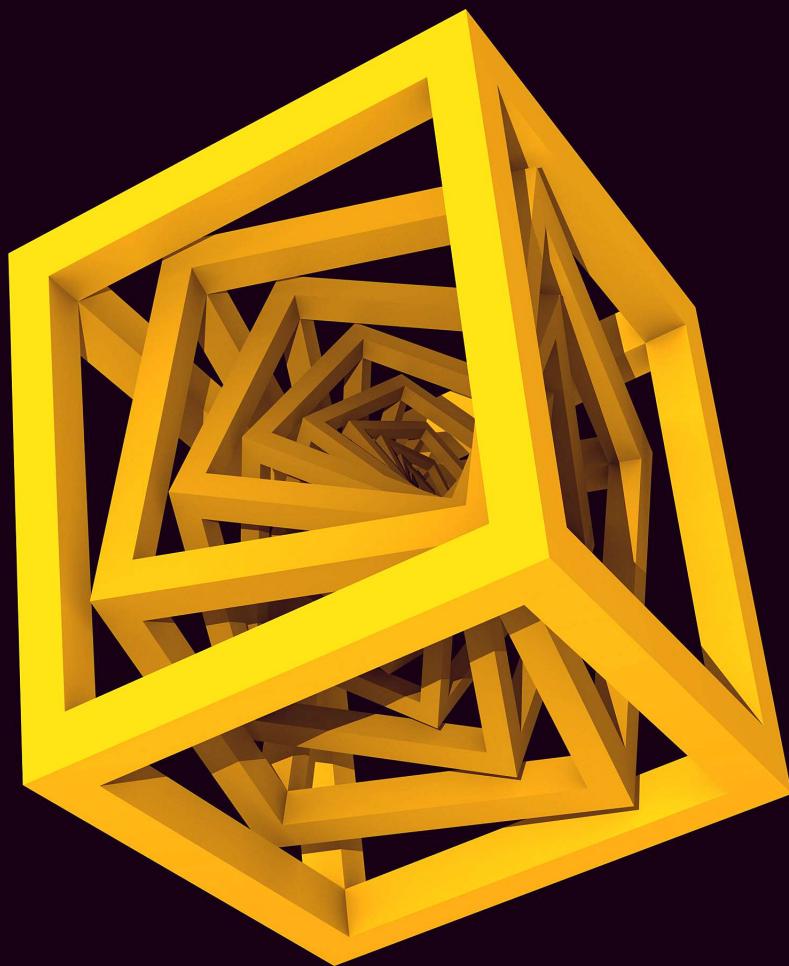


# ANAIS

## 5º ENCONTRO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA - 2018

Organizadores:

**DAVID PIRES DIAS**  
**RICARDO BIANCONI**



O Encontro promove as atividades e produções do  
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de  
Matemática

David Pires Dias  
Ricardo Bianconi  
**Organizadores**

## **ANAIS**

### **5º Encontro do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática**

*São Paulo, SP, Brasil, 18 e 20 de setembro de 2018*

São Paulo  
IME-USP  
2019

**Universidade de São Paulo**  
**Instituto de Matemática e Estatística**  
**Mestrado Profissional em Ensino de Matemática**

**Reitor**  
Prof. Dr Vahan Agopyan

**Vice-reitor**  
Prof. Dr. Antonio Carlos Hernandes

**Diretor do Instituto de Matemática e Estatística**  
Prof. Dr. Junior Barrera

**Organizadores**  
Prof. Dr. David Pires Dias  
Prof. Dr. Ricardo Bianconi

**Diagramação, normalização e capa**  
Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra

E56      Encontro do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (5. : 2018 : São Paulo, Brasil).  
Anais [do] 5º Encontro do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, São Paulo, SP, Brasil, 18 e 20 de setembro de 2018 [recurso eletrônico]. / organizadores David Pires Dias, Ricardo Bianconi. -- São Paulo : IME-USP, 2019.

ISBN: 978-85-88697-33-1 (e-book)  
Modo de acesso: <<https://www.ime.usp.br/posempmat/encontros>>

1. Matemática – Estudo e Ensino (Congressos). I. Dias, David Pires, org. II. Bianconi, Ricardo, org. III. Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo.

CDD: 510.7

Catalogação na Fonte pelo Serviço de Informação e Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra.  
Elaborada pela bibliotecária Maria Lucia Ribeiro – CRB 8/2766.

Qualquer parte desta publicação pode ser reproduzida, desde que citada a fonte.  
Proibido qualquer uso para fins comerciais.

# Ensino de variáveis estatísticas a partir de uma abordagem de currículo em espiral

**Diana Simões Ferreira <sup>1</sup>, Viviana Giampaoli <sup>2</sup>, Elisete da Conceição Quintaneiro Aubin <sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Mestranda do programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME-USP - diana.ferreira@usp.br

<sup>2</sup> Docente do Departamento de Estatística do IME-USP e orientadora - vivig@ime.usp.br

<sup>3</sup> Docente do Departamento de Estatística do IME-USP e co-orientadora - aubin@ime.usp.br

**RESUMO:** O presente trabalho tem como principal objetivo mostrar, por meio de uma atividade, como se pode abordar o ensino de estatística em currículo em espiral. Com o intuito de proporcionar maior embasamento ao leitor, foi destinada uma sessão para abordar as ideias de Bruner, que afirmam que qualquer assunto pode ser ensinado a uma criança levando-se em conta as etapas do desenvolvimento cognitivo do aluno. Apresentamos um exemplo que pode ser aplicado em sala de aula, o qual se inicia coletando, como informação uma característica do aluno, que trata-se de uma variável estatística e, gradativamente, e em diferentes níveis de profundidade, tenta-se fazer com que o aluno adquira a noção de variável aleatória.

**Palavras-chave:** Estatística. Currículo. Espiral. Variável aleatória. Ensino Fundamental.

**ABSTRACT:** The main objective of this study is to show by means of an activity, by which one can approach the teaching of statistics in a spiral curriculum. In order to provide a better foundation for the reader, a session was designed to address Bruner's ideas, which state that any subject can be to a child by taking into account the stages of the student's cognitive development. We present an example that can be applied in the classroom, which begins by collecting, as information, a characteristic of the student which is a statistical variable and gradually, and at different levels of depth, if the student acquires the notion of a random variable.

**Keywords:** Statistic. Curriculum. Spiral. Random variable. Elementary School.

## 1 INTRODUÇÃO

O ensino de estatística não pode se resumir ao tratamento usual, que consiste em demonstrar teoremas e realizar cálculos, ele vai além, por exemplo, com a descrição de experimentos, análise dos dados provenientes de pesquisas, realizando conexões com o processo geral que gerou as hipóteses ou questionamentos. Outro agravante é que, no geral, nos livros, a estatística e probabilidade são quase sempre apresentadas como

relacionadas a jogos de azar e não se baseiam em dados de situações cotidianas, em que os próprios alunos poderiam estudar segundo seus próprios interesses. Espera-se que o ensino de estatística se torne mais presente durante as aulas de matemática do ensino básico. Estando destacada sua finalidade em diversos documentos oficiais desde os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), nos quais a Estatística estava considerada apenas como fazendo parte do bloco de conteúdo chamado Tratamento da Informação tendo apenas uma finalidade de demanda social.

Nos Guias Nacionais do Livro Didático para os anos finais do fundamental, a Estatística e Probabilidade aparece como um campo da Matemática somente no ano 2011. No Guia mais recente de 2017 para estes anos pode-se ler o trecho a seguir.

No campo da **estatística** e da **probabilidade**, lidamos com questões cada vez mais relevantes sobre os dados da realidade natural ou social, que precisam ser coletados, selecionados, organizados, apresentados e interpretados criticamente. Fazer inferências com base em informações qualitativas ou dados numéricos e saber lidar com a ideia de incerteza também são competências importantes. O desenvolvimento dessas competências pode ser realizado desde cedo, a partir de atividades que envolvem a coleta e a organização de dados e recorrendo-se a diferentes tabelas e gráficos, de uso tão frequente no mundo atual. (BRASIL, 1998, p. 12) – Grifo nosso.

## 2 OBJETIVOS

A articulação dos conceitos do campo da estatística e probabilidade e destes com outras áreas pode representar uma barreira para o professor de matemática. Neste trabalho apresentamos um exemplo de atividade de acordo com o modelo de currículo em espiral proposto por Bruner (1973). O objetivo principal é mostrar que é possível desenvolver atividades que contemplam o currículo em espiral e que, a partir de ideias intuitivas, é possível chegarmos em pensamentos analíticos, sempre retomando os temas abordados anteriormente considerando diversas representações em diferentes graus de profundidade.

### **3 CONSIDERAÇÕES TEÓRICO-METODOLÓGICAS**

A aprendizagem em espiral comprehende no mesmo conteúdo sendo apresentado mais de uma vez, mas em diferentes níveis de aprofundamento segundo a etapa do desenvolvimento do aluno. Para elaborarmos a atividade apresentada adiante nos apoiamos em Bruner (1973) e em Heitele (1975), que se apoiou nas ideias de Bruner, para afirmar que a ideia central do ensino de probabilidade e estatística fosse a variável aleatória.

Segundo Bruner (1973) é possível ensinar qualquer assunto, de uma maneira intelectualmente honesta, a qualquer criança em qualquer estágio de desenvolvimento desde que seja levado em conta as diversas etapas do desenvolvimento intelectual do aluno. Ele ainda afirma que “um currículo, à medida que se desenvolve, deve voltar repetidas vezes a essas ideias básicas, elaborando e reelaborando-as, até que o aluno tenha captado inteiramente a sua completa formulação sistemática”. Cada conteúdo é abordado, a princípio, em sua essência, com suas características mais importantes para, finalmente, ser explorado em outros contextos, na maioria deles como ferramenta para resolver parte de uma situação-problema mais complexa, servindo como uma das bases que irão sustentar um novo conceito.

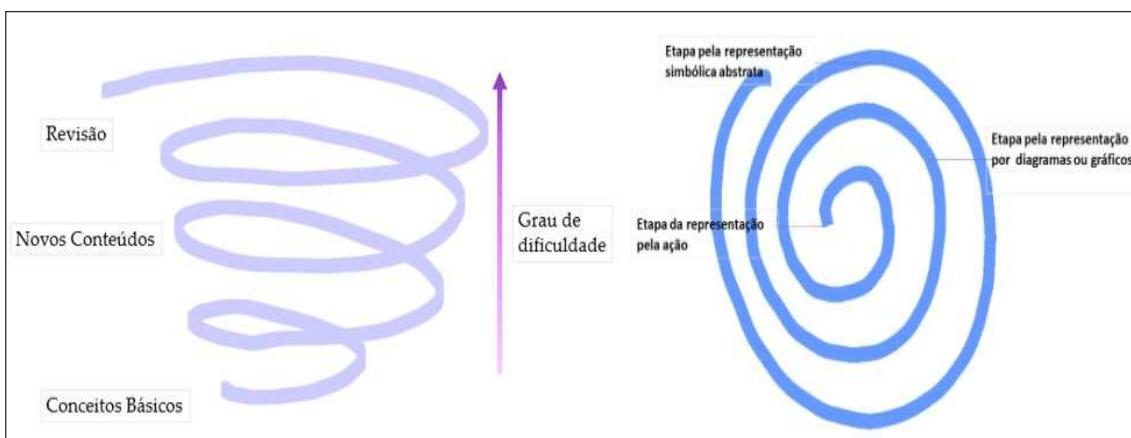
A cada retomada a determinado conteúdo, é importante que as atividades propostas pelo professor proporcionem situações que estimulem o aluno a refletir, conjecturar, inferir, estimar, demonstrar, provar, relacionar, analisar, e não apenas calcular e efetuar. A maior preocupação deve estar focada em como os conteúdos serão apresentados ao aluno e ao tipo de metodologia que o professor irá utilizar, pois por meio do pensamento intuitivo o aluno poderá chegar a soluções que não conseguiria usando apenas o pensamento analítico, no entanto, uma vez conseguido que o aluno chegue à solução pelo pensamento intuitivo, de maneira gradual e de acordo com as possibilidades, a solução deve ser verificada por métodos analíticos.

Através do pensamento intuitivo, o indivíduo poderá, muitas vezes, chegar a soluções para problemas que não conseguiria alcançar de modo algum ou, quando muito, só mais lentamente, através do pensamento analítico. Uma vez conseguidas por métodos intuitivos, essas soluções deverão, se possível, ser verificadas por métodos analíticos, sendo ao mesmo tempo respeitadas como hipóteses válidas para tal verificação. Realmente, o pensador intuitivo pode até mesmo

inventar ou descobrir problemas que o analista não descobriria. Poderá ser, contudo, o analista, quem irá dar aos problemas o formalismo conveniente. (BRUNER, 1973, p. 54).

Note que Bruner (1973) enfatiza a ideia de que os pensamentos intuitivo e analítico se completam. Ele não aponta nenhuma ordem como começar do intuitivo e chegar ao analítico, mas sim uma harmonia entre ambos. Bruner destaca ainda a importância da linguagem adequada no processo de ensino, no entanto, afirma que a linguagem não é apenas o meio de comunicação e sim um instrumento que possibilita organizar e ordenar o meio. A seguir, dois esquemas que resumem o modelo do Currículo em Espiral.

**Figura 1** – Esquema representando currículo em espiral



Fonte: elaborado pelas autoras (FERREIRA; GIAMPAOLI; AUBIN, 2018).

### **Exemplo de atividade: Mês de Aniversário**

Refletindo sobre o modelo de currículo em espiral e no que Heitele afirma, decidimos apresentar a noção de variável aleatória por meio de uma atividade para o Ensino Fundamental 2. Para o primeiro exemplo utilizaremos os dados da seguinte turma fictícia, apresentados na Tabela 1 por ordem alfabética com a data de seu nascimento.

**Tabela 1-** Lista de nomes e data de aniversário de 40 alunos de uma turma fictícia de 6º. ano

Primeiro Nome	Data de nascimento	Primeiro Nome	Data de nascimento
4. ALEXANDRE	02/04/2007	21. ISABELA	09/06/2007
5. ALEXSANDRO	18/02/2007	22. IZABELLI	08/05/2007
6. ALICE	11/12/2006	23. JOAO	11/12/2006
7. ANA	30/10/2005	24. KAMILLY	04/10/2006
5. ANA	10/06/2007	25. KAUAN	06/10/2006
6. ANTONIO	14/10/2006	26. KAUÉ	06/07/2006
7. ARTHUR	11/07/2006	27. KAYLLANE	12/11/2006
8. BEATRIZ	20/02/2007	28. LARISSA	13/04/2007
9. BEATRIZ	12/05/2007	29 LEONARDO	16/06/2007
10. BIANCA	12/05/2007	30. LUCAS	14/05/2007
11. CLARA	08/06/2007	31. LUCAS	24/06/2007
12. EDUARDO	17/11/2006	32. LUIZA	31/05/2006
13. EVELYN	22/02/2007	33. MARIA	10/07/2006
14. FRANCISCO	26/10/2006	34. MICAEL	28/11/2005
15. GABRIEL	20/07/2006	35. MIKAELLA	14/11/2006
16. GABRIEL	22/01/2007	36. NICOLAS	17/05/2007
17. GABRIELA	29/01/2007	37. RAISSA	30/03/2007
18. GABRIELLI	14/10/2006	38. REBECA	21/09/2006
19. GEOVANNA	13/10/2006	39. SAMARA	27/05/2006
20. IGOR	11/04/2007	40. THYAGO	29/05/2007

Fonte: elaborado pelas autoras (FERREIRA; GIAMPAOLI; AUBIN, 2018).

Para realizar esta atividade o professor deverá providenciar um calendário grande, de qualquer ano com 12 meses, para colar no mural e duas fichas para cada aluno com o desenho de um bolo (uma para colar no calendário e outra para construir um gráfico), que representará o dia e o mês da data de nascimento.

Neste caso, será necessário destacar que há alunos que nasceram no mesmo dia, Antonio e Gabrielli, e Beatriz e Bianca, então haverá bolos sobrepostos. O professor, inicialmente, pode pedir para que cada aluno diga o dia e o mês em que nasceu e que cole no calendário a ficha bolo em cima do dia e mês que nasceu. Observe que se trata de um calendário qualquer, o objetivo é apenas que o aluno possa, visualmente, identificar o mês com o maior número de nascimentos (considerando somente a turma

da sala de aula dele). A partir das informações da Tabela 1 a representação obtida no calendário será similar à Figura 2. Veja um exemplo:

**Figura 2:** Calendário com dias e meses de aniversários marcados

JANEIRO							FEVEREIRO							MARÇO							ABRIL									
SEG	TER	QUA	QUI	SEX	SAB	DOM	SEG	TER	QUA	QUI	SEX	SAB	DOM	SEG	TER	QUA	QUI	SEX	SAB	DOM	SEG	TER	QUA	QUI	SEX	SAB	DOM			
1	2	3	4	5	6				1	2	3			1	2	3				1	2	3				7				
7	8	9	10	11	12	13	4	5	6	7	8	9	10	4	5	6	7	8	9	10	8	9	10	11	12	13	14			
14	15	16	17	18	19	20	11	12	13	14	15	16	17	11	12	13	14	15	16	17	15	16	17	18	19	20	21			
21	22	23	24	25	26	27	19	20	21	22	23	24	25	18	19	20	21	22	23	24	22	23	24	25	26	27	28			
28		30	31				25	26	27	28	29	30	31		25	26	27	28	29	30	29	30								
MAIO							JUNHO							JULHO							AGOSTO									
1	2	3	4	5			1	2						1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4						
6	7	8	9	10	11	12	3	4	5	6	7	8	9	8	9	10	11	12	13	14	5	6	7	8	9	10	11			
13	14	15	16	17	18	19	11	12	13	14	15	16	17	15	16	17	18	19	20	21	12	13	14	15	16	17	18			
20	21	22	23	24	25	26	17	18	19	20	21	22	23	22	23	24	25	26	27	28	19	20	21	22	23	24	25			
28	29	30					25	26	27	28	29	30	31		29	30	31				26	27	28	29	30	31				
SETEMBRO							OUTUBRO							NOVEMBRO							DEZEMBRO									
1							1	2	3	4	5	6	7	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8		
2	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14	11	12	13	14	15	16	17	9	10	11	12	13	14	15			
9	10	11	12	13	14	15	14	15	16	17	18	19	20	18	19	20	21	22	23	24	16	17	18	19	20	21	22			
16	17	18	19	20	21	22	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31				23	24	25	26	27	28	29	30	31	
23	24	25	26	27	28	29																								

Inicialmente, vamos considerar esta atividade para uma turma de 6º ano, mas o professor terá a liberdade de usá-la em anos anteriores ou posteriores segundo as características da turma e os conteúdos de estatística proposto no currículo adotado.

Este é um estudo descritivo, pois todos alunos da turma estão sendo questionados em relação à sua data de nascimento, mas está se considerando apenas o mês de aniversário, assim, esta característica é a variável de interesse, que será chamada de variável estatística, e trata-se de uma variável de tipo qualitativo. Resulta interessante fazer questionamentos como: qual mês apresentou mais nascimentos para esta sala? Qual mês apresentou menos nascimentos? Qual foi a desvantagem da representação anterior com o calendário?

A contagem pode não ter sido tão simples e houve bolos sobrepostos. Na etapa a seguir, o professor pode propor que os alunos construam um gráfico de pontos, como o apresentado na Figura 3, com as fichas que receberam. Posteriormente, registrar as informações numa tabela. Isto permitirá ao aluno a leitura do gráfico e construção da Tabela 2, que é chamada de tabela de frequência absoluta. A seguir um modelo de como ficaria o gráfico e a tabela para nosso exemplo.

**Figura 3 – Gráfico de Pontos**



Fonte: elaborado pelas autoras (FERREIRA; GIAMPAOLI; AUBIN, 2018).

**Tabela 2 – Tabela representando a quantidade de alunos que nasceram em cada mês na sala X**

Mês de nascimento	Jan	Fev	Mar	Abr	Maio	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Número de alunos	2	3	1	3	8	5	4	0	1	7	4	2

Fonte: elaborado pelas autoras (FERREIRA; GIAMPAOLI; AUBIN, 2018).

A seguir o professor pode perguntar se um aluno da turma é sorteado, em que mês acham que ele possa fazer aniversário?

Sabemos que o conceito de variável aleatória está diretamente relacionado ao de probabilidade, o professor poderá fazer algumas perguntas, como por exemplo: quantos alunos estão presentes na sala? Desses alunos, quantos nasceram no mês de janeiro? E no mês de março?

O professor poderá perguntar: se se sorteia uma criança no Brasil, em que mês ele poderá fazer aniversário? É preciso realizar o sorteio para saber todas as possibilidades? Com este último questionamento estará trabalhando a noção de espaço amostral, sem chegar a formalizar o mesmo, nem se quer fazer um registro, apenas as respostas serão de maneira oral.

O próximo passo ou avanço será que o aluno possa quantificar a incerteza que pode surgir diante de uma pergunta tal como: um aluno desta sala tem mais probabilidade de nascer em junho ou novembro? Da simples observação da tabela de frequências ele possivelmente responderá junho. Nesse caso a ideia de

equiprobabilidade, isto é, a probabilidade é a mesma para qualquer mês, estará presente de maneira implícita.

Este pode ser o momento em que seja apresentada a noção de variabilidade, incerteza e amostra, com questionamentos tais como: será que os resultados serão os mesmos se considerarmos os alunos de outra escola? De outro período? Propor a seguinte questão: se sortearmos um aluno ao acaso da turma da série seguinte, é mais provável que ele faça aniversário em qual mês? Pedir que o aluno tente elaborar uma justificativa para a resposta que ele der.

Agora pode-se propor que se faça o seguinte experimento, que chamaremos de aleatório: sortear 5 alunos da turma e repetir o experimento 3 vezes. Os resultados obtidos em cada repetição do experimento aleatório foram os mostrados nas Tabelas 3, 4 e 5.

<b>Tabela 3 - Repetição 1</b>		<b>Tabela 4 - Repetição 2</b>		<b>Tabela 5 - Repetição 3</b>	
MICHAEL	28 de novembro	ALICE	11 de dezembro	SAMARA	27 de maio
LUIZA	31 de maio	BEATRIZ	20 de fevereiro	EDUARDO	17 de novembro
ANTONIO	14 de outubro	ISABELA	9 de junho	RAISSA	30 de março
FRANCISCO	26 de outubro	IGOR	11 de abril	NICOLAS	17 de maio
MIKAELLA	14 de novembro	LEONARDO	16 de junho	THYAGO	29 de maio

Fonte: elaborado pelas autoras (FERREIRA; GIAMPAOLI; AUBIN, 2018).

As tabelas de frequência para a variável mês de aniversário, para cada uma das repetições do experimento estão apresentadas a seguir na Tabela 6.

**Tabela 6** – Tabela representando a quantidade de alunos que nasceram em cada mês, nas 3 repetições do experimento aleatório

Mês de nascimento	Jan	Fev	Mar	Abr	Maio	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Repetição 1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	2	0
Repetição 2	0	1	0	1	0	2	0	0	0	0	0	1
Repetição 3	0	0	1	0	3	0	0	0	0	0	1	0
Total	0	1	1	1	4	2	0	0	0	2	3	1

Fonte: elaborado pelas autoras (FERREIRA; GIAMPAOLI; AUBIN, 2018).

O professor pode motivar a reflexão sobre a variação dos resultados segundo a repetição, perguntando o mês com um número maior de aniversários é o mesmo em todas repetições? Na turma, maio foi o mês com um maior número de aniversários (8), por que isto não ocorreu nas repetições 1 e 2?

Assim, o professor poderá, com esta atividade, apresentar a noção de censo, quando se considera todos os alunos da turma, e de amostra, ao realizar o experimento de maneira repetida. Poderá trabalhar a ideia de variabilidade, como também associar as diferentes frequências com que uma variável de interesse, no caso mês de aniversário, se apresenta quando se considera um experimento aleatório.

De acordo com a BNCC, espera-se que os alunos de 6º ano já trabalhem com frações e consigam representar a fração em número decimal. Poderá então ser considerado como próximo passo, apresentar as noções iniciais de probabilidade frequentista e clássica.

Consideremos primeiro a definição clássica de probabilidade, em que se tem mesma probabilidade para cada resultado (equiprobabilidade), dada pelo número de casos favoráveis em relação ao número de casos possíveis. Suponhamos que se considera a turma uma amostra aleatória de alunos, se um aluno é sorteado ao acaso, a probabilidade de que ele tenha nascido no mês de junho será  $5/40=0,125$ . Mas se suspeitasse que a restrição de equiprobabilidade não é verdadeira, seria preciso repetir o sorteio várias vezes, isto é, repetir o experimento, e então deverá ser abordada a concepção frequentista de probabilidade. Assim, a partir da Tabela 6, pode-se calcular que a frequência relativa observada para o mês de junho, considerando as três amostras selecionadas, foi  $2/15=0,1333$ .

Logo, sorteado um aluno – experimento – pode-se atribuir a cada mês – elemento do espaço amostral – uma probabilidade (ainda que não esteja definida a maneira como). Portanto, temos definido uma variável aleatória, a partir de uma característica qualitativa do aluno.

## 4 PRÓXIMOS PASSOS

Pretendemos continuar estudando a abordagem de currículo em espiral considerando outro tipo de variáveis aleatórias como de tipo discreto e contínuo. Isto será realizado sempre dando destaque a que conteúdos de probabilidade e estatística estejam sendo tratados para auxiliar o professor na sua tarefa.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Propomos neste trabalho mostrar, por meio de uma atividade de simples execução, como é possível apresentar, utilizando um currículo em espiral, o conceito de variável estatística para gradativamente apresentar a noção de variável aleatória.

Neste processo mostramos como é possível apresentar também, gradualmente e de forma adequada, além dos conteúdos, suas representações. Abordagens simples de conceitos como aleatoriedade e espaço amostral podem ser apresentados sem formalizações, que podem resultar pouco adequadas para o nível de escolaridade. Desde o início da atividade, isto é, no decorrer do fazer, o aluno poderá ser capaz de resolver problemas, conjecturar, discutir sobre um assunto.

## REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **PNLD 2017 guia de livros didáticos**: Matemática – ensino fundamental anos finais. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, DF: Ministério da Educação, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental – Matemática. Brasília, DF: Ministério da Educação, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 27 set. 2018.

BRUNER, J. S. Organization of early skilled action. **Child Development**, v. 44, n. 1, p. 1-11, mar. 1973.

HEITELE, D. An epistemological view on fundamental stochastic ideas. **Educational Studies in Mathematics**, n. 6, p. 187-205, 1975.