

PONTES DE CONCRETO
NOTAS DE AULA - FASCÍCULO 6
CÁLCULO DE PONTES DE VIGAS

CONTEÚDO

1- INTRODUÇÃO	1
2- PROCESSO DE ENGESSER-COURBON	2
2.1- Preliminares	2
2.2- Quinhões de carga	4
2.3- Momentos fletores nas vigas	7
2.4- Forças cortantes nas vigas	13
2.5- Momentos fletores nas transversinas	14
2.6- Forças cortantes nas transversinas	17
3- PROCESSO DE GUYON-MASSONNET	19
3.1- Preliminares	19
3.2- Carregamento senoidal equivalente ao carregamento real	21
3.3- Coeficiente de repartição transversal	22
3.4- Momentos fletores nas vigas	23
3.5- Momentos fletores nas transversinas	23
3.6- Momentos de torção	23
3.7- Forças cortantes nas vigas	24
3.8- Forças cortantes nas transversinas	24
3.9- Recomendações práticas	25
3.10- Expressões dos coeficientes	29
BIBLIOGRAFIA	32

0852114

SYSNO	0852114
PROD	002516

PONTES DE CONCRETO

NOTAS DE AULA - FASCÍCULO 6

CÁLCULO DE PONTES DE VIGAS

1- INTRODUÇÃO

No tabuleiro de uma ponte de vigas, podem-se identificar três elementos: as vigas longitudinais (também chamadas de vigas principais ou longarinas), as vigas transversais (também chamadas de transversinas), e a laje.

Normalmente, esses três elementos formam um conjunto monolítico, cujo cálculo exato é de tal modo complexo e laborioso, que a sua realização corrente utilizando processos "manuais" (isto é, sem o auxílio de computadores) é praticamente impossível.

Sendo assim, para se calcular "manualmente" os esforços nos elementos que formam o tabuleiro de uma ponte de vigas é necessário recorrer aos chamados processos aproximados, que, considerando simplificações adequadas, permitem realizar o cálculo "manual" dos esforços, de maneira simples, objetiva e segura, sem o auxílio de computadores.

O procedimento empregado na maioria dos processos aproximados, é conhecido como "método dos coeficientes de repartição", e consiste em determinar a repartição do carregamento aplicado, entre os elementos que compõem o tabuleiro. Uma vez conhecida a parcela do carregamento que cabe a cada elemento, chamada também de "quinhão de carga", faz-se o cálculo de cada elemento isoladamente com o correspondente quinhão de carga.

Os processos aproximados podem ser classificados em três categorias:

- processo que considera as longarinas independentes;
- processo que considera o chamado efeito de grelha;
- processo que supõe que o tabuleiro é uma placa ortótropa.

O processo que considera as longarinas independentes, pode ser utilizado em tabuleiros com duas longarinas, onde se obtêm resultados satisfatórios, mas nos tabuleiros com mais de duas longarinas, não é recomendável a sua utilização pois a aproximação é em geral muito grosseira.

Dentre os processos que consideram o efeito de grelha, os mais

conhecidos são o processo de Engesser-Courbon e o processo de Leonhardt.

O processo conhecido como de Engesser-Courbon, é atribuído a F. Engesser (Alemanha), e foi desenvolvido por J. Courbon e M. Mallet (França). Neste processo, que se caracteriza pela sua simplicidade e campo de aplicação, são adotadas as seguintes hipóteses simplificadas:

- o tabuleiro monolítico é transformado numa malha de vigas longitudinais e transversais;
- é desprezado o efeito de torção nas vigas;
- a transversina é suposta como tendo rigidez infinita.

O processo conhecido como de Leonhardt, foi desenvolvido por F. Leonhardt (Alemanha), e considera as seguintes hipóteses simplificadas:

- o tabuleiro monolítico é transformado numa malha de vigas longitudinais e transversais;
- é desprezado o efeito de torção nas vigas;
- a transversina é suposta flexível.

Dentre os processos que supõem que o tabuleiro é uma placa ortótropa, o mais conhecido é o processo de Guyon-Massonnet. A idéia original do processo é atribuída a Y. Guyon (França) que elaborou um processo para calcular placas ortótropas desprezando o efeito de torção, utilizando o método dos coeficientes de repartição. Posteriormente, C. Massonnet (França) generalizou o processo introduzindo no cálculo a consideração do efeito de torção.

Na presente publicação serão apresentados os processos de Engesser-Courbon e de Guyon-Massonnet. No texto, as vigas longitudinais serão chamadas simplesmente de vigas, e as vigas transversais de transversinas.

2- PROCESSO DE ENGESSER-COURBON

2.1- Preliminares

Como consequência das hipóteses simplificadoras adotadas, este processo de cálculo fornece bons resultados quando o tabuleiro de ponte analisado apresenta a dimensão longitudinal predominando sensivelmente sobre a dimensão transversal.

As hipóteses simplificadoras são:

- transformação do tabuleiro monolítico numa malha de vigas longitudinais e transversais;
- não consideração do efeito de torção das vigas;
- suposição de rigidez infinita para a transversina.

A segunda hipótese implica no fato de que a reação mútua nos cruzamentos das vigas longitudinais com as transversais seja unicamente uma força vertical.

Na figura 1, apresenta-se a esquematização gráfica das hipóteses simplificadoras do processo.

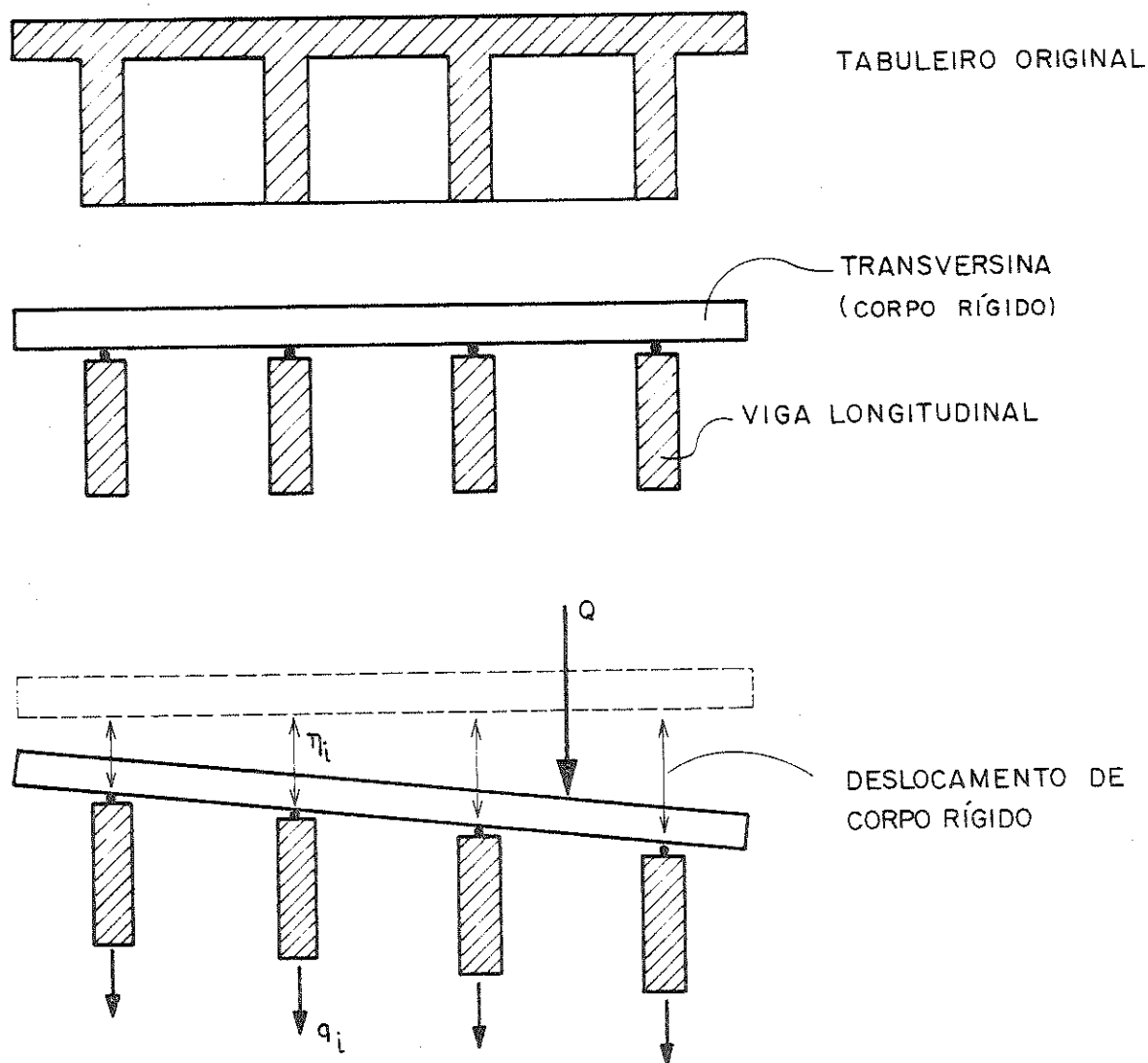


FIGURA 1

2.2- Quinhões de carga

Denomina-se quinhão de carga, a parcela de carga q_i que cada viga recebe quando se aplica uma carga concentrada Q num ponto qualquer do tabuleiro (Figura 1).

A flecha da viga i é por seu turno proporcional ao quinhão de carga q_i , e pode ser determinada com a expressão:

$$\eta_i = \alpha \frac{q_i}{E \cdot I_i}$$

onde:

α = constante que depende do esquema estático da viga, e do vão

E = módulo de deformação longitudinal do material

I_i = momento de inércia da viga

Sendo a grelha ortogonal, todas as vigas têm o mesmo esquema estático e o mesmo vão, portanto α é igual para todas as vigas.

Se a carga Q estiver aplicada no Centro Elástico da seção transversal (Figura 2), todas as vigas terão o mesmo valor da flecha.

Então temos:

$$\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_i = \dots = \eta_n$$

$$\frac{q_1}{I_1} = \frac{q_2}{I_2} = \dots = \frac{q_i}{I_i} = \dots = \frac{q_n}{I_n} = \frac{\sum q_i}{\sum I_i}$$

$$\frac{q_i}{I_i} = \frac{\sum q_i}{\sum I_i} = \frac{Q}{\sum I_i}$$

$$q_i = Q \frac{I_i}{\sum I_i}$$

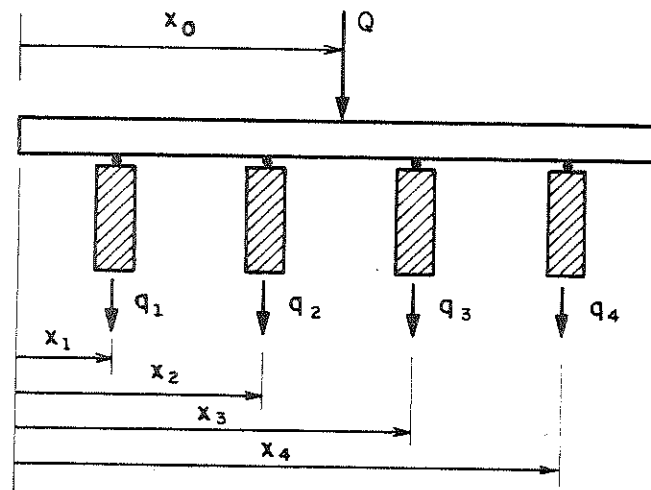


FIGURA 2

O Centro Elástico da seção transversal pode ser determinado conforme mostrado a seguir:

$$q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2 + \dots + q_n \cdot x_n = Q \cdot x_0$$

$$\sum q_i \cdot x_i = Q \cdot x_0 \quad \therefore \quad x_0 = \frac{\sum q_i \cdot x_i}{Q}$$

substituindo $q_i = Q \frac{I_i}{\sum I_i}$

obtem-se:
$$x_0 = \frac{\sum I_i \cdot x_i}{\sum I_i}$$

Se a carga Q estiver aplicada fora do Centro Elástico da seção transversal (Figura 3), pode-se determinar o valor de q_i como soma de duas parcelas: q_i^0 e q_i^1 onde:

q_i^0 = quinhão de carga para a força Q aplicada no Centro Elástico

q_i^1 = quinhão de carga para o momento ($Q \cdot e$) relativo à excentricidade e da força Q em relação ao Centro Elástico

O valor de q_i^0 já foi deduzido anteriormente e vale:

$$q_i^0 = Q \frac{I_i}{\sum I_i}$$

O valor de q_i^1 pode ser determinado como se mostra a seguir:

$$\frac{x_1}{x_i} = \frac{\eta_1}{\eta_i}$$

sendo: $\eta_1 = \alpha \frac{q_1^1}{E \cdot I_1}$ e $\eta_i = \alpha \frac{q_i^1}{E \cdot I_i}$

obtem-se: $\frac{x_1}{x_i} = \frac{q_1^1 / I_1}{q_i^1 / I_i} \quad \therefore \quad q_i^1 = \frac{q_1^1}{I_1 \cdot x_1} I_i \cdot x_i$

Fazendo o equilíbrio de momentos em relação ao Centro Elástico pode-se escrever:

$$\sum q_i^1 \cdot x_i = Q \cdot e$$

Substituindo q_i^1 pela expressão deduzida anteriormente obtém-se:

$$\frac{q_1^1}{I_1 \cdot x_1} \sum I_i \cdot x_i^2 = Q \cdot e \quad \therefore \quad q_1^1 = Q \cdot e \frac{I_1 \cdot x_1}{\sum I_i \cdot x_i^2}$$

Generalizando pode-se escrever:

$$q_i^1 = Q \cdot e \frac{I_i \cdot x_i}{\sum I_i \cdot x_i^2}$$

Portanto a expressão final de $q_i = q_i^0 + q_i^1$ será:

$$q_i = Q \left(\frac{I_i}{\sum I_i} + e \cdot \frac{I_i \cdot x_i}{\sum I_i \cdot x_i^2} \right)$$

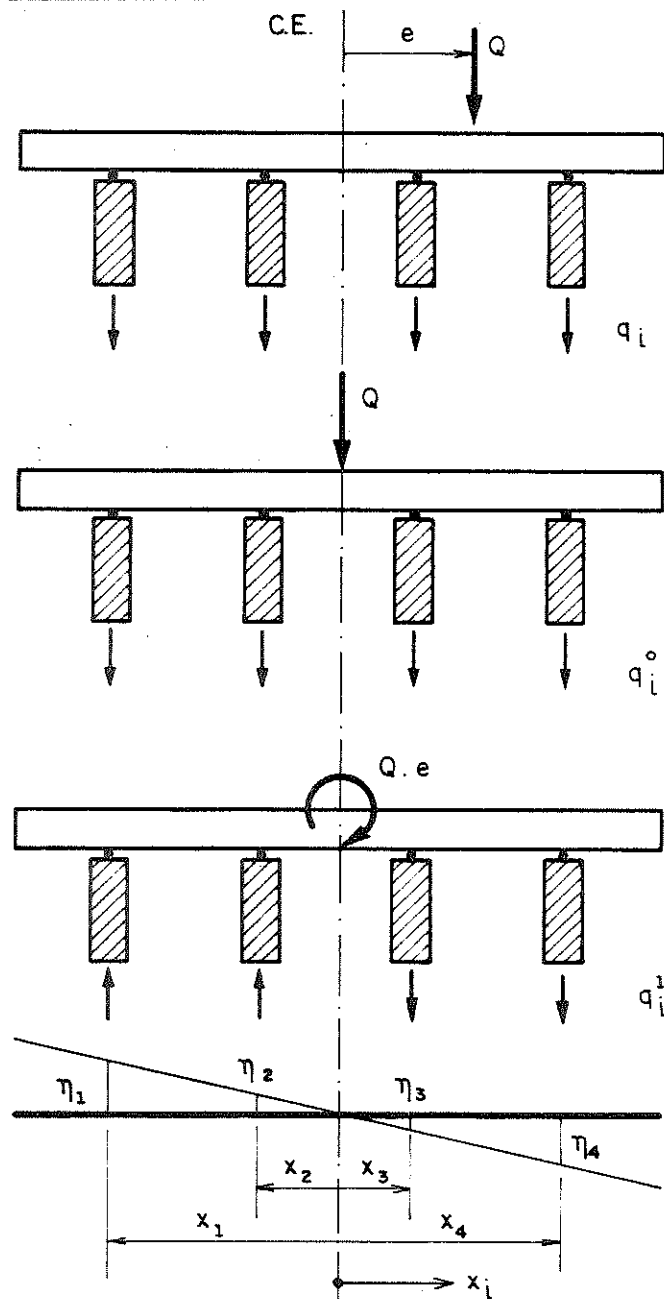


FIGURA 3

2.3- Momentos fletores nas vigas

O procedimento de cálculo dos momentos fletores nas vigas é apresentado a seguir, utilizando-se o caso da grelha composta de três vigas simplesmente apoiadas ligadas por uma única transversina central, mostrada na Figura 4.

Pretende-se calcular os momentos fletores nas seções S_a , S_b e S_c , quando a grelha é carregada com uma carga concentrada Q , aplicada na viga a .

Supondo inicialmente que as vigas b e c são indeformáveis, e sendo a transversina indeformável (uma das hipóteses do processo), a viga a terá o comportamento de uma viga contínua sobre três apoios.

Nessa situação, as reações nos três apoios da viga a terão os seguintes valores:

X_a no apoio central;

$$\left(\frac{Q \cdot s'}{\ell} - \frac{X_a}{2} \right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{Q \cdot s}{\ell} - \frac{X_a}{2} \right) \quad \text{nos apoios extremos.}$$

Note-se que $\frac{Q \cdot s'}{\ell}$ e $\frac{Q \cdot s}{\ell}$ seriam as reações nos apoios da viga a simplesmente apoiada, isto é, sem o apoio central.

O momento fletor na seção S_a da viga a , contínua, valerá:

$$M'_x = \left(\frac{Q \cdot s'}{\ell} - \frac{X_a}{2} \right) \cdot x = \frac{Q \cdot s' \cdot x}{\ell} - \frac{X_a \cdot x}{2}$$

$M_x^0 = \frac{Q \cdot s' \cdot x}{\ell}$ é o momento fletor na seção S_a da viga a , simplesmente apoiada.

Pode-se escrever então que:

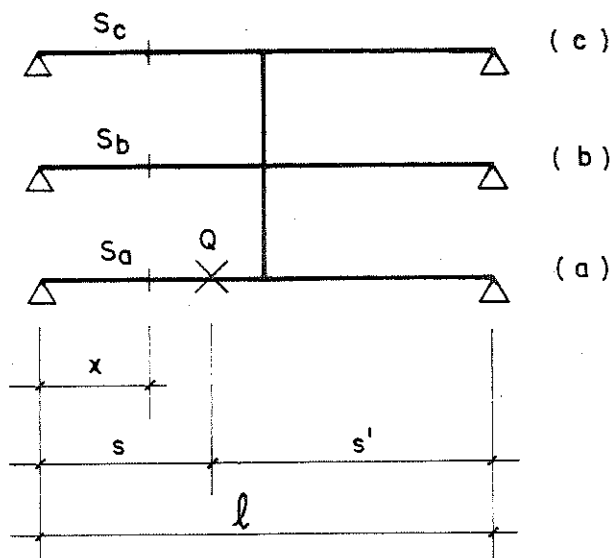
$$M'_x = M_x^0 - \frac{X_a \cdot x}{2}$$

Considerando, agora, as vigas b e c na situação real, isto é, deformáveis, a reação X_a , será absorvida pelas três vigas conforme indicado a seguir:

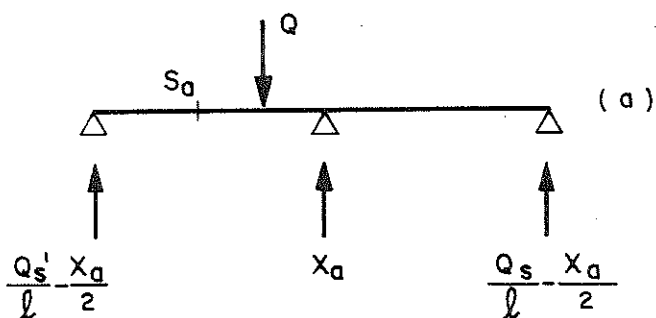
$$\begin{aligned} X_a \cdot q_{aa} & \text{ para a viga } a \\ X_a \cdot q_{ba} & \text{ para a viga } b \\ X_a \cdot q_{ca} & \text{ para a viga } c \end{aligned}$$

Então, na seção S_a da viga a , aparecerá, além do momento M'_x , o momento:

$$M''_x = \frac{X_a \cdot q_{aa}}{2} \cdot x$$



CARGA Q NA VIGA a



VIGAS b e c INDEFORMÁVEIS

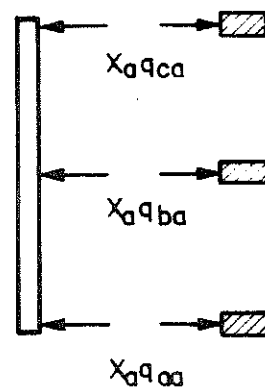
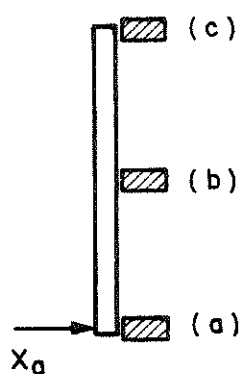
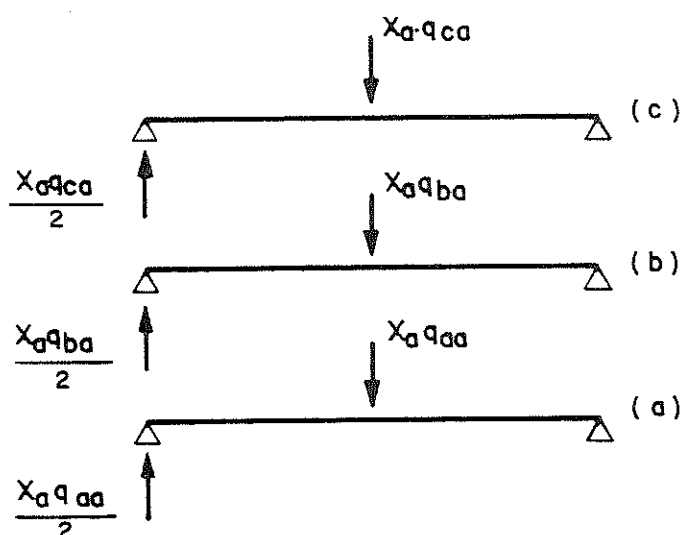


FIGURA 4

Portanto o momento fletor final na viga a terá o valor:

$$M_x = M'_x + M''_x = \left(M_x^0 - \frac{X_a \cdot x}{2} \right) + \frac{X_a \cdot q_{aa} \cdot x}{2} = M_x^0 - \frac{X_a \cdot x}{2} (1 - q_{aa})$$

Da expressão $M'_x = M_x^0 - \frac{X_a \cdot x}{2}$, obtém-se $-\frac{X_a \cdot x}{2} = M'_x - M_x^0$

Substituindo na expressão do momento fletor final M_x obtém-se:

$$M_x = M_x^0 + (M'_x - M_x^0) (1 - q_{aa})$$

$$M_x = M_x^0 \cdot q_{aa} + M'_x (1 - q_{aa})$$

Na viga b só existe a ação de $X_a \cdot q_{ba}$, e portanto o momento fletor na seção S_b terá o valor:

$$M_x = \frac{X_a \cdot q_{ba} \cdot x}{2}$$

Sendo $-\frac{X_a \cdot x}{2} = M'_x - M_x^0$ e portanto $\frac{X_a \cdot x}{2} = M_x^0 - M'_x$, obtém-se:

$$M_x = (M_x^0 - M'_x) q_{ba}$$

$$M_x = M_x^0 \cdot q_{ba} + M'_x (-q_{ba})$$

Na viga c só existe a ação de $X_a \cdot q_{ca}$, e portanto de maneira análoga, o momento fletor na seção S_c terá o valor:

$$M_x = M_x^0 \cdot q_{ca} + M'_x (-q_{ca})$$

Generalizando, pode-se escrever que:

$$M_x = M_x^0 \cdot q_i + M'_x \cdot q'_i, \text{ onde}$$

q_i = quinhão de carga de cada viga, cujo momento está sendo calculado, e que depende da posição da carga Q aplicada

q_{aa}, q_{ba}, q_{ca} : carga Q na viga a

q_{ab}, q_{bb}, q_{cb} : carga Q na viga b

q_{ac}, q_{bc}, q_{cc} : carga Q na viga c

$q'_i = 1 - q_i$ se a carga Q está na viga em que se calcula o momento

$q'_i = -q_i$ se a carga Q não está na viga em que se calcula o momento

Em resumo, o cálculo de M_x provocado pela carga móvel poderia ser feito na seguinte sequência (Figura 5):

a) Determina-se a linha de influência de M_x^0 , com a qual pode-se calcular:

$$M_x^0 = Q \cdot \eta_0 \quad \text{e} \quad M_x^0 \cdot q_i = Q \cdot \eta_0 \cdot q_i$$

b) Determina-se a linha de influência de M_x' , com a qual pode-se calcular:

$$M_x' = Q \cdot \eta' \quad \text{e} \quad M_x' \cdot q_i' = Q \cdot \eta' \cdot q_i'$$

c) Determina-se o momento final:

$$M_x = M_x^0 \cdot q_i + M_x' \cdot q_i' = Q \cdot \eta_0 \cdot q_i + Q \cdot \eta' \cdot q_i'$$

que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$M_x = (Q \cdot q_i) \cdot \eta_0 + (Q \cdot q_i') \cdot \eta'$$

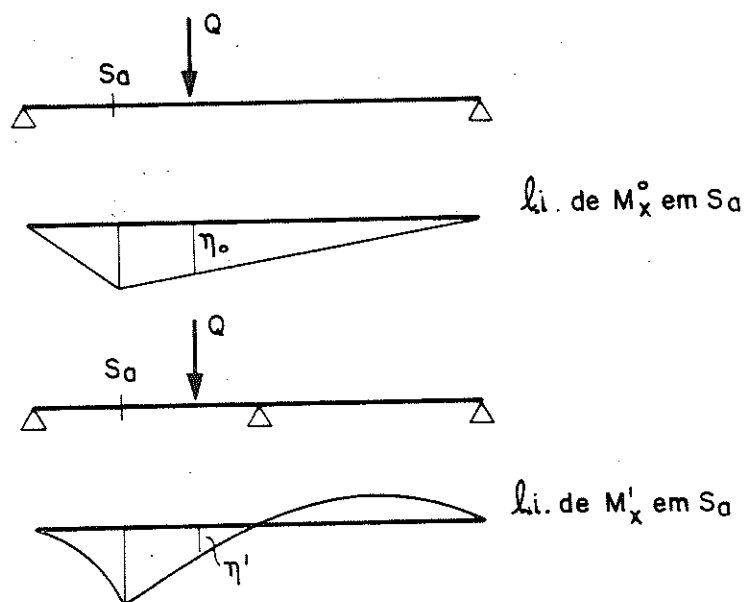


FIGURA 5

Esta última expressão mostra que o cálculo de M_x pode ser feito determinando-se inicialmente as "cargas reduzidas" ($Q \cdot q_i$) e ($Q \cdot q_i'$), para em seguida multiplicá-las pelas ordenadas da linha de influência η_0 e η' . As "cargas reduzidas" ($Q \cdot q_i$) e ($Q \cdot q_i'$) são também denominadas "trens-tipo" das vigas.

ROTEIRO DE CÁLCULO

a) Determinar os quinhões de carga q_i e q'_i de cada viga, utilizando as expressões gerais:

$$q_i = \frac{I_i}{\sum I_i} + e \cdot \frac{I_i \cdot x_i}{\sum I_i \cdot x_i^2} \quad \text{e} \quad q'_i = 1 - q_i \quad \text{ou} \quad q'_i = -q_i$$

No caso da grelha utilizada na dedução tem-se:

Viga a:

$$\begin{aligned} q_{aa} &= \frac{I_a}{\sum I_i} + e_a \cdot \frac{I_a \cdot x_a}{\sum I_i \cdot x_i^2} & \text{e} \quad q'_{aa} &= 1 - q_{aa} \\ q_{ab} &= \frac{I_a}{\sum I_i} + e_b \cdot \frac{I_a \cdot x_a}{\sum I_i \cdot x_i^2} & \text{e} \quad q'_{ab} &= -q_{ab} \\ q_{ac} &= \frac{I_a}{\sum I_i} + e_c \cdot \frac{I_a \cdot x_a}{\sum I_i \cdot x_i^2} & \text{e} \quad q'_{ac} &= -q_{ac} \end{aligned}$$

Viga b:

$$\begin{aligned} q_{ba} &= \frac{I_b}{\sum I_i} + e_a \cdot \frac{I_b \cdot x_b}{\sum I_i \cdot x_i^2} & \text{e} \quad q'_{ba} &= -q_{ba} \\ q_{bb} &= \frac{I_b}{\sum I_i} + e_b \cdot \frac{I_b \cdot x_b}{\sum I_i \cdot x_i^2} & \text{e} \quad q'_{bb} &= 1 - q_{bb} \\ q_{bc} &= \frac{I_b}{\sum I_i} + e_c \cdot \frac{I_b \cdot x_b}{\sum I_i \cdot x_i^2} & \text{e} \quad q'_{bc} &= -q_{bc} \end{aligned}$$

Viga c: é simétrica da viga a

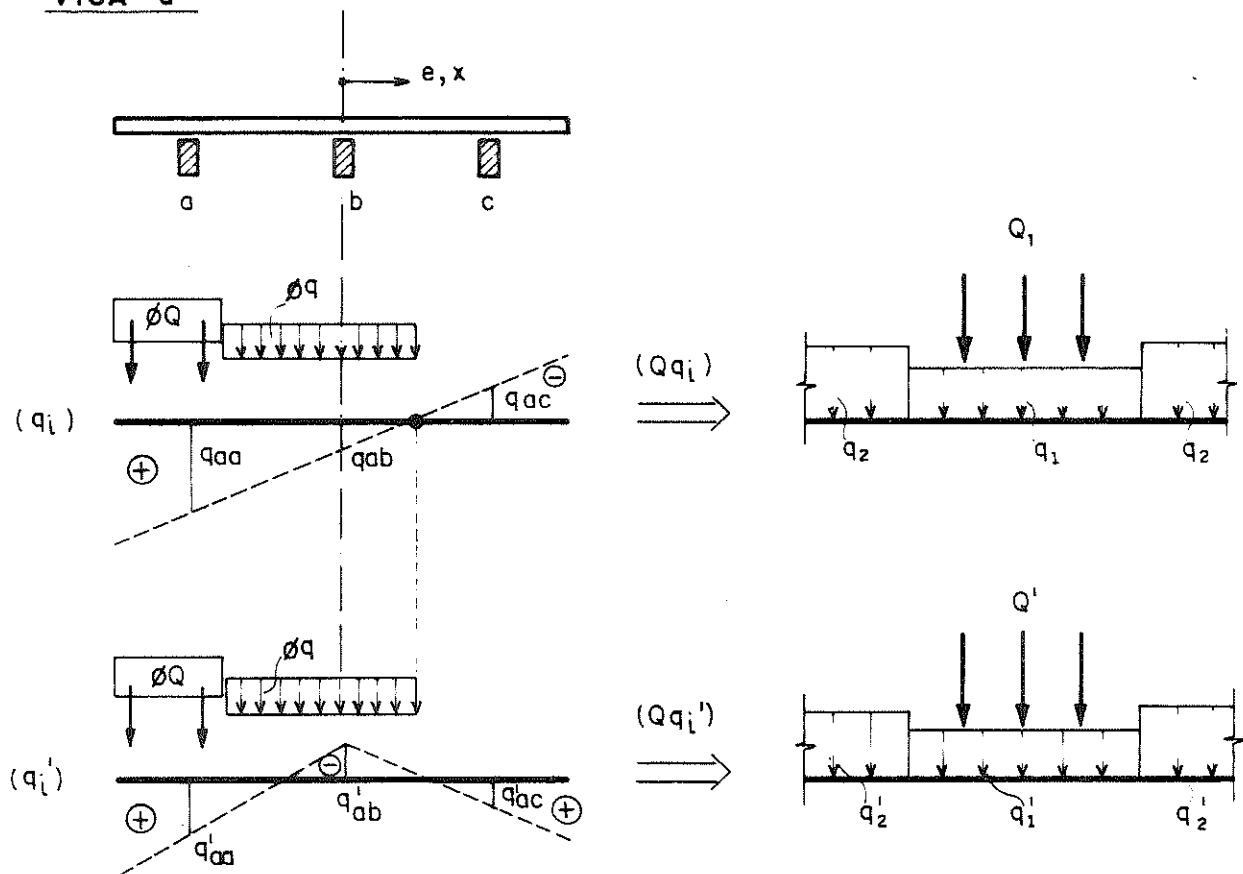
b) Determinar os trens-tipo $(Q \cdot q_i)$ e $(Q \cdot q'_i)$ de cada viga (Fig. 6)

c) Determinar o momento fletor $M_x^0 \cdot q_i = (Q \cdot q_i) \cdot \eta_0$ carregando-se a linha de influência do momento fletor em cada seção das vigas com o trem-tipo $(Q \cdot q_i)$ (Figura 7).

d) Determinar o momento fletor $M'_x \cdot q'_i = (Q \cdot q'_i) \cdot \eta'$ carregando-se a linha de influência do momento fletor em cada seção das vigas, supostas apoiadas nas transversinas, com o trem-tipo $(Q \cdot q'_i)$ (Figura 8).

e) Determinar o momento final $M_x = M_x^0 \cdot q_i + M'_x \cdot q'_i$

VIGA a



VIGA b

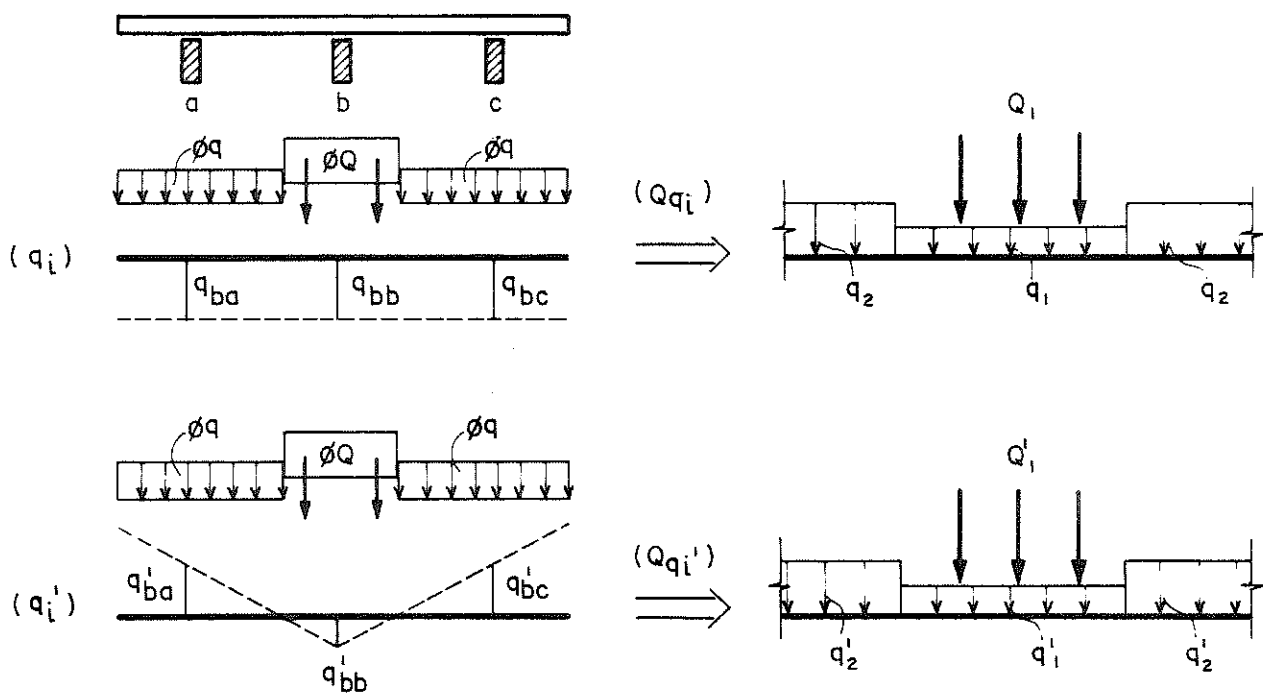


FIGURA 6

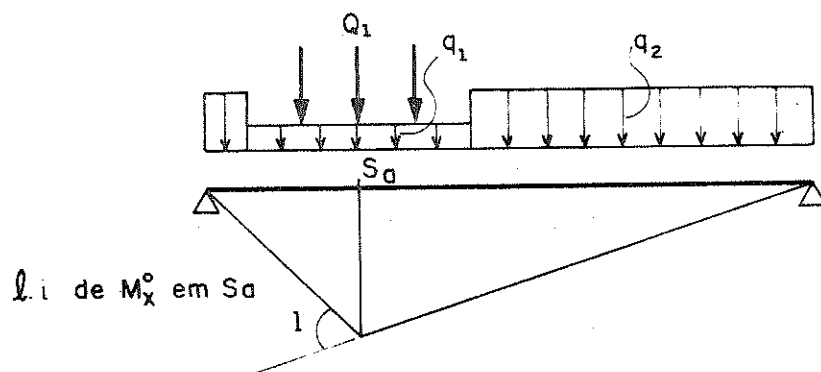


FIGURA 7

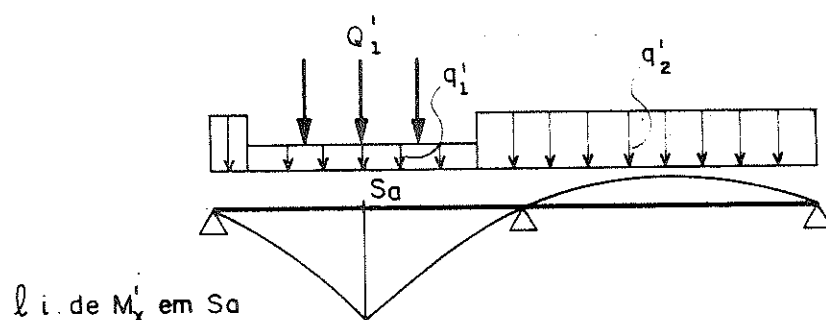


FIGURA 8

f) Observações importantes:

- Os carregamentos para obtenção dos trens-tipo $(Q.q_1)$ e $(Q.q'_1)$ devem ser os mesmos.
- Os trens-tipo $(Q.q_1)$ e $(Q.q'_1)$ devem ser dispostos sobre a viga na mesma posição.
- Para a procura da posição mais desfavorável do carregamento pode ser levado em conta apenas o carregamento $(Q.q_1)$, pois a consideração simultânea de $(Q.q_1)$ e $(Q.q'_1)$ fica muito complexa. Essa simplificação é válida porque a parcela correspondente a $(Q.q_1)$ no cálculo de M_x é preponderante, da ordem de 95%, nos casos usuais.

2.4- Forças cortantes nas vigas

O procedimento de cálculo do momento fletor nas vigas mostrado anteriormente pode ser utilizado também para o cálculo da força cortante nas vigas:

$$V_x = V_x^0.q_1 + V_x'.q'_1$$

A única ressalva refere-se à preponderância de $(Q.q_1)$ sobre $(Q.q'_1)$, que pode não ocorrer, mesmo nos casos usuais.

2.5- Momentos fletores nas transversinas

O procedimento de cálculo dos momentos fletores nas transversinas é apresentado a seguir, utilizando-se novamente o caso da grelha composta de três vigas simplesmente apoiadas ligadas por uma única transversina central, mostrada na Figura 9.

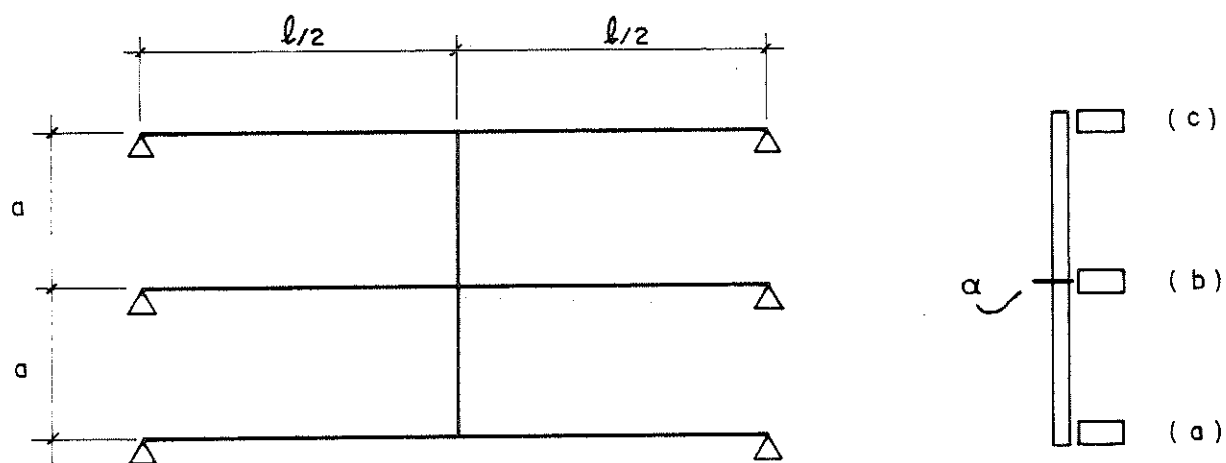


FIGURA 9

Pretende-se calcular o momento fletor na seção α , cruzamento da transversina com a viga b.

Com a carga $Q=1$ movendo-se sobre a transversina, tem-se na seção α da transversina, os seguintes valores do momento fletor (Figura 10):

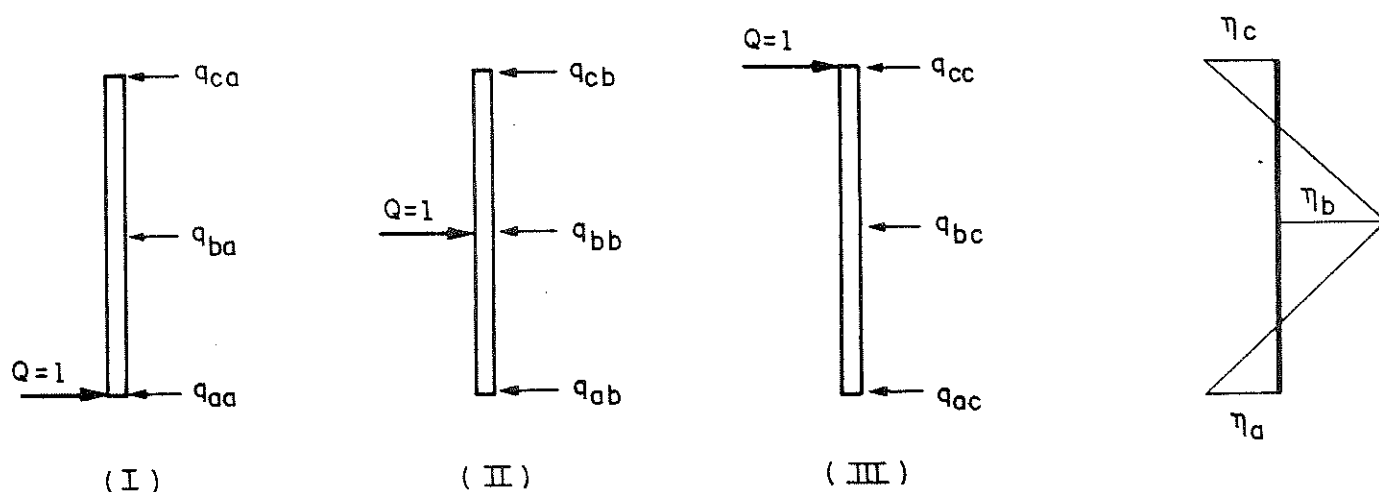


FIGURA 10

(I): $\eta_a = (q_{aa} - 1) \cdot a$ $Q=1$ no cruzamento com a viga a

(II): $\eta_b = q_{ab} \cdot a$ $Q=1$ no cruzamento com a viga b

(III): $\eta_c = q_{ac} \cdot a$ $Q=1$ no cruzamento com a viga c

η_a , η_b e η_c são as ordenadas da linha de influência do momento fletor na seção α .

Com a carga $Q=1$ movendo-se sobre a viga a, tem-se no vínculo da viga a com a transversina, a reação X_a (Figura 11).

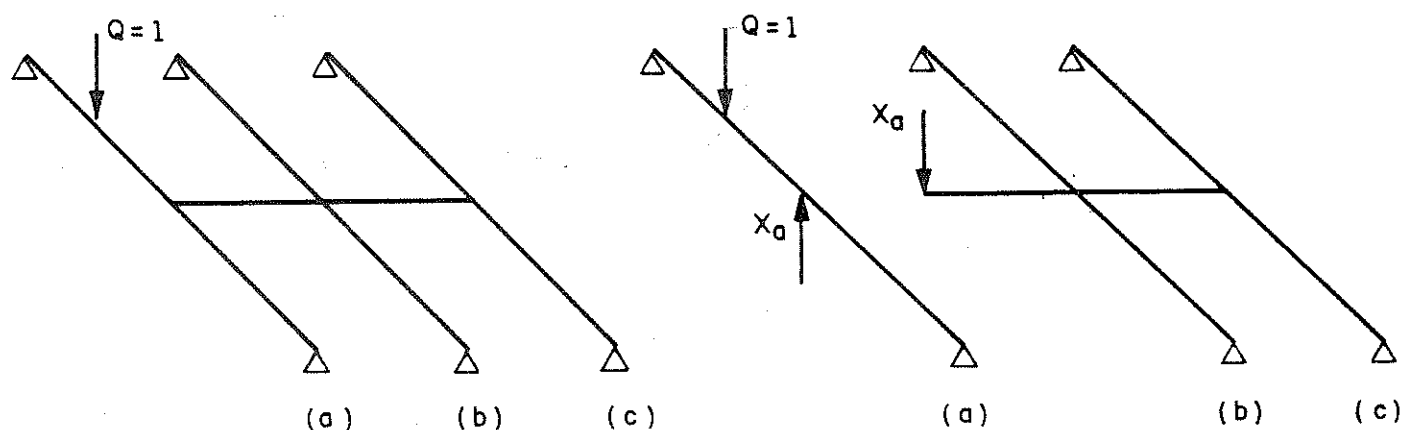


FIGURA 11

Para o cálculo do momento fletor na transversina, a situação é análoga ao caso (I), desde que se substitua $Q=1$ por X_a .

Portanto a linha de influência do momento fletor em α é semelhante à do caso anterior, bastando para obtê-la, reduzir a ordenada η para $\eta_a \cdot X_a$.

Para a carga $Q=1$ nas vigas b e c, de maneira análoga obtêm-se $\eta_b \cdot X_b$ e $\eta_c \cdot X_c$.

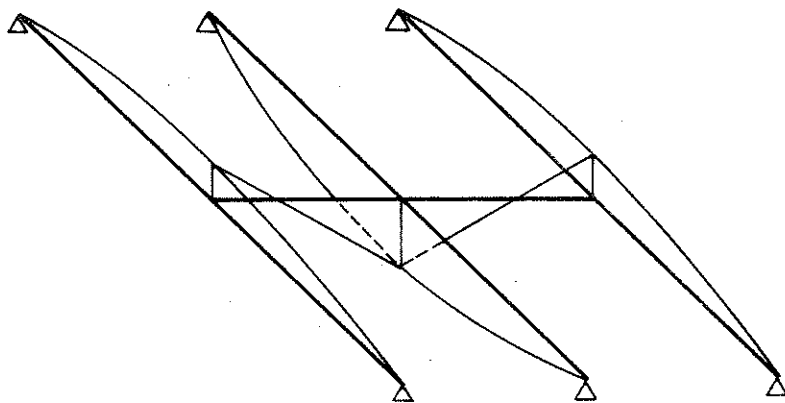
Portanto a superfície de influência do momento fletor em α terá na direção longitudinal, a forma da linha de influência de X_a , ou X_b , ou X_c (Figura 12).

Se o carregamento da grelha for uma carga q uniforme, o cálculo do momento fletor na seção α , utilizando a superfície de influência, poderá ser feita da seguinte forma:

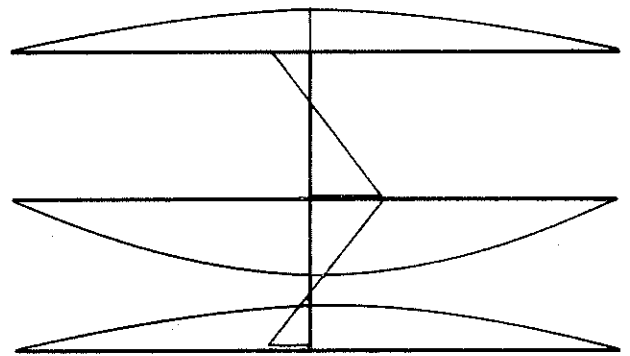
$$dM = q \cdot ds \cdot \Omega = q \cdot ds \cdot 0,6 \cdot \eta \cdot \ell = 0,6 \cdot q \cdot \ell \cdot \eta \cdot ds$$

$$M = \int_0^{2a} dM = \int_0^{2a} 0,6 \cdot q \cdot \ell \cdot \eta \cdot ds = 0,6 \cdot q \cdot \ell \cdot \int_0^{2a} \eta \cdot ds = 0,6 \cdot q \cdot \ell \cdot A$$

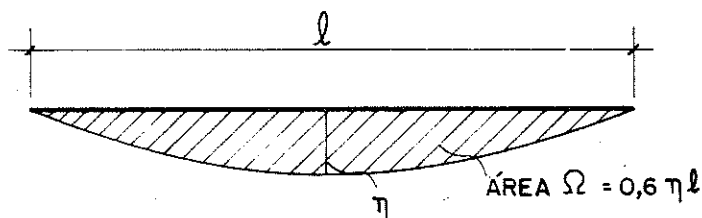
$$M = q \cdot (0,6 \cdot \ell \cdot A) = q \cdot (\text{Volume do sólido de influência})$$



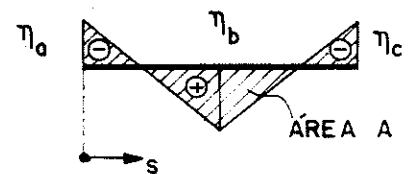
SUPERFÍCIE DE INFLUÊNCIA



REPRESENTAÇÃO PLANA



CORTE LONGITUDINAL



CORTE TRANSVERSAL

FIGURA 12

A expressão do volume do sólido de influência, $(0,6 \cdot \ell \cdot A)$, mostra que o momento fletor poderia ser calculado substituindo o sólido da Figura 12, pelo sólido da Figura 13, que tem o mesmo volume e é mais simples de ser calculado.

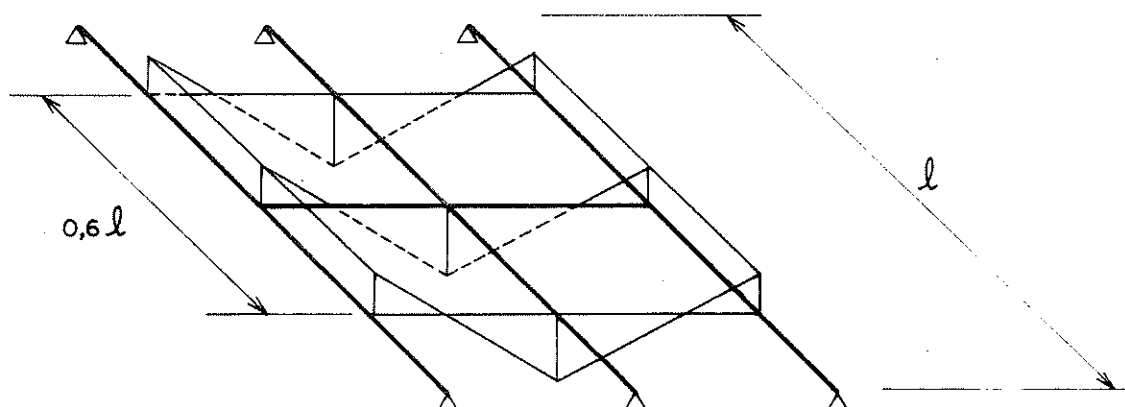


FIGURA 13

Para outros tipos de carregamento, como cargas concentradas e cargas distribuídas parciais, o sólido de influência simplificado da Figura 13 pode também ser utilizado com resultados satisfatórios.

Quando houver mais de uma transversina, para cada uma constrói-se uma superfície de influência análoga, como mostrada na Figura 14, substituindo-se ℓ pela distância entre as transversinas adjacentes à transversina em estudo.

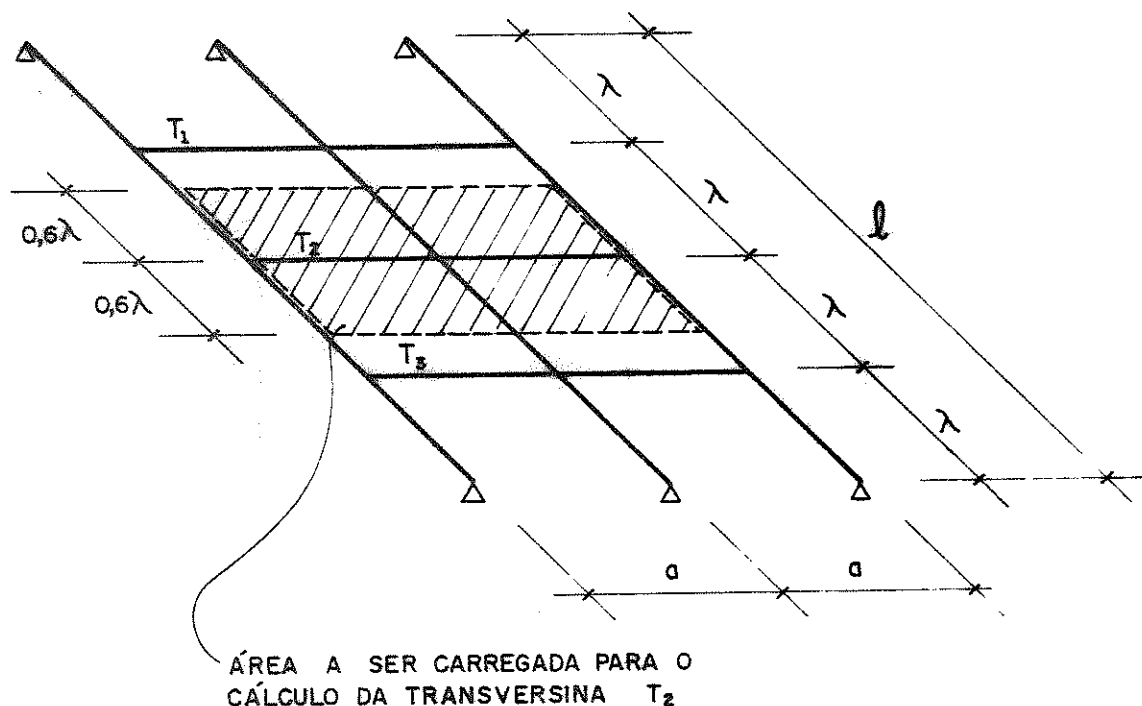


FIGURA 14

2.6- Forças cortantes nas transversinas

O cálculo da força cortante nas transversinas pode ser feito de modo análogo ao do momento fletor

Na grelha da Figura 9 pretende-se agora, calcular a força cortante na seção α .

Com a carga $Q=1$ movendo-se sobre a transversina, tem-se na seção α da transversina, os seguintes valores da força cortante (Figura 15):

- (I): $\xi_a = -q_{ca}$ $Q=1$ no cruzamento com a viga a
 (II): $\xi_b^e = -q_{cb}$ $Q=1$ à esquerda do cruzamento com a viga b
 (III): $\xi_b^d = 1 - q_{cb}$ $Q=1$ à direita do cruzamento com a viga b
 (IV): $\xi_c = 1 - q_{cc}$ $Q=1$ no cruzamento com a viga c

ξ_a , ξ_b^e , ξ_b^d e ξ_c são as ordenadas da linha de influência da força cortante na seção α .

No resto valem as mesmas considerações e simplificações do caso do momento fletor.

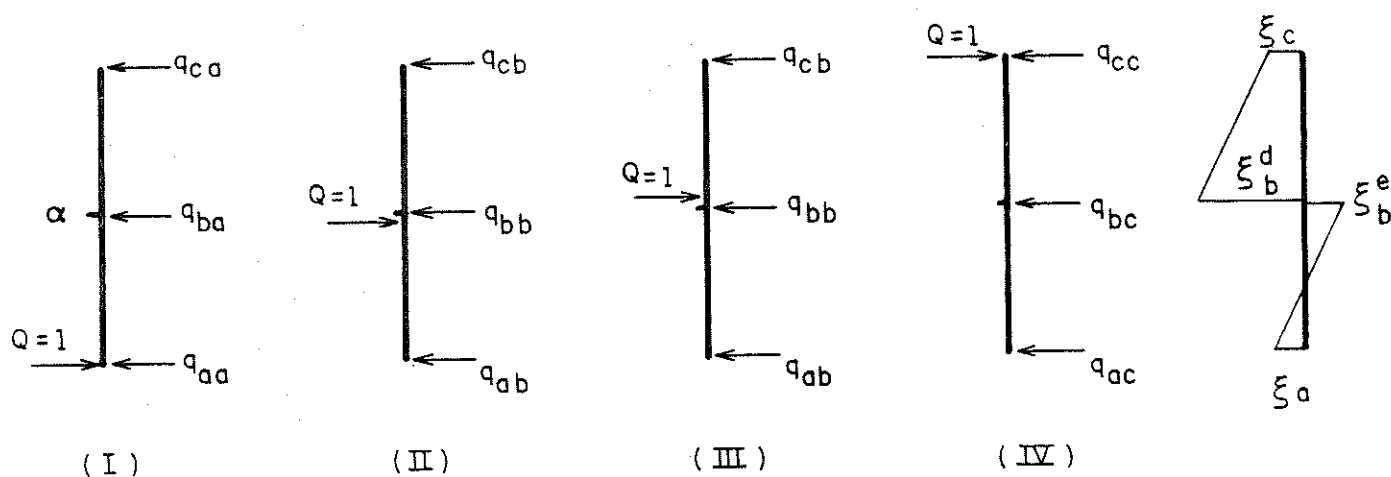


FIGURA 15

3- PROCESSO DE GUYON-MASSONNET

3.1- Preliminares

No processo de Guyon-Massonnet para o cálculo de tabuleiro de pontes, são consideradas as seguintes hipóteses simplificadoras.

- o tabuleiro é transformado numa placa ortótropa que apresenta as mesmas rigidezes médias de flexão e torção;
- o carregamento real é substituído por um carregamento equivalente que tem a forma senoidal na direção longitudinal;
- a placa ortótropa é calculada utilizando o método dos coeficientes de repartição transversal.

A justificativa da primeira hipótese é consequência da semelhança de comportamento da placa ortótropa e da grelha, como se mostra a seguir através das respectivas equações diferenciais.

PLACA ORTÓTropa:

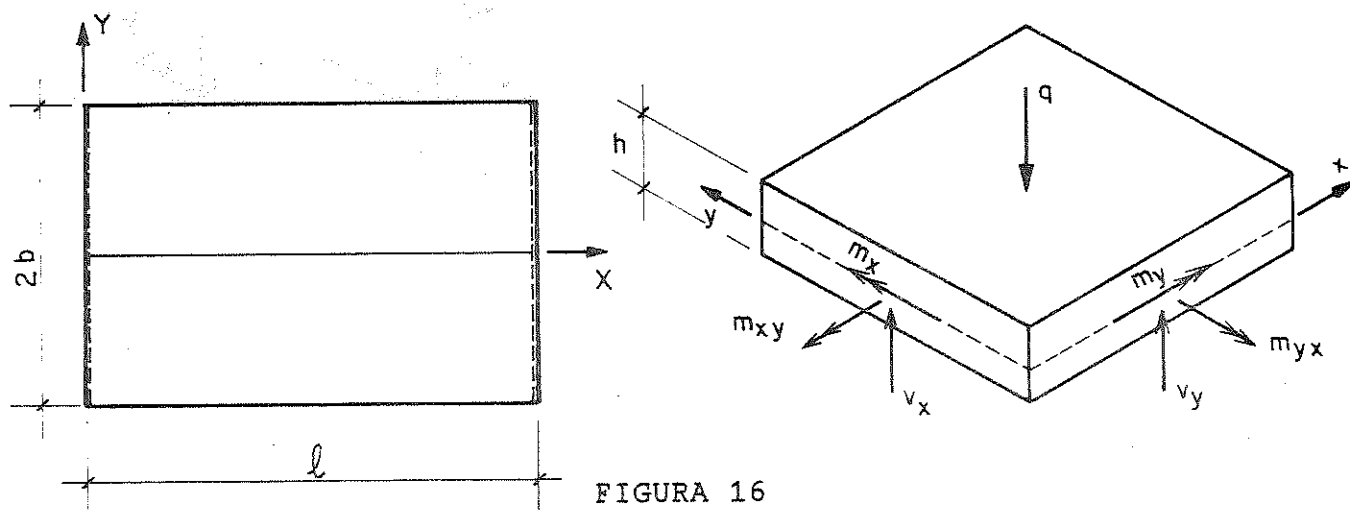


FIGURA 16

$$\rho_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y)$$

w = deslocamento transversal

$$\rho_x = \frac{E'_x \cdot h^3}{12}$$

$$\rho_y = \frac{E'_y \cdot h^3}{12}$$

$$H = \rho_{xy} + 2 \cdot \gamma$$

$$\rho_{xy} = \frac{E'' \cdot h^3}{12}$$

$$\gamma = \frac{G \cdot h^3}{12}$$

$$E'_x = \frac{E_x}{1 - \eta_x}$$

$$E'_y = \frac{E_y}{1 - \eta_x \eta_y}$$

$$E'' = \frac{E_x \cdot \eta_y}{1 - \eta_x \eta_y} = \frac{E_y \cdot \eta_x}{1 - \eta_x \eta_y}$$

E_x e E_y = módulos de elasticidade nas direções x e y

η_x e η_y = coeficientes de Poisson nas direções x e y

G = módulo de cisalhamento

h = espessura da placa

GRELHA:

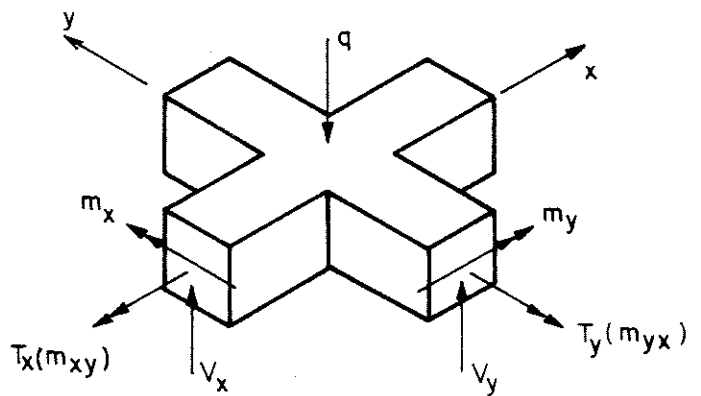
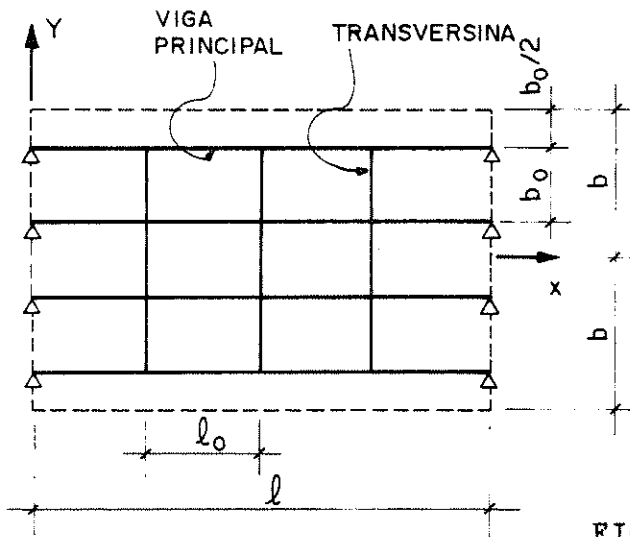


FIGURA 17

$$\rho_P \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (\gamma_P + \gamma_E) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho_E \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y)$$

$$\rho_P = \frac{E \cdot I_P}{b_0} \quad \rho_E = \frac{E \cdot I_E}{\ell_0}$$

$$\gamma_P = \frac{G \cdot I_{tP}}{b_0} \quad \gamma_E = \frac{G \cdot I_{tE}}{\ell_0}$$

I_P = momento de inércia à flexão das vigas principais

I_{tP} = momento de inércia à torção das vigas principais

I_E = momento de inércia à flexão das transversinas

I_{tE} = momento de inércia à torção das transversinas

b_0 = espaçamento das vigas principais

ℓ_0 = espaçamento das transversinas

As equações diferenciais da placa ortótropa e da grelha são formalmente idênticas, significando que, as placas ortótropas podem ser calculadas como grelhas e vice-versa.

O tabuleiro de ponte de vigas, constituído pelas vigas longitudinais, transversinas e laje, é uma estrutura cujo comportamento é intermediário entre a placa ortótropa e a grelha.

Para definir o comportamento do tabuleiro de uma ponte de vigas, Guyon criou dois parâmetros adimensionais:

α : parâmetro de torção

θ : parâmetro de travamento

O parâmetro de torção é calculado pela expressão:

$$\alpha = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2 \cdot \sqrt{\rho_P \cdot \rho_E}} \quad \text{com} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$\alpha = 0$ significa grelha sem torção

$\alpha = 1$ significa placa ortótropa

O parâmetro de travamento é calculado pela expressão:

$$\theta = \frac{b}{\ell} \sqrt[4]{\frac{\rho_P}{\rho_E}}$$

quanto maior é o valor de θ , mais fraco é o travamento.

3.2- Carregamento senoidal equivalente ao carregamento real

O carregamento senoidal equivalente ao carregamento real é obtido com o auxílio da série de Fourier, sendo portanto da forma:

$$q_x = q_m \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{\ell}$$

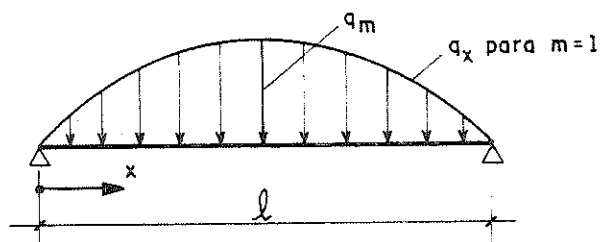


FIGURA 18

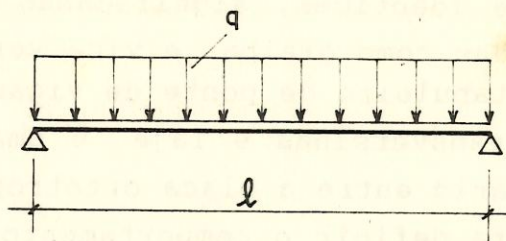
onde:

q_m depende do tipo do carregamento real (Figura 19)

m é o número do termo da série (1, 2, 3, ...)

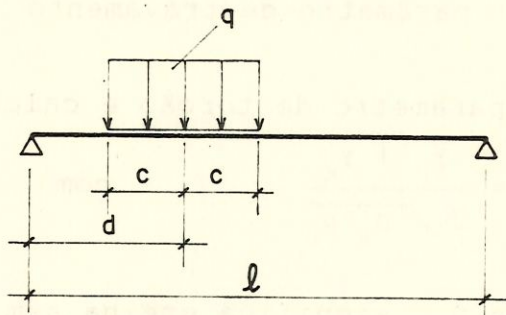
Carga uniforme ao longo de todo o vão:

$$q_m = \frac{4 \cdot q}{m \cdot \pi} \operatorname{sen}^2 \frac{m \cdot \pi}{2}$$



Carga uniforme em trecho do vão:

$$q_m = \frac{4 \cdot q}{m \cdot \pi} \operatorname{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot c}{\ell} \operatorname{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot d}{\ell}$$



Cargas concentradas:

$$q_m = \frac{2}{\ell} \cdot \sum Q_i \cdot \operatorname{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot d_i}{\ell}$$

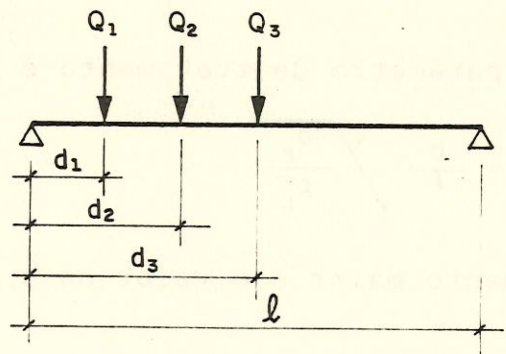


FIGURA 19

3.3- Coeficiente de repartição transversal

$$K = \frac{w(x, y)}{w_0(x, y)}$$

$w(x, y)$ = deslocamento da placa

$w_0(x, y)$ = deslocamento da placa calculada como viga de largura $2b$

O coeficiente K é função de:

- α
- θ
- e : posição da carga em relação ao eixo longitudinal da placa
- y : ponto considerado

Massonnet e Bares tabelaram os valores de K para:

$\alpha = 0$ são os valores K_0

$\alpha = 1$ são os valores K_1

em função de θ , e/b , y/b

O valor de K_α pode ser calculado a partir de K_0 e K_1 utilizando a expressão:

$$K_\alpha = K_0 + (K_1 - K_0) \cdot \sqrt{\alpha}$$

3.4- Momentos fletores nas vigas

$$m_x = m_0 \cdot q_m \cdot K_\alpha$$

m_0 = momento fletor da placa calculada como viga de largura (2b) com carga unitária

3.5- Momentos fletores nas transversinas

$$m_y = \mu_\alpha \cdot q_m \cdot b \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{\ell}$$

$$\mu_\alpha = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0) \cdot \sqrt{\alpha}$$

μ_0 e μ_1 são tabelados em função de θ , e/b , y/b

3.6- Momentos de torção

Para o cálculo dos momentos de torção é necessário fazer distinção entre placa e grelha, pois:

na placa : $m_{xy} = -m_{yx}$

na grelha : $m_{xy} = T_x \neq m_{yx} = T_y$

Cálculo como placa:

$$m_{xy} = -m_{yx} = \tau_\alpha \cdot \frac{q_m \cdot \ell}{m \cdot \pi} \cdot \cos \frac{m \cdot \pi \cdot x}{\ell}$$

Cálculo como grelha:

$$(m_{xy} - m_{yx}) = \tau_\alpha \cdot \frac{2 \cdot q_m \cdot \ell}{m \cdot \pi} \cdot \cos \frac{m \cdot \pi \cdot x}{\ell}$$

$$T_x = m_{xy} = \frac{\gamma_P}{\gamma_P + \gamma_E} (m_{xy} - m_{yx})$$

$$T_y = m_{yx} = \frac{-\gamma_E}{\gamma_P + \gamma_E} (m_{xy} - m_{yx})$$

$$\tau_\alpha = \tau_1 \cdot \sqrt{\alpha}$$

τ_1 é tabelado em função de θ , e/b , y/b

3.7- Forças cortantes nas vigas

Por causa da influência da torção, é necessário fazer a distinção entre cálculo como placa e cálculo como grelha.

Cálculo como placa:

$$v_x = \epsilon_\alpha \cdot \frac{q_m \cdot \ell}{b} \cdot \cos \frac{m \cdot \pi \cdot x}{\ell}$$

$$\epsilon_\alpha = \epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \cdot \alpha \quad \text{para } |y| + |e| \leq 3b/4$$

$$\epsilon_\alpha = \epsilon_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \cdot \sqrt{\alpha} \quad \text{para } |y| + |e| > 3b/4$$

ϵ_0 e ϵ_1 são tabelados em função de θ , e/b , y/b

Cálculo como grelha:

$$v_x = q_m \cdot \left(K_\alpha \cdot \frac{\ell}{2 \cdot m \cdot \pi \cdot b} + \mu_\alpha \cdot \frac{m \cdot \pi \cdot b \cdot \gamma_E}{\ell \cdot \rho_E} \right) \cdot \cos \frac{m \cdot \pi \cdot x}{\ell}$$

$$K_\alpha = K_0 + (K_1 - K_0) \cdot \sqrt{\alpha}$$

$$\mu_\alpha = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0) \cdot \sqrt{\alpha}$$

K_0 , K_1 , μ_0 e μ_1 são tabelados em função de θ , e/b , y/b

Nos casos usuais, a força cortante na grelha pode ser calculada de maneira simplificada, desprezando-se o efeito da torção:

$$v_x = v_0 \cdot q_m \cdot K_\alpha$$

v_0 = força cortante da placa calculada como viga de largura (2b) com carga unitária

3.8- Forças cortantes nas transversinas

Por causa da influência da torção, é necessário fazer a distinção entre cálculo como placa e cálculo como grelha.

Cálculo como placa:

$$v_y = \nu_\alpha \cdot q_m \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{\ell}$$

$$\nu_\alpha = \nu_0 + (\nu_1 - \nu_0) \cdot \sqrt{\alpha}$$

ν_0 e ν_1 são tabelados em função de θ , e/b , y/b

Cálculo como grelha:

$$v_y = q_m \cdot \left(x_\alpha + \tau_\alpha \cdot \frac{2 \cdot \gamma_p}{\gamma_p + \gamma_E} \right) \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{\ell}$$

$$x_\alpha = x_0 + (x_1 - x_0) \cdot \sqrt{\alpha}$$

$$\tau_\alpha = \tau_1 \cdot \sqrt{\alpha}$$

$x_0 = \nu_0$, x_1 e τ_1 são tabelados em função de θ , e/b , y/b

3.9- Recomendações práticas

3.9.1- Definição da placa ortótropa equivalente

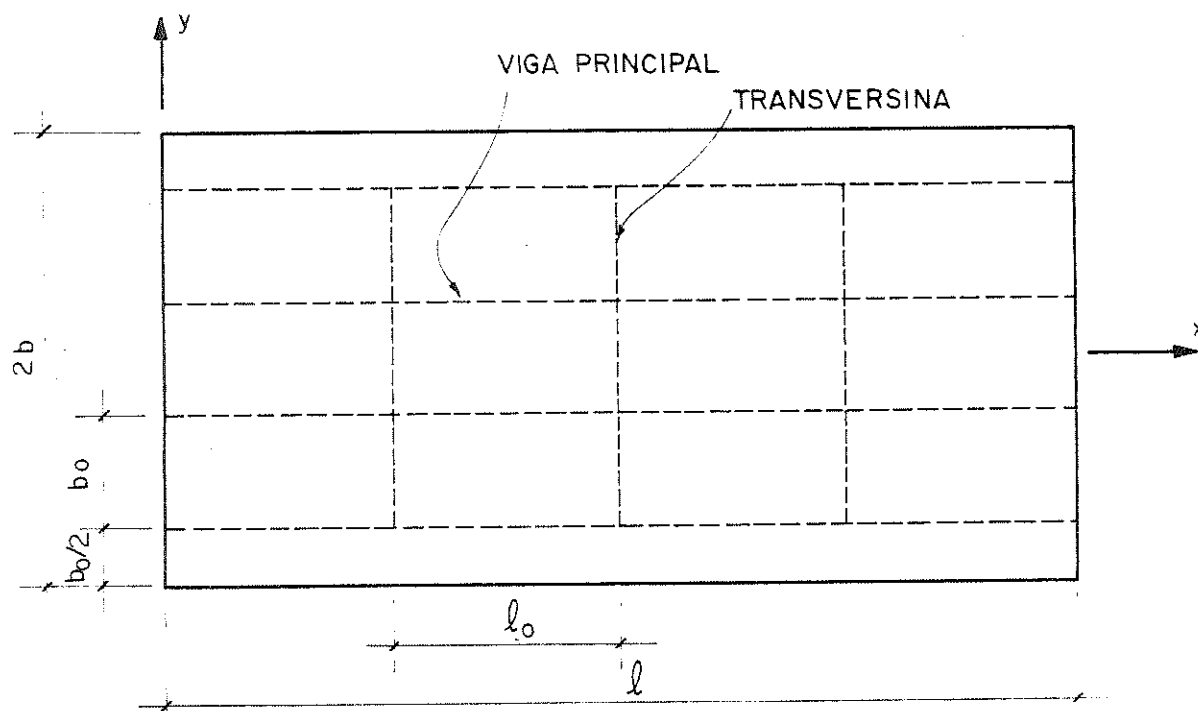


FIGURA 20

a) Espaçamento entre vigas b_0

Se o espaçamento entre vigas não for uniforme, pode-se adotar o valor médio.

b) Espaçamento entre transversinas ℓ_0

Se o espaçamento entre transversinas não for uniforme, pode-se adotar o valor médio.

c) Largura total da placa ortótropa (2b)

$$(2b) = b_0 \times \text{número de vigas}$$

d) Vão longitudinal ℓ

3.9.2- Cálculo da rigidez à flexão

a) Vigas : $\rho_P = E \cdot I_P / b_0$

b) Transversinas: $\rho_E = E \cdot I_E / \ell_0$

c) Módulo de elasticidade

Módulo de elasticidade do concreto, de acordo com a NBR-6118:

$$E = E_c = 6.600 \cdot \sqrt{f_{cj}} = 6.600 \cdot \sqrt{f_{ck} + 3,5 \text{ MPa}}$$

d) Momento de inércia à flexão das vigas I_P

Pode ser calculado utilizando as expressões usuais da Resistência dos Materiais.

Deve ser calculado considerando como largura da mesa da seção T, a largura da laje disponível, e não a largura colaborante.

Se resultarem valores diferentes para cada viga, pode ser adotado o valor médio.

e) Momento de inércia à flexão das transversinas I_E

Vale o que foi indicado para o caso das vigas.

3.9.3- Cálculo da rigidez à torção

a) Vigas : $\gamma_P = G \cdot I_{tP} / b_0$

b) Transversinas: $\gamma_E = G \cdot I_{tE} / \ell_0$

c) Módulo de cisalhamento

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad \nu = \text{coeficiente de Poisson}$$

Grelha simples sem laje : $\nu = 0$

Grelha com laje superior : $\nu = 0,10$

Grelha com laje superior e inferior (seção celular): $\nu = 0,15$

Laje maciça : $\nu = 0,15$

d) Momento de inércia à torção das vigas I_{tp}

Pode ser calculado utilizando a expressão sugerida por Massonnet e Bares.

$$I_{tp} = \frac{1}{3} \left[(h - h_{f1} - h_{f2}) \cdot b_w^3 + 0,5 \cdot (b_{f1} \cdot h_{f1}^3 + b_{f2} \cdot h_{f2}^3) \right]$$

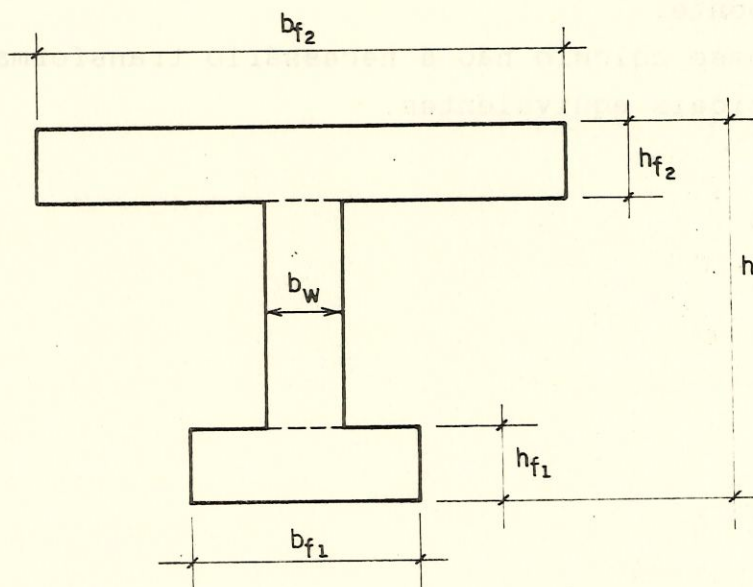


FIGURA 21

Deve ser calculado considerando como largura da mesa da seção T, a largura da laje disponível, e não a largura colaborante.

Se resultarem valores diferentes para cada viga, pode ser adotado o valor médio.

e) Momento de inércia à torção das transversinas I_{tE}

Vale o que foi indicado para o caso das vigas.

3.9.4- Cálculo dos momentos fletores e das forças cortantes nas vigas

Para o cálculo dos momentos fletores e das forças cortantes nas vigas, ao invés de utilizar as expressões indicadas nos itens 3.4 e 3.7, pode-se empregar um procedimento semelhante ao do processo de Engesser-Courbon:

- determinar o trem-tipo da viga;
- carregar com o trem-tipo, a linha de influência do momento fletor da viga;
- carregar com o trem-tipo, a linha de influência da força cortante da viga.

Neste caso, o trem-tipo da viga deve ser determinado, multiplicando-se a carga móvel pelo coeficiente K_α da viga em estudo, e dividindo-se o resultado pelo número de vigas que compõem a seção transversal da ponte.

Para esse cálculo não é necessário transformar as cargas reais em cargas senoidais equivalentes.

3.10- Expressões dos coeficientes

As expressões dos coeficientes K_α , μ_α , τ_α , ε_α , χ_α e ν_α , deduzidas por Massonnet e Bares, são transcritas a seguir.

$$K_{\alpha m} = \frac{2 \cdot m^4 \cdot \pi^4 \cdot b \cdot \rho_P}{\ell^4} \left[\left(A_m \cdot M_{\phi m} + \frac{B_m \cdot N_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \right) + \left(C_m \cdot O_{\phi m} + \frac{D_m \cdot P_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \right) + \right. \\ \left. + \bar{C}_m \cdot \left(O_{|\phi-\psi|_m} + P_{|\phi-\psi|_m} \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \right) \right]$$

$$\mu_{\alpha m} = \frac{-m^2 \cdot \pi^2 \cdot \theta^2 \cdot \rho_E}{b^3} \left[\alpha \cdot \left(A_m \cdot M_{\phi m} + \frac{B_m \cdot N_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} + C_m \cdot O_{\phi m} + \frac{D_m \cdot P_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \right) + \right. \\ \left. + \sqrt{1-\alpha^2} \cdot \left(-A_m \cdot N_{\phi m} + \frac{B_m \cdot M_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} + C_m \cdot P_{\phi m} - \frac{D_m \cdot O_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \right) + \right. \\ \left. + \bar{C}_m \cdot \left(-O_{|\phi-\psi|_m} + P_{|\phi-\psi|_m} \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \right) \right]$$

$$\tau_{\alpha m} = \frac{m^3 \cdot \pi^3 \cdot \alpha \cdot \theta \cdot \sqrt{\rho_P \cdot \rho_E}}{b \cdot \ell^2} \left[\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \left(A_m \cdot M_{\phi m} + \frac{B_m \cdot N_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} - C_m \cdot O_{\phi m} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{D_m \cdot P_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \right) + \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \left(-A_m \cdot N_{\phi m} + \frac{B_m \cdot M_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} - C_m \cdot P_{\phi m} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{D_m \cdot O_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \right) + \bar{C}_m \cdot \frac{P_{|\phi-\psi|_m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \right]$$

$$\varepsilon_{\alpha m} = \frac{m^3 \cdot \pi^3 \cdot b \cdot \rho_P}{\ell^4} \left[(1-\alpha^2) \cdot \left(A_m \cdot M_{\phi m} + \frac{B_m \cdot N_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} + C_m \cdot O_{\phi m} + \frac{D_m \cdot P_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \right) + \right. \\ \left. + \alpha \cdot \sqrt{1-\alpha^2} \cdot \left(A_m \cdot N_{\phi m} - \frac{B_m \cdot M_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} - C_m \cdot P_{\phi m} + \frac{D_m \cdot O_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \right) + \right.$$

$$+ \bar{C}_m \cdot (1 + \alpha) \cdot \left[O_{|\phi-\psi|_m} + P_{|\phi-\psi|_m} \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \right]$$

$$\begin{aligned} x_{\alpha m} = \frac{-m^3 \cdot \pi^3 \cdot \theta^3 \cdot \rho_E}{b^3} & \left[(2\alpha - 1) \cdot \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \left(A_m \cdot M_{\phi m} + \frac{B_m \cdot N_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} - C_m \cdot O_{\phi m} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{D_m \cdot P_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \right) + (2\alpha + 1) \cdot \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \left(-A_m \cdot N_{\phi m} + \frac{B_m \cdot M_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} - C_m \cdot P_{\phi m} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{D_m \cdot O_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \right) \right] \pm \frac{\bar{C}_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \cdot \left(\sqrt{1-\alpha^2} \cdot O_{|\phi-\psi|_m} - \alpha \cdot P_{|\phi-\psi|_m} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_{\alpha m} = \frac{m^3 \cdot \pi^3 \cdot \theta^3 \cdot \rho_E}{b^3} & \left[(1 - \alpha) \cdot \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \left(A_m \cdot M_{\phi m} + \frac{B_m \cdot N_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} - C_m \cdot O_{\phi m} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{D_m \cdot P_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \right) - (1 + \alpha) \cdot \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \left(-A_m \cdot N_{\phi m} + \frac{B_m \cdot M_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} - C_m \cdot P_{\phi m} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{D_m \cdot O_{\phi m}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \right) \right] \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \bar{C}_m \cdot O_{|\phi-\psi|_m} \end{aligned}$$

O sinal que precede o termo $\bar{C}_m$ nas expressões de $\nu_{\alpha m}$, $x_{\alpha m}$ e $\nu_{\alpha m}$ deve ser escolhido entre $\pm$ segundo a seguinte regra:

- + para $\psi \geq \phi$
- para $\psi < \phi$

$$A_m = \frac{1}{2} \left[\frac{(G + H) \cdot k_2 - (E + F) \cdot k_6}{k_1 \cdot k_6 + k_2 \cdot k_5} + \frac{(G - H) \cdot k_4 - (E - F) \cdot k_8}{k_3 \cdot k_8 + k_4 \cdot k_7} \right]$$

$$B_m = \frac{1}{2} \left[- \frac{(G + H) \cdot k_1 + (E + F) \cdot k_5}{k_1 \cdot k_6 + k_2 \cdot k_5} - \frac{(G - H) \cdot k_3 + (E - F) \cdot k_7}{k_3 \cdot k_8 + k_4 \cdot k_7} \right]$$

$$C_m = \frac{1}{2} \left[\frac{(G + H) \cdot k_2 - (E + F) \cdot k_6}{k_1 \cdot k_6 + k_2 \cdot k_5} - \frac{(G - H) \cdot k_4 - (E - F) \cdot k_8}{k_3 \cdot k_8 + k_4 \cdot k_7} \right]$$

$$D_m = \frac{1}{2} \left[\frac{(G + H) \cdot k_1 + (E + F) \cdot k_5}{k_1 \cdot k_6 + k_2 \cdot k_5} - \frac{(G - H) \cdot k_3 + (E - F) \cdot k_7}{k_3 \cdot k_8 + k_4 \cdot k_7} \right]$$

$$\bar{C}_m = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{\frac{1 + \alpha}{2}} \cdot m^3 \cdot \omega^3 \cdot \rho_E}$$

$$M_{\phi m} = e^{m \cdot n' \cdot \phi} \cdot \cos m \cdot t' \cdot \phi$$

$$N_{\phi m} = e^{m \cdot n' \cdot \phi} \cdot \sin m \cdot t' \cdot \phi$$

$$O_{\phi m} = e^{-m \cdot n' \cdot \phi} \cdot \cos m \cdot t' \cdot \phi$$

$$P_{\phi m} = e^{-m \cdot n' \cdot \phi} \cdot \sin m \cdot t' \cdot \phi$$

$$O_{|\phi-\psi|_m} = e^{-m \cdot n' \cdot |\phi-\psi|} \cdot \cos m \cdot t' \cdot |\phi-\psi|$$

$$P_{|\phi-\psi|_m} = e^{-m \cdot n' \cdot |\phi-\psi|} \cdot \sin m \cdot t' \cdot |\phi-\psi|$$

$$E = \frac{\bar{C}_m \cdot e^{-m \cdot n' \cdot (\pi-\psi)}}{\sqrt{1-\alpha}} \left[\sqrt{1+\alpha} \cdot \sin m \cdot t' \cdot (\pi-\psi) - \sqrt{1-\alpha} \cdot \cos m \cdot t' \cdot (\pi-\psi) \right]$$

$$F = \frac{\bar{C}_m \cdot e^{-m \cdot n' \cdot (\pi+\psi)}}{\sqrt{1-\alpha}} \left[\sqrt{1+\alpha} \cdot \sin m \cdot t' \cdot (\pi+\psi) - \sqrt{1-\alpha} \cdot \cos m \cdot t' \cdot (\pi+\psi) \right]$$

$$G = \frac{\bar{C}_m \cdot e^{-m \cdot n' \cdot (\pi-\psi)}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \left[\alpha \cdot \sin m \cdot t' \cdot (\pi-\psi) + \sqrt{1-\alpha^2} \cdot \cos m \cdot t' \cdot (\pi-\psi) \right]$$

$$H = \frac{\bar{C}_m \cdot e^{-m \cdot n' \cdot (\pi+\psi)}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \left[\alpha \cdot \sin m \cdot t' \cdot (\pi+\psi) + \sqrt{1-\alpha^2} \cdot \cos m \cdot t' \cdot (\pi+\psi) \right]$$

$$k_1 = \alpha \cdot K - \sqrt{1-\alpha^2} \cdot J$$

$$k_2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot K + \frac{\alpha \cdot J}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}}$$

$$k_3 = \alpha \cdot L - \sqrt{1 - \alpha^2} \cdot I$$

$$k_4 = 2 \cdot \sqrt{\frac{1 + \alpha}{2}} \cdot L + \frac{\alpha \cdot I}{\sqrt{\frac{1 - \alpha}{2}}}$$

$$k_5 = \sqrt{\frac{1 + \alpha}{2}} \cdot L + \sqrt{\frac{1 - \alpha}{2}} \cdot I$$

$$k_6 = L - \sqrt{\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}} \cdot I$$

$$k_7 = \sqrt{\frac{1 + \alpha}{2}} \cdot K + \sqrt{\frac{1 - \alpha}{2}} \cdot J$$

$$k_8 = K - \sqrt{\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}} \cdot J$$

$$I = \left(e^{m \cdot n' \cdot \pi} + e^{-m \cdot n' \cdot \pi} \right) \cdot \sin m \cdot t' \cdot \pi$$

$$J = \left(e^{m \cdot n' \cdot \pi} - e^{-m \cdot n' \cdot \pi} \right) \cdot \sin m \cdot t' \cdot \pi$$

$$K = \left(e^{m \cdot n' \cdot \pi} + e^{-m \cdot n' \cdot \pi} \right) \cdot \cos m \cdot t' \cdot \pi$$

$$L = \left(e^{m \cdot n' \cdot \pi} - e^{-m \cdot n' \cdot \pi} \right) \cdot \cos m \cdot t' \cdot \pi$$

$$\alpha = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2 \cdot \sqrt{\rho_P \cdot \rho_E}}$$

$$\theta = \frac{b}{\ell} \sqrt[4]{\frac{\rho_P}{\rho_E}}$$

$$n' = \theta \cdot \sqrt{\frac{1 + \alpha}{2}}$$

$$t' = \theta \cdot \sqrt{\frac{1 - \alpha}{2}}$$

$$\phi = \frac{\pi \cdot Y}{b}$$

$$\psi = \frac{\pi \cdot e}{b}$$

$$\omega = \frac{\pi \cdot \theta}{b}$$

BIBLIOGRAFIA

BARES, R., MASSONNET, C. Le calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes. Paris, Dunod Editeur, 1966.

MARTINELLI, D.A.O. Introdução às pontes de vigas. São Carlos, EESC-USP, 1971.

MONTANARI, I. Cálculo de pontes de vigas - Notas de aula. São Carlos, EESC-USP, 1975.

SAN MARTIN, F.J. Cálculo de tabuleiros de pontes. São Paulo, Livraria Ciência e Tecnologia Editora, 1981.