

INTEGRABILIDADE SEGUNDO RIEMANN

PAULA PRISCILA BRAGA

ORIENTADORAS: IRACEMA MARTIN BUND

ROSELI FERNANDEZ

Relatamos neste trabalho um resultado encontrado na revista American Mathematical Monthly - Dezembro/1971, em um artigo de R.C. Metzler.

Teorema:

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, limitada, possuindo limite à direita em todos os pontos. Então, f é integrável segundo Riemann.

Demonstração:

Para qualquer $\gamma \geq 0$ definimos

$$h_{\gamma}(k) = \begin{cases} 0, & k = a \\ -\int_a^k f(y)dy - \int_a^k f(y)dy - \gamma(k-a), & a < k \leq b \end{cases}$$

Se $h_{\gamma}(b) \leq 0$, $\forall \gamma > 0$, então $0 \leq \frac{\int_a^b f(y)dy - \int_a^b f(y)dy}{b-a} \leq \gamma$

e portanto $-\int_a^b f(y)dy = -\int_a^b f(y)dy.$

Assim, devemos provar que $h_Y(b) \leq 0$, $\forall Y > 0$.

Suponhamos, por absurdo, $h_\alpha(b) > 0$ para algum $\alpha > 0$, e seja $x = \inf\{t \in [a, b] / h_\alpha(t) > 0\}$.

Provaremos que as afirmações $h_\alpha(x) > 0$ e $h_\alpha(x) \leq 0$ são ambas falsas, e assim concluiremos que $h_\alpha(b) \leq 0$, o que nos leva a uma contradição.

1º caso: $h_\alpha(x) > 0$.

Tomamos $M = \sup\{|f(t)| / t \in [a, b]\}$ e δ tal que $0 < \delta < x - a$ e $2M\delta \leq h_\alpha(x)$.

Lembrando que $-M \leq f(t) \leq M$, $\forall t \in [a, b]$, temos:

$$\int_a^{x-\delta} f(y) dy = \int_a^x f(y) dy - \int_{x-\delta}^x f(y) dy \geq \int_a^x f(y) dy - M\delta$$

$$\int_a^{x-\delta} f(y) dy = \int_a^x f(y) dy - \int_{x-\delta}^x f(y) dy \leq \int_a^x f(y) dy + M\delta$$

e então,

$$\int_a^{x-\delta} f(y) dy - \int_a^{x-\delta} f(y) dy - \alpha(x-\delta-a) \geq \int_a^x f(y) dy - \int_a^x f(y) dy - 2M\delta - \alpha(x-a) + \alpha\delta$$

$$h_\alpha(x-\delta) \geq h_\alpha(x) - 2M\delta + \alpha\delta > 0.$$

Isso contradiz o fato de x ser limitante inferior.

2º caso: $h_\alpha(x) \leq 0$

Como a função possui limite à direita em todos os pontos,

temos $\lim_{t \rightarrow x_+} f(t) = L \in \mathbb{R}$.

Tomamos δ , $0 < \delta < b-x$ tal que $|f(t)-L| < \frac{1}{2}\alpha$ para $0 < t-x < \delta$.

Assim, $-\frac{1}{2}\alpha + L < f(t) < \frac{1}{2}\alpha + L$ para $x < t < x+\delta$.

Para continuarmos a análise de h_α , façamos $f(x) = L$. Isto altera a função em um só ponto, o que não afeta as integrais superiores e inferiores.

Com isso, teremos:

$$\int_a^t f(y)dy = \int_a^x f(y)dy + \int_x^t f(y)dy \leq \int_a^x f(y)dy + (L + \frac{1}{2}\alpha)(t-x)$$

$$-\int_a^t f(y)dy = -\int_a^x f(y)dy - \int_x^t f(y)dy \geq -\int_a^x f(y)dy - (L - \frac{1}{2}\alpha)(t-x)$$

Então,

$$h_\alpha(t) \leq \int_a^x f(y)dy + (L + \frac{1}{2}\alpha)(t-x) - \left[-\int_a^x f(y)dy - (L - \frac{1}{2}\alpha)(t-x) \right] - \\ - \alpha(t-a) = h_\alpha(x) \leq 0.$$

Isso contradiz o fato de x ser o maior limitante inferior.

Assim, ficou provado que $h_\alpha(b) \leq 0$, $\forall \alpha > 0$ e portanto f é

Riemann-integrável.

Referência:

Metzler, R.C. On Riemann Integrability: American Mathematical Monthly. 78(10): 1129: 1131, 1971.