 \quad j \in K,\ j \notin J \quad (20)$$

De (18) e usando a regra da cadeia chega-se a (Vanderplaats, 1984):

$$\alpha j = -\frac{g_j(\mathbf{X})}{\nabla g_j(\mathbf{X})\,\mathbf{d}} \quad j \in K,\ j \notin J \qquad (21)$$

Escolhe-se o menor dos α_j em (21) e prossegue-se a busca unidimensional daí em diante.

Em seguida é necessário fazer mais um movimento no sentido de voltar à região viável. Pode-se então estabelecer um subproblema de otimização em que o pequeno movimento de volta, $\delta\mathbf{X}$, é obtido de:

$$\min \quad \frac{1}{2}\,\delta\mathbf{X}\,\delta\mathbf{X}$$

$$\text{suj} \quad \nabla\mathbf{g}\,\delta\mathbf{X} + \mathbf{G} = 0 \qquad (22)$$

onde ∇g é o mesmo do Problema 19 e G contém os valores das restrições em $\mathbf{X} = \mathbf{X^0} + \alpha\,\mathbf{d^1}$. Esse problema tem solução analítica pelas condições de Kuhn-Tucker, resultando em:

$$\delta\mathbf{X} = -\nabla\mathbf{g^T}\,[\,\nabla\mathbf{g}\,\nabla\mathbf{g^T}\,]^{-1}\,\mathbf{G} \qquad (23)$$

e o vetor **X** é atualizado adicionando-se $\delta\mathbf{X}$.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

A formulação apresentada foi testada na otimização do volante de uma roda de reação. Neste equipamento o volante está fixado a um cubo também rotativo e apoiado no eixo fixo (considerado totalmente rígido) através de dois mancais de rolamentos esféricos.

A Figura 2 ilustra os modelos estruturais propostos para o sistema completo, onde o volante é considerado rígido por simplicidade e os mancais são modelados sob diversas condições de rigidez.

Uma vez que a geometria da estrutura (ver Figura 3) e o carregamento centrífugo imposto são de natureza axissimétrica , resta verificar se o seu comportamento dinâmico pode também ser estudado desta forma. Os modos de vibração para os modelos na Figura 2 são calculados usando o software MSC/NASTRAN e os resultados obtidos mostram que a primeira freqüência lateral de flexão tem valor bem mais alto que a primeira freqüência de modo axissimétrico (Rodrigues, 1991). Assim a 1ª freqüência do volante é a predominante considerando-se o conjunto.

Os requisitos de projeto para a roda de reação, conforme Souza e Fleury (1988) e Rodrigues (1991), indicam que as expressões de (1) até (6) podem ser substituídas por:

$$\min \quad M$$

$$\text{suj. a} \quad g_1 = 1 - \frac{\lambda_1}{4 \times 10^7} \le 0$$

$$g_j = \frac{\bar{\sigma}_j^2}{4.18 \times 10^{15}} - 1 \le 0 \quad j=2,\ 49$$

$$g_{50} = 1 - \frac{I_{zz}}{5.457 \times 10^{-3}} \le 0$$

$$1 \times 10^3 \le x_i \le 1 \quad i=1,\ 30 \qquad (24)$$

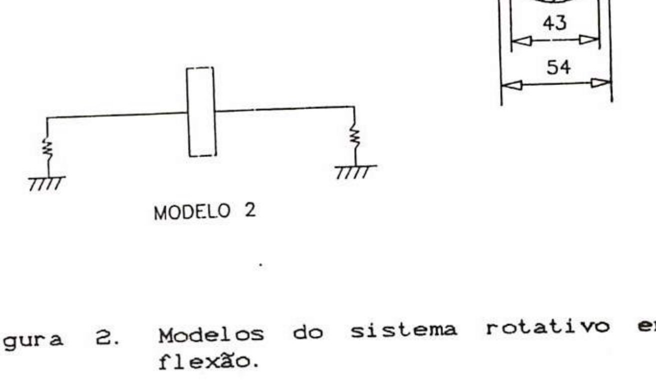

Figura 2. Modelos do sistema rotativo em flexão.

Neste caso o modelo estrutural tem apenas 12 elementos e 72 graus de liberdade.

As Figuras 3 e 4 ilustram respectivamente a comparação entre os projetos inicial e final e a evolução da função objetivo.

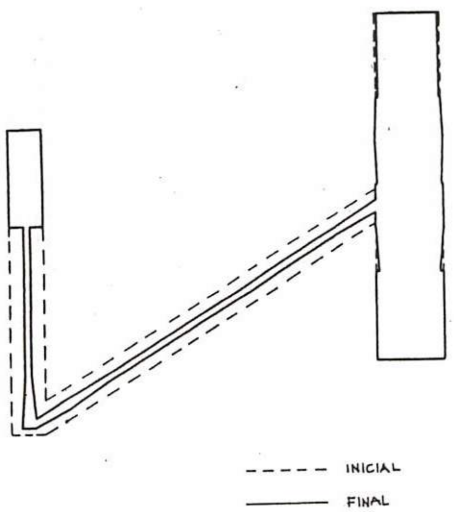

Figura 3. Projetos inicial e final.

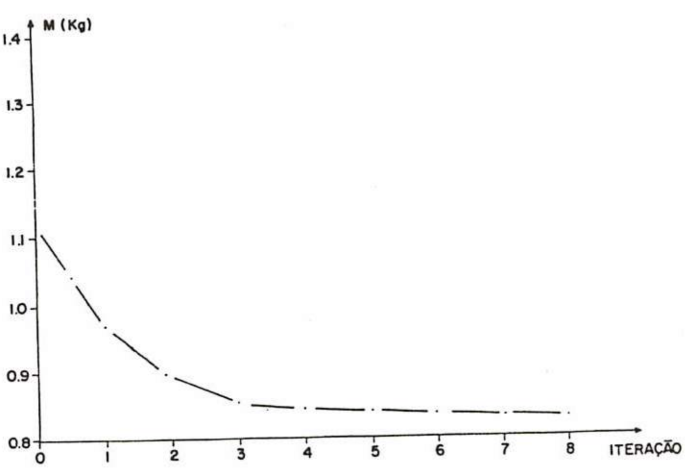

Figura 4. Evolução da função objetivo

Como esperado, a freqüência do 1º modo caiu, atingindo:

$$f_1^{axis} = 1005 \text{ Hz}$$

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi mostrado o desenvolvimento de uma metodologia para otimização de rotores flexíveis modelados como cascas axissimétricas. O programa de computador correspondente é de fácil implementação e independe da existência de pacotes de elementos finitos em geral caros e de difícil utilização. O procedimento adotado permitiu que se obtivesse um projeto para o volante da roda de reação com desempenho comparável aos volantes dos melhores fabricantes mundiais. Vários outros resultados para este tipo de problema podem ser encontrados em Rodrigues, 1991.

REFERÊNCIAS

.Sandgren, E.; Ragsdell, K.M. Optimal flywheel design with a general thickness form representation. *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 105:425-433, Sep. 1983.

.Ebrahimi, N.D. Optimum design of flywheels. *Computers & Structures*, 29(4):681-686, 1988.

.Nó, M.; Aguinagalde, J.M. Finite element method and optimality criterion based structural optimization. *Computers & Structures*, 27(2):287-295, 1987.

.Yang, R.J. A three-dimensional shape optimization system-SHOP3D. *Computers & Structures*, 31(6):881-890, 1989.

.Phelan, D.G.; Haber, R.B. Sensitivity analysis of linear systems using domain parametrization and a mixed mutual energy principle. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 77:31-59, 1989.

.Weaver Junior, W.; Johnston, P.R. *Finite elements for structural analysis*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1984. (Prentice-Hall Civil Engineering and Engineering Mechanics Series).

.Vanderplaats,G.N An efficient feasible directions algorithm for design synthesis. *AIAA Journal*, 22(11):1663-1640, Nov. 1984.

.Bathe, K.J. *Finite element procedures in engineering analysis*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1982.

.Souza, P.N.; Fleury, A.T. *A roda de reação para o satélite brasileiro de sensoriamento remoto (SSR) da MECB: subsídios para um projeto nacional*. São José dos Campos, INPE, ago. 1988. 29 p. (INPE-A-ETD-0048).

.Rodrigues, R.L. *Estudo para otimização estrutural de rotores flexíveis em sistemas mecânicos*. Tese de Mestrado em Ciência Espacial/Mecânica Orbital. São José dos Campos, INPE, fev. 1991.

ABSTRACT

In this paper we present a methodology to perform sizing optimization in structures that can be modelled as axysymmetric shells, with static loading and vibrations also of this kind. The structure analysis is done via a finite element method. The results obtained in optimizing the flywheel of an atitude control system actuator, a reaction wheel, are shown as application exemple.