SESSÕES DA ACADEMIA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS

RESUMOS DAS COMUNICAÇÕES

UMA CONDIÇÃO NECESSÁRIA E SUFICIENTE PARA A ESTABILIDADE DO EQUILÍBRIO — MAURO DE OLIVEIRA CESAR E ANGELO BARONE-NETTO, *credenciados por* CHAIM SAMUEL HONIG — *Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 01498 São Paulo, SP.*

O objetivo deste trabalho é obter uma condição necessária e suficiente para que $x = 0, y = 0, \dot{x} = 0, \dot{y} = 0$, seja um ponto de equilíbrio estável para o sistema posicional

$$\begin{aligned} &\ddot{x} = -xf(x), \\ &\ddot{y} = -yg(x), \\ &f, g \colon U \to \mathbb{R}, \\ &0 \in U = U^0 \subseteq \mathbb{R}, f; g \in C^2, f(0), g(0) > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Observando-se que este sistema só é conservativo no caso particular em que g é constante.

Como $f(0) > 0$ o ponto $x = 0, \dot{x} = 0$ é um centro para a equação $\ddot{x} = -xf(x)$.

Portanto existe $\bar{x}_0$ tal que para todo $x_0, 0 < x_0 < \bar{x}_0$, a solução $x(t; x_0)$ desta equação, com $x(0; x_0) = x_0$ e $\dot{x}(0; x_0) = 0$, é $\tau(x_0)$-periódica e par.

Sabe-se que $\tau \in C^2$ e

$$\tau(x_0) \to \frac{2\pi}{\sqrt{f(0)}}$$

quando $x_0 \to 0^+$.

Substituindo-se $x(t; x_0)$ em $\ddot{y} = -yg(x)$, obtém-se

$$\ddot{y} = -yg(x(t; x_0)), \tag{2}$$

a qual é uma família de equações de Hill (uma para cada x_0).

A seguinte afirmação é imediata:

Se $\varphi(t; x_0)$ for solução de (2) então $\varphi(-t; x_0)$ também o será (caso simétrico).

Sejam $y_1(t; x_0)$ e $y_2(t; x_0)$ as soluções de (2) tais que

$$\begin{aligned} y_1(0; x_0) = 1, \ \dot{y}_1(0; x_0) = 0 \\ y_2(0; x_0) = 0 \ \text{ e } \ \dot{y}_2(0; x_0) = 1. \end{aligned}$$

Observe-se que y_1 é par, y_2 é impar e que $y_1\dot{y}_2 - y_2\dot{y}_1 = 1$.

Chamaremos *secção* x_0 a equação de Hill (2), correspondente ao valor x_0.

Pela teoria de Floquet, relativa ao caso simétrico, tem-se

$$\dot{y}_2(\tau(x_0); x_0) = y_1(\tau(x_0); x_0).$$

Além disso esta teoria nos fornece o seguinte resultado:

Uma condição necessária e suficiente para a estabilidade da origem $y = 0, \dot{y} = 0$ da secção x_0 é que

$$\begin{aligned} &\text{ou} \quad y_1^2(\tau(x_0); x_0) < 1 \\ &\text{ou} \quad y_1^2(\tau(x_0); x_0) = 1 \\ &\text{e} \quad y_2(\tau(x_0); x_0) = \dot{y}_1(\tau(x_0); x_0) = 0 \end{aligned}$$

(v.[W. Magnus & S. Winkler, "Hill's Equation", *Interscience*, New York, 1966]).

Vamos introduzir a seguinte função:

$$\ell \colon [0; \bar{x}_0[\to \mathbb{R},$$

$$\ell(x_0) = \frac{1 - y_1^2(\tau(x_0); x_0)}{y_2^2(\tau(x_0); x_0)} = \frac{\dot{y}_1(\tau(x_0); x0)}{y_2(\tau(x_0); x0)}$$

se

$$y_2(\tau(x_0); x_0) \neq 0,$$

$$\ell(x_0) = g(x_0)$$

se

$$y_2(\tau(x_0); x_0) = \dot{y}_1(\tau(x_0); x_0) = 0,$$

$$\ell(x_0) = +\infty$$

se

$$y_2(\tau(x_0);x_0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{y}_1(\tau(x_0);x_0) \neq 0.$$

O resultado central deste trabalho é o seguinte

Teorema: *Uma condição necessária e suficiente para que a origem de (1) seja estável é que*

$$\underline{\lim}_{x\to 0^+} \ell(x_0) > 0$$

e

$$\overline{\lim}_{x\to 0^+} \ell(x_0) \leq +\infty.$$

A prova deste Teorema é feita mediante uma integral primeira do sistema (1), do tipo

$$E(x;\dot{x};y;\dot{y}) = \bar{a}(x;\dot{x})\dot{y}^2 + \bar{b}(x;\dot{x})y\dot{y} + \\ + \bar{c}(x;\dot{x})y^2 + \frac{\dot{x}^2}{2} + \int_0^x \xi f(\xi)d\xi$$

a qual, resulta uma função de Liapunov para a estabilidade do equilíbrio de (1), no caso em que

$$\underline{\lim}_{x\to 0^+} \ell(x_0) > 0$$

e

$$\overline{\lim}_{x\to 0^+} \ell(x_0) \leq +\infty.$$

As funções $\bar{a}, \bar{b}$ e $\bar{c}$ estão definidas em uma conveniente vizinhança da origem e assumem, nesse ponto, os valores

$$\bar{a}(0;0) = 1, \ \bar{b}(0;0) = 0 \text{ e } \bar{c}(0;0) = g(0).$$

Estas funções podem eventualmente ser descontínuas na origem e em cada ponto $(x;\dot{x})$ de algumas órbitas de $\ddot{x} = -xf(x)$. Elas resultarão contínuas na origem (respectivamente em uma vizinhança da origem) se e somente se a função $\ell(x_0)$ for contínua em 0 (respectivamente em uma vizinhança, à direita, de 0).

Em (Cesar & Barone-Netto, "The Existence of Liapunov Functions for some Non-conservative Positional Mechanical Systems", aceito para publicação no J. Differential Equations) os autores provaram os seguintes teoremas, os quais são casos particulares do teorema acima:

a) Se $y_1(t;x_0)$ e $y_2(t;x_0)$ forem $\tau(x_0)$-periódicas para todo $x_0, 0 < x_0 < \delta$, então a origem de (1) será estável.

b) Se $4g(0) \neq n^2 f(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então a origem de (1) será estável.

As provas destes teoremas foram feitas através da integral primeira considerada acima; em ambos os casos as funções $\bar{a}, \bar{b}$ e $\bar{c}$ resultaram contínuas em uma vizinhança da origem.

Os autores estão, no momento, trabalhando em critérios explícitos para o comportamento de $l(x_0)$ em uma vizinhança, à direita, da origem. — (*10 de abril de 1990*).

ALGUNS ASPECTOS LOCAIS DE ENVOLVENTES A 2 PARÂMETROS DE n-ESFERAS EM UMA FORMA ESPACIAL — ROSA MARIA DOS SANTOS BARREIRO CHAVES, *credenciada por* CHAIM SAMUEL HONIG — *Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP.*

O objetivo principal deste trabalho é estudar uma envolvente a 2-parâmetros de n-esferas espacial (p-SPES) M^n, com $n \geq 4$, imersa isometricamente em uma forma espacial simplesmente conexa Q_c^{n+1} ($c = 0, c = 1$ e $c = -1$) de modo que a curvatura média H e a curvatura de Gauss Kronecker K desta imersão, satisfaçam a relação $A + BnH + CK \equiv 0$, sendo A, B e C constantes reais. A definição de uma envolvente a p-parâmetros especiais de n-esferas, para o caso $c = 0$, pode ser encontrada em ([AD] - Asperti, A. C. and Dajczer, M. - *Ill. J. of Math.* Vol. 28, nº4, 1984) e pode ser naturalmente estendida para os casos $c = 1$ e $c = -1$. O conjunto focal da envolvente é dado por uma imersão isométrica $g: L^2 \to Q_c^{n+1}$ e desempenha papel fundamental na obtenção dos resultados. Temos ainda uma função $r \in C^\infty(L^2)$, positiva para os casos $c \leq 0$, tal que não anula $\cos r$ nem $\operatorname{sen} r$ no caso $c = 1$ e satisfaz $1 - |\nabla r|^2 > 0, \forall c$, onde ∇r é o gradiente de r.

Chamando-se Λ^1, o fibrado normal unitário sobre a imersão g, consideremos a aplicação $\psi: \Lambda^1 \to Q_c^{n+1}$ dada por:

$$\begin{aligned} \psi(y,\xi y) &= g(y) - r(y)\nabla r(y) - \\ &\quad - r(y)\sqrt{1 - |\nabla r|^2(y)}\,\xi y \quad (c = 0) \\ &= \cos r(y) g(y) - \operatorname{sen} r(y)\nabla r(y) + \\ &\quad + \operatorname{sen} r(y)\sqrt{1 - |\nabla r|^2(y)}\,\xi y \quad (c = 1) \\ &= \cosh r(y) g(y) - \operatorname{senh} r(y)\nabla r(y) + \\ &\quad + \operatorname{senh} r(y)\sqrt{1 - |\nabla r|^2(y)}\,\xi y \quad (c = -1) \end{aligned} \tag{1}$$