

GEOMETRIA DE ESPAÇOS DE BANACH
E
NOVOS IDEAIS CLÁSSICOS DE OPERADORES

CARMEN SILVIA CARDASSI

IME - USP

INTRODUÇÃO

Tanto a Geometria de Espaços de Banach como os Ideais de Operadores formam, cada um por si sô, uma imensa área de estudos, e têm seus próprios problemas e técnicas. No entanto, muitas e muitas vezes seus caminhos se cruzam e cada um deles colabora e interfere no caminho do outro.

O objetivo maior deste trabalho é apresentar alguns aspectos dessa ligação, sem a menor intenção de esgotar o assunto, mesmo porque ele é praticamente inesgotável, mas somente de ilustrar como tal interação ocorre.

Nas seções I e II apresentamos alguns exemplos de cada um desses temas, enquanto que alguns resultados clássicos de sua interação aparecem na seção III.

Na seção IV apresentamos alguns de nossos resultados envolvendo os ideais de operadores p -nucleares e estritamente p -integrals.

Todos os resultados serão apenas enunciados, mas procuramos dar sempre uma ou mais referências onde as demonstrações podem ser encontradas.

Usamos algumas notações e convenções: X e Y serão sempre espaços de Banach, salvo menção em contrário; X^* é o espaço dual de X (o conjunto de aplicações lineares contínuas de X em \mathbb{R} ou \mathbb{C}); operador significa aplicação linear contínua; subespaço é sempre fechado; $L(X, Y)$ é o conjunto de operadores de X em Y ; $X \supset Y$ quer dizer que existe um subespaço de X que é isomorfo a Y , e costumamos dizer, omitindo o isomorfismo, que X contém Y .

I. A GEOMETRIA DE ESPAÇOS DE BANACH

Esta subárea da Análise Funcional lida com diversas formulações de propriedades geométricas de espaços de Banach, tais como: o comportamento de seqüências, séries, operadores em geral ou operadores especiais; a "forma" da bola unitária; existência ou não de pontos extremais, expostos, fortemente expostos ou de conjuntos não-dentáveis; conter ou não subespaços isomorfos a outros espaços conhecidos; etc.

Embora em princípio tais propriedades pudessem não se relacionar, não é o que de fato ocorre. Vejamos alguns exemplos.

EXEMPLO 1. $X \not\subset c_0$

[1.1] Bessaga-Pelczynski [BP] ou [DI-V.8]

$X \not\subset c_0$ se e somente se toda série fracamente incondicionalmente Cauchy (wuc) $\left[\sum k^*(x_n) < \infty, \forall x^* \in X^* \right]$ é incondicionalmente convergente $\left[\sum x_{\pi(n)} \text{ converge, } \forall \pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ permutação} \right]$.

[1.2] Elton [EL] ou [DI-IX.15]

$X \not\rightarrow c_0$ se e somente se toda série extremal-fracamente incondicionalmente convergente $\left[\sum |x^*(x_n)| < \infty, \forall x^* \in \text{ext} B_{X^*} \right]$ é incondicionalmente convergente.

[1.3] [DU-VI.2.15]

Se $X \not\rightarrow c_0$, para qualquer espaço compacto Hausdorff K tem-se que todo operador $T: C(K) \rightarrow X$ é fracamente compacto.

[1.4] [PS-Main Theorem]

Seja K um espaço compacto Hausdorff. Então K é disperso [não cont m conjuntos não vazios perfeitos] se e somente se todo subespaço de dimensão infinita de $C(K)$ cont m c_0 .

EXEMPLO 2. $X \not\rightarrow l_1$

[2.1] Rosenthal [RO] ou [DI-XI]

$X \not\rightarrow l_1$ se e somente se toda seq ncia limitada de elementos de X tem subsequência fracamente Cauchy.

[2.2] [BO], [JN] e [MU] ou [DUP-página 151]

$X \not\rightarrow l_1$ se e somente se X^* tem a propriedade fraca de Radon-Nikodym (WRNP) $\left[Y \text{ tem WRNP se e somente se para qualquer espaço de medida finita } (\Omega, \mathcal{L}, \mu), \text{ todo operador } T: L_1(\mu) \rightarrow Y \text{   Pettis representável, ie, existe uma fun o Pettis integrável } g: \Omega \rightarrow Y \text{ tal que } Tf = (P) \int_{\Omega} fg \, d\mu, \text{ para toda } f \in L_1(\mu) \right]$.

[2.3] Pelczynski [PE] ou [DI-página 213]

Seja X separável. Então $X \not\rightarrow l_1$ se e somente se $C(\Delta)$ é isomorfo a um quociente de X , onde $\Delta = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ é o conjunto de Cantor.

[2.4] Kadec-Pelczynski [KP]

Seja X um subespaço de $L_1[0,1]$. Então X é reflexivo se e somente se $X \not\subseteq l_1$.

EXEMPLO 3. Propriedade de Dunford-Pettis (DPP)

Definição. X tem a propriedade de Dunford-Pettis (DPP) se todo operador fracamente compacto definido em X leva conjuntos fracamente compactos em conjuntos compactos.

[3.1] Brace-Grothendieck [GR] ou [DU-página 177]

São equivalentes:

- (1) X tem DPP;
- (2) para todo Y , todo operador fracamente compacto $T: X \rightarrow Y$ é completamente contínuo [leva sequências fracamente convergentes em sequências convergentes em norma] ;

(3) para quaisquer sequências $\{x_n\}$ em X e $\{x_n^*\}$ em X^* com $x_n \xrightarrow{w} 0$ e $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$ tem-se $x_n^*(x_n) \rightarrow 0$.

EXEMPLO 4. Propriedade de Radon-Nikodym (RNP)

Definição. X tem a propriedade de Radon-Nikodym (RNP) se para qualquer espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) todo operador $T: L_1(\mu) \rightarrow X$ é Bochner-representável, ie, existe $g \in L_\infty(\mu; X)$ tal que $Tf = \int_\Omega fg \, d\mu$, para toda $f \in L_1(\mu)$.

[4.1] [DU-VII.6]

São equivalentes:

- (1) X tem RNP;
- (2) para qualquer espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) , toda medida vetorial σ -aditiva, μ -contínua e de variação limitada $G: \Sigma \rightarrow X$ tem uma derivada de Radon-Nikodym, ie, existe $g \in L_1(\mu; X)$ tal que $G(E) = \int_E g \, d\mu$, para todo $E \in \Sigma$;

(3) (Lewis-Stegall [LS]) todo operador $T: L_1[0,1] \rightarrow X$ se fatora através de l_1 , i.e., existem $S \in L(L_1[0,1], l_1)$ e $L \in L(l_1, X)$ com $T = L \circ S$;

(4) todo subconjunto limitado não vazio D de X é dentável [D é não-dentável se existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in D, x \in \overline{D \setminus B_\epsilon(x)}$] ;

(5) todo subconjunto fechado limitado convexo não vazio D de X tem um ponto fortemente exposto [existe $x_0 \in D$ tal que existe $x_0^* \in X^*$ com $x_0^*(x_0) > x_0^*(x), \forall x \in D \setminus \{x_0\}$ e se $\lim x_n^*(x_n) = x_0^*(x_0)$, para $\{x_n\}$ em D , então $x_n \rightarrow x_0$] ;

(6) toda função absolutamente contínua $f: [0,1] \rightarrow X$ é diferenciável q.s. e neste caso $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt, \forall a, b \in [0,1]$;

(7) (Rieffel-Maynard) para qualquer $\epsilon > 0, B_X$ não contém uma ϵ -floresta infinita [começamos com o 1º nível x_0 , que pode ser escrito $x_0 = \sum a_n x_n$, com $a_n > 0, \sum a_n = 1$ e $\|x_n - x_0\| > \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$; o 2º nível $\{x_n\}$ é tal que $x_n = \sum a_{ni} x_{ni}$, com $a_{ni} > 0, \sum_i a_{ni} = 1$, e $\|x_{ni} - x_n\| > \epsilon$, para todos $n, i \in \mathbb{N}$; e assim sucessivamente, com infinitos níveis] .

EXEMPLO 5. Algumas interligações.

[5.1] Bessaga-Pelczynski [BP] ou [DI-V.10]

São equivalentes:

- (1) $X^* \not\hookrightarrow c_0$;
- (2) $X \not\hookrightarrow l_1$ complementado;
- (3) $X^* \not\hookrightarrow l_\infty$.

[5.2] James [JA]

Seja X com base incondicional. São equivalentes:

- (1) X é reflexivo;
- (2) $X \not\hookrightarrow c_0$ e $X \not\hookrightarrow l_1$.

[5.3] [PT]

São equivalentes:

- (1) X tem DPP e $X \not\approx \ell_1$;
- (2) X^* tem a propriedade de Schur [Y tem a propriedade de Schur se toda sequência fracamente convergente é convergente em norma].

[5.4] [DU-III.1.1 e VII.7]

Se X tem RNP, então $X \not\approx c_0$ e X tem WRNP. Se X^* tem RNP, então $X \not\approx \ell_1$.

[5.5] [GS-Proposition 8]

Se X^* for complementado num reticulado de Banach, então X^* tem RNP se e somente se $X \not\approx \ell_1$ (ou X^* tem WRNP).

Em todos os exemplos acima omitimos propositamente equivalências ou implicações que envolvam ideais de operadores. Algumas dessas situações aparecem na seção III.

Para o leitor interessado em Geometria de Espaços de Banach em geral, recomendamos as monografias [DI], [DU] e [LT], e os inúmeros artigos de A. Pelczynski, J. Lindenstrauss, G. Pisier, H. P. Rosenthal, J. Bourgain, R. C. James, C. Stegall, J. Diestel, J. J. Uhl, W. Davis, W. Johnson, T. Figiel, S. Kwapien, entre outros.

II. OS IDEAIS DE OPERADORES

Informalmente falando, o nome ideal de operadores é usado para designar uma propriedade de operadores que é preservada por composição uni- ou bilateral com operadores quaisquer. Por exemplo, se $T \in L(X, Y)$ é um operador de posto finito, e $S \in L(Z, X)$ e

$R_c L(Y, W)$ são operadores quaisquer, então $R_c T$, $T_c S$ e $R_c T_c S$ são operadores de posto finito, propriedade "herdada" de T .

O conceito preciso de ideal de operadores é um pouco mais complicado e não o daremos aqui. Ele pode ser encontrado em [PI], por exemplo.

Existem algumas classes de operadores que foram identificadas há muito tempo como ideais. Esses são os chamados ideais clássicos de operadores. Os exemplos 1 a 6 a seguir estão entre eles, assim como os operadores de posto finito, denotados por $F(X, Y)$.

EXEMPLO 1. Operadores compactos, $K(X, Y)$.

EXEMPLO 2. Operadores fracamente compactos, $W(X, Y)$.

EXEMPLO 3. Operadores de Hilbert-Schmidt, $HS(X, Y)$.

Definição. Sejam X e Y espaços de Hilbert. Um operador $T: X \rightarrow Y$ é chamado de Hilbert-Schmidt se $\sum_{I, J} |\langle T e_i, f_j \rangle|^2 < \infty$, onde $\{e_i\}_{i \in I}$ e $\{f_j\}_{j \in J}$ são (quaisquer) bases ortonormais de X e Y , respectivamente.

EXEMPLO 4. Operadores completamente contínuos ou de Dunford-Pettis, $C(X, Y)$ ou $DP(X, Y)$.

Definição. Um operador $T: X \rightarrow Y$ é completamente contínuo ou Dunford-Pettis se leva conjuntos fracamente compactos em conjuntos compactos.

Esta classe surgiu como possível generalização dos operadores compactos, que eram originalmente chamados completamente contínuos. Quando o domínio é um espaço reflexivo, eles coincidem com os compactos.

EXEMPLO 5. Operadores nucleares, $N(X, Y)$.

Definição (Grothendieck). Um operador $T: X \rightarrow Y$ é nuclear se pertence a $X \hat{\otimes}_{\Pi} Y$ em $L(X, Y)$ (com a identificação usual).

EXEMPLO 6. Operadores Grothendieck-integrais, $I(X, Y)$.

Definição (Grothendieck). Um operador $T: X \rightarrow Y$ é Grothendieck-integral se é forma bilinear $B_T(x, y^*) = \langle Tx, y^* \rangle$, $x \in X$ e $y^* \in Y^*$, for integral (ie, B_T pertence a $(X \hat{\otimes}_\epsilon Y)^*$ em $\mathfrak{B}(X, Y^*) = \{B: X \times Y^* \rightarrow \mathbb{K}: B \text{ é bilinear contínua} \}$).

A seguir apresentamos alguns exemplos de ideais de operadores que, embora tenham surgido mais recentemente (fins da década de 60), podemos chamar de neo-clássicos, devido às suas inúmeras aplicações em diversos problemas.

EXEMPLO 7. Operadores absolutamente p-somantes, $\Pi_p(X, Y)$, $1 \leq p < \infty$.

Definição. Um operador $T: X \rightarrow Y$ é absolutamente p-somante se existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\left[\sum_{k=1}^n \|Tx_k\|^p \right]^{1/p} < K \sup \left\{ \left[\sum_{k=1}^n |\langle x_k^*, x_k \rangle|^p \right]^{1/p} : x_k^* \in B_{X^*} \right\},$$

para quaisquer $x_1, \dots, x_n \in X$.

É interessante observar que um operador 1-somante leva séries fracamente incondicionalmente Cauchy em séries absolutamente convergentes.

EXEMPLO 8. Operadores p-nucleares, $N_p(X, Y)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Definição (Persson-Pietsch). Um operador $T: X \rightarrow Y$ é p-nuclear, $1 \leq p \leq \infty$, se existem sequências $\{x_n^*\}$ em X^* e $\{y_n\}$ em Y tais que

- (i) $Tx = \sum \langle x_n^*, x \rangle y_n, \forall x \in X;$
- (ii) $\sum \|x_n^*\|^p < \infty, \text{ se } 1 \leq p < \infty, \text{ e}$
 $\lim \|x_n^*\| = 0, \text{ se } p = \infty;$
- (iii) $\sup \left[\sum |\langle y_n^*, y_n \rangle|^q \right]^{1/q} : y_n^* \in B_{Y^*} < \infty, \text{ se } 1 < p \leq \infty, \text{ e}$
 $\sup \|y_n\| < \infty, \text{ se } p = 1,$

onde q é o expoente conjugado de p .

Note-se que $N_1(X, Y) = N(X, Y)$.

EXEMPLO 9. Operadores estritamente p-integrais, $SI_p(X, Y)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Definição(Persson-Pietsch). Um operador $T: X \rightarrow Y$ é estritamente p-integral, $1 \leq p \leq \infty$, se existe uma medida vetorial σ -aditiva $G: \mathcal{B}(B_{X^*}) \rightarrow Y$ tal que

- (i) $Tx = \int_{B_{X^*}} \langle x^*, x \rangle dG(x^*) \quad , \quad \forall x \in X;$
- (ii) se $p < \infty$, existe $\mu \in rca^+(\mathcal{B}(B_{X^*}))$ tal que

$$\left\| \int_{B_{X^*}} f dG \right\| < \left[\int_{B_{X^*}} |f|^p d\mu \right]^{1/p} \quad , \quad \forall f \in C(B_{X^*}) .$$

Os operadores estritamente 1-integrais são também chamados Pietsch-integrais.

EXEMPLO 10. Operadores p-integrais, $I_p(X, Y)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Definição. Um operador $T: X \rightarrow Y$ é p-integral, $1 \leq p \leq \infty$, se $J_Y \circ T \in SI_p(X, Y^{**})$, onde J_Y é a inclusão canônica de Y em Y^{**} .

Os operadores 1-integrais coincidem com os Grothendieck-integrais, ie, $I_1(X, Y) = I(X, Y)$.

Muitas propriedades de N_p e SI_p podem ser encontradas em [PP]. Vários outros ideais de operadores aparecem na literatura e também têm múltiplas aplicações interessantes. Escolhemos estes por serem os objetos de nossos últimos trabalhos de pesquisa. O leitor interessado encontrará farto material no livro de A.Pietsch [PI] e no artigo-survey de J.R.Retherford [RE]. bem como em suas bibliografias.

III. A INTERAÇÃO ENTRE GEOMETRIA DE ESPAÇOS DE BANACH E IDEAIS DE OPERADORES: ALGUNS RESULTADOS CLÁSSICOS.

Vamos enunciar agora, sem demonstrações, alguns resultados interessantes que ilustram a interação Geometria de Espaços de Banach-Ideais de Operadores. Alguns desses resultados envolvem ambos os assuntos; outros, onde somente um deles aparece, estão aqui relacionados porque suas demonstrações utilizam resultados e técnicas do outro.

TEOREMA 1. [SR]

São equivalentes:

- (1) X é um \mathcal{L}_∞ -espaço;
- (2) $\Pi_1(X, \cdot) = I_1(X, \cdot)$.

TEOREMA 2. [LP]

Se X é um \mathcal{L}_1 -espaço e Y é um \mathcal{L}_2 -espaço, então $L(X, Y) = \Pi_1(X, Y)$.

TEOREMA 3. [LP]

Se X e Y são tais que X tem base incondicional e $L(X, Y) = \Pi_1(X, Y)$, então X é isomorfo a ℓ_1 e Y é isomorfo a um espaço de Hilbert.

TEOREMA 4. (Dvoretzky-Rogers) [DI-páginas 61-62]

Toda série incondicionalmente convergente em X é absolutamente convergente se e somente se X tem dimensão finita.

TEOREMA 5. (Grothendieck) [LP]

X é isomorfo a um espaço de Hilbert se e somente se X é isomorfo a um subespaço de um \mathcal{L}_1 -espaço e a um quociente de um \mathcal{L}_∞ -espaço.

TEOREMA 6. (Grothendieck) [LP]

Se $T: X \rightarrow Y$ e $S: Y \rightarrow Z$ são operadores absolutamente 2-somantes, então $S \circ T$ é um operador nuclear.

TEOREMA 7. [PO]

São equivalentes:

- (1) $X \curvearrowright \mathfrak{L}_1$;
- (2) existe $T \in \Pi_2(X, \mathfrak{L}_2)$, T sobrejetor;
- (3) $\Pi_2(X, \mathfrak{L}_2) \setminus K(X, \mathfrak{L}_2) = \emptyset$;
- (4) para qualquer isometria j de X em $C(K)$ (onde K é um espaço compacto Hausdorff), existe uma medida-probabilidade μ em (K) tal que $j(X)$ é gordo em relação a μ [um subespaço Z de $C(K)$ é gordo em relação a μ se e somente se $J_{\mu}|_Z$ não é compacto, onde J_{μ} é a inclusão natural de $L_{\infty}(\mu)$ em $L_2(\mu)$].

TEOREMA 8. [DU-VII.6]

São equivalentes:

- (1) X tem RNP;
- (2) $\Pi_1(C[0,1], X) = I_1(C[0,1], X) = N_1(C[0,1], X)$.

TEOREMA 9. [DU-VIII.4.6, adaptado]

São equivalentes:

- (1) X^* tem RNP;
- (2) $SI_1(X, \cdot) = N_1(X, \cdot)$.

TEOREMA 10. [DU-VI.4.8]

São equivalentes:

- (1) Y tem RNP;
- (2) $SI_1(\cdot, Y) = N_1(\cdot, Y)$.

IV. OPERADORES ESTRITAMENTE p -INTEGRAIS E p -NUCLEARES

Apresentamos aqui alguns dos resultados que obtivemos recentemente em nosso trabalho, relacionando os ideais de operadores SI_p e K , e SI_p e N_p , particularmente para $p > 1$, cujas demonstrações se encontram em [CA].

TEOREMA 1.

Seja $1 \leq p \leq \infty$. Se X^* tem RNP, então $SI_p(X, \cdot) = N_p(X, \cdot)$.

TEOREMA 2.

São equivalentes:

- (1) $X \not\in \mathcal{L}_1$ (ou X^* tem wRNP);
- (2) para todo p , $1 \leq p \leq \infty$, $SI_p(X, \cdot) \subset K(X, \cdot)$;
- (3) existe p , $1 \leq p \leq \infty$, tal que $SI_p(X, \cdot) \subset K(X, \cdot)$;
- (4) para todo p , $1 \leq p \leq \infty$, $I_p(X, \cdot) \subset K(X, \cdot)$;
- (5) existe p , $1 \leq p \leq \infty$, tal que $I_p(X, \cdot) \subset K(X, \cdot)$.

NOTA. Quando X^* é complementado num reticulado de Banach, wRNP e RNP coincidem em X^* [GS-Proposition 8]. Neste caso podemos acrescentar ao Teorema 2, em virtude do Teorema 1 e da compacidade dos operadores p -nucleares, as seguintes condições ainda equivalentes:

- (6) para todo p , $1 \leq p \leq \infty$, $SI_p(X, \cdot) = N_p(X, \cdot)$;
- (7) existe p , $1 \leq p \leq \infty$, tal que $SI_p(X, \cdot) = N_p(X, \cdot)$.

TEOREMA 3.

Seja $Y = Z^*$ para algum espaço Z . São equivalentes:

- (1) Y tem wRNP (ou $Z \not\in \mathcal{L}_1$);
- (2) $SI_1(\cdot, Y) \subset K(\cdot, Y)$.

TEOREMA 4.

I. As seguintes condições sobre um espaço Y são equivalentes:

- (1) para todo p , $1 < p < \infty$, $SI_p(\cdot, Y) \subset K(\cdot, Y)$;
- (2) existe p , $1 < p < \infty$, tal que $SI_p(\cdot, Y) \subset K(\cdot, Y)$;
- (3) para todo p , $2 \leq p < \infty$, $SI_p(\cdot, Y) = N_p(\cdot, Y)$;

(4) existe p , $2 \leq p < \infty$, tal que $SI_p(\cdot, Y) = N_p(\cdot, Y)$;

(5) $L(\ell_2, Y) = K(\ell_2, Y)$;

(6) $L(L_2(\mu), Y) = K(L_2(\mu), Y)$, para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) ;

(7) para todo p , $2 \leq p < \infty$, $L(L_p(\mu), Y) = K(L_p(\mu), Y)$, para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) ;

(8) existe p , $2 \leq p < \infty$, tal que $L(L_p(\mu), Y) = r(L_p(\mu), Y)$, para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) .

II. Se $Y = Z^*$ para algum espaço Z , as condições (1) a (8) implicam em

(9) para todo q , $1 < q \leq 2$, $L(Z, L_q(\mu)) = K(Z, L_q(\mu))$, para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) ;

(10) existe q , $1 < q \leq 2$, tal que $L(Z, L_q(\mu)) = K(Z, L_q(\mu))$, para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) ;

(11) $L(Z, \ell_2) = K(Z, \ell_2)$.

III. Se Y for reflexivo, as condições (1) a (11) são equivalentes, onde, em (9) a (11), $Z = Y^*$.

TEOREMA 5.

I. As seguintes condições sobre um espaço Y são equivalentes:

(1) $SI_\infty(\cdot, Y) \subset K(\cdot, Y)$;

(2) $SI_\infty(\cdot, Y) = N_\infty(\cdot, Y)$;

(3) $L(C(K), Y) = K(C(K), Y)$, para todo espaço compacto Hausdorff K ;

(4) $W(C(K), Y) = K(C(K), Y)$, para todo espaço compacto Hausdorff K ;

(5) $L(L_\infty(\mu), Y) = K(L_\infty(\mu), Y)$, para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) ;

(6) $W(L_\infty(\mu), Y) = K(L_\infty(\mu), Y)$, para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) .

II. Se $Y = Z^*$ para algum espaço Z , as condições (1) a (6) implicam em

(7) $L(Z, L_1(\mu)) = K(Z, L_1(\mu))$, para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) ;

(8) $W(Z, L_1(\mu)) = K(Z, L_1(\mu))$, para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) .

III. Se Y for reflexivo, as condições (1) a (8) são equivalentes, onde, em (7) e (8), $Z = Y^*$.

COROLÁRIO 6.

Se Y tem uma das seguintes propriedades

(a) $L(C(K), Y) = K(C(K), Y)$ ou $W(C(K), Y) = K(C(K), Y)$, para todo espaço compacto Hausdorff K ; ou

(b) $L(L_\infty(\mu), Y) = K(L_\infty(\mu), Y)$ ou $W(L_\infty(\mu), Y) = K(L_\infty(\mu), Y)$, para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) ,

então

(c) $L(l_2, Y) = K(l_2, Y)$, e

(d) $L(L_p(\mu), Y) = K(L_p(\mu), Y)$, para todo p , $2 \leq p < \infty$, e para todo espaço de medida finita (Ω, Σ, μ) .

NOTA. Nos espaços $SI_p(X, Y)$ e $N_p(X, Y)$ pode-se definir normas especiais, $si_p(\cdot)$ e $n_p(\cdot)$, respectivamente, e ter-se que SI_p e N_p são espaços de Banach, valendo ainda que $N_p(X, Y) \subset SI_p(X, Y)$, com $\|\cdot\| < si_p(\cdot) < n_p(\cdot)$, independentemente de X, Y e p . Em todas as condições enunciadas aqui, onde está " $SI_p = N_p$ " podemos colocar " $SI_p = N_p$, com $si_p = n_p$ ", que ainda são mantidas

as equivalências. Com isto queremos salientar que a igualdade $SI_p(X, Y) = N_p(X, Y)$ não acontece simplesmente como subconjuntos de $L(X, Y)$, mas também como igualdade de espaços de Banach independentes.

REFERÊNCIAS

- [BO] J. BOURGAIN - "On martingales in conjugate Banach spaces", pre-print.
- [BP] C. BESSAGA & A. PELCZYNSKI - "On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces", *Studia Math.* 17 (1958), 151-164.
- [CA] C. S. CARDASSI - "Operadores estritamente p-integrais e p-nucleares", Tese, IME-USP, 1986.
- [DI] J. DIESTEL - "Sequences and series in Banach spaces", Graduate Texts in Mathematics 92, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1984.
- [DU] J. DIESTEL & J. J. UHL Jr. - "Vector measures", Mathematical Surveys 15, American Mathematical Society, Providence, 1977.
- [DUP] J. DIESTEL & J. J. UHL Jr. - "Progress in vector measures- 1977-1983", em *Lecture Notes in Mathematics* 1033, 144-192, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.
- [EL] J. ELTON - "Extremely weakly unconditionally convergent series", *Israel J. Math.* 40(1981), 255-258.

- [GR] A.GROTHENDIECK - "Sur les applicatiōs linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$ ", Canad. J. Math. 5(1953), 129-173.
- [GS] N.GHOUSSOUB & E.SAAB - "On the weak Radon-Nikodym property", Proc. Amer. Mat. Soc. 81(1981), 81-84.
- [JA] R.C.JAMES - "Bases and reflexivity in Banach spaces", Ann. of Math. 52(1950), 518-527.
- [JN] L.JANICKA - "Some measure-theoretic characterization of Banach spaces not containing ℓ_1 ", Bull. Acad. Polon. Sci. Sēr. Sci. Tech. 27(1979), 561-565.
- [KP] M.I.KADEC & A.PELCZYNSKI - "Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p ", Studia Math. 21(1962), 161-176.
- [LP] J.LINDENSTRAUSS & A.PELCZYNSKI - "Absolutely summing operators in L_p -spaces and their applications", Studia Math. 29(1968), 275-326.
- [LS] D.R.LEWIS & C.STEGALL - "Banach spaces whose duals are isomorphic to $\ell_1(\Gamma)$ ", J. Funct. Analysis 12(1973), 177-187.
- [LT] J.LINDENSTRAUSS & L.TZAFRIRI - "Classical Banach spaces I", Springer-Verlag, New York-Berlin, 1977.
- [MU] K.MUSIAL - "The weak Radon-Nikodym property in Banach spaces", Studia Math. 64(1978), 151-174.
- [PE] A.PELCZYNSKI - "On $C(K)$ subspaces of separable Banach spaces", Studia Math. 31(1968), 513-522.
- [PI] A.PIETSCH - "Operator ideals", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.

- [PO] A.PELCZYNSKI & R.I.OVSEPIAN - "The existence in every separable Banach space of a fundamental, total and bounded biorthogonal sequence and related constructions of uniformly bounded orthonormal systems in L_2 ", Sēminaire Maurey-Schwartz 1973/74, Exposé 20.
- [PP] A.PERSSON & A.PIETSCH - "p-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen", *Studia Math.* 33(1969), 19-62.
- [PS] A.PELCZYNSKI & Z.SEMADENI - "Spaces of continuous functions III", *Studia Math.* 18(1959), 211-222.
- [PT] P.PRAKASH & N.THAKARE - "Note on Dunford-Pettis property and Schur property", *Indiana Univ. Math. J.* 27(1978), 91-92.
- [RE] J.R.RETHERFORD - "Applications of Banach ideals of operators", *Bull. Amer. Math. Soc.* 81(1975), 978-1012.
- [RO] H.P.ROSENTHAL - "A characterization of Banach spaces containing \mathfrak{L}_1 ", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 71(1974), 2411-2413.
- [SR] C.STEGALL & J.R.RETHERFORD - "Fully nuclear and completely nuclear operators with applications to \mathfrak{L}_1 - and \mathfrak{L}_∞ -spaces", *Trans. Amer. Math. Soc.* 163(1972), 457-493.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
C.P. 20.570 (AG. IGUATEMI)
01498 - SÃO PAULO - SP