DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA

Relatório Técnico

RT-MAP-9202

ESTABILIDADE DE LIAPUNOFF E K-DECIDIBILIDADE

Manuel V. de Pera Garcia

Dezembro/92

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
SÃO PAULO — BRASIL

Sumário

Capítulo 0
O Problema

Em 1992 foi provado por Palamodov (P0) que para um sistema Hamiltoniano conservativo de n graus de liberdade com energia cinética T e energia potencial π, *analíticas*, vale a recíproca do Teorema de Dirichlet–Lagrange, isto é, se π tiver um ponto crítico q_0 e este não for um ponto de mínimo da energia potencial então o ponto de equilíbrio $(q_0;O)$ das equações do movimento do sistema é instável segundo Liapunoff.

Em 1990 Moaro e Negrine provaram um resultado que mostra que, *sem hipótese de analiticidade*, quando π é de classe C^m e $\pi(q) = \pi_m(q - q_0) + R(q - q_0)$, onde π_m é um polinômio homogêneo de grau $m \geq 2$ que não tem mínimo em O e $\lim_{q \to q_0} \frac{R(q)}{\|q-q_0\|^m} = 0$ então outra vez o ponto de equilíbrio $(q_0;O)$ das equações do movimento do sistema é instável segundo Liapunoff (veja (MN0)).

Em ambos os resultados acima a instabilidade decorre da existência de uma trajetória assintótica para $(q_0;O)$.

Assim no chamado *problema da inversão do Teorema de Dirichlet–Lagrange* a situação em que $\pi(q) = P(q - q_0) + R(q - q_0)$, onde P é um polinômio *não homogêneo* de grau menor ou igual a m *que garante que π não tem mínimo em q_0* e $\lim_{q \to q_0} \frac{R(q)}{\|q-q_0\|^m} = 0$, parece ser um dos passos seguintes a (tentar) ser atacado.

Este trabalho analisa este problema *no contexto de dois graus de liberdade*.

Procura-se primeiro expressar rigorosamente o sentido da expressão *"que garante que π não tem mínimo em q_0"* através do conceito de k–decidibilidade introduzido por Barone–Netto em (B0) (Capítulo 1) e depois obter resultados de instabilidade em certos casos desta situação (Capítulos 3 e 4).

Uma ferramenta nova que é aqui introduzida no Capítulo 2 é o conceito de *poligonal de Newton modificada* que parece ter bastantes possibilidades de ser usada com sucesso neste e em problemas de caracterização de pontos críticos de funções de duas vaiáveis, como se faz em (G0).

Num certo sentido este trabalho é um resumo do esforço de um grupo de professores do Departamento de Matemática Aplicada do IME no problema da inversão do Teorema de Dirichlet–Lagrange. Neste aspecto seria injusto não citar o papel de liderança de Ângelo Barone–Netto nesse grupo, bem como omitir a colaboração dos colegas Sônia R.L. Garcia e Tomas N. Lay.

Capítulo 1

Elementos de k–Decicibilidade

§1.0 - Introdução: Este capítulo compõe–se, além desta introdução, de mais dois parágrafos.

No primeiro deles são expostos as definições e as propriedades básicas de k-decidibilidade necessárias ao resto do trabalho. Procurou–se ser o mais econômico possível, no sentido de serem apresentadas apenas as propriedades que vierem a ser efetivamente usadas neste texto. Para uma abordagem mais ampla deste assunto o leitor pode consultar (B0), que aliás é onde está pela primeira vez definida a noção de k–decidibilidade, e também (G0), onde é analisado com mais detalhe a questão de k–decidibilidade em $\mathbb{R}^2$.

No parágrafo 1.2 são enunciados sem demonstração dois resultados acerca de curvas algébricas planas bastante clássicos. Este é o único ponto deste trabalho em que se lança mão de resultados não explicitamente provados, uma referência para as provas é (W0).

§1.1 - Noções Básicas de k–Decicibilidade Seja $\Omega = \mathring{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ com $O \in \mathbb{R}^n$.

Definição 1.0: *Uma função $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tem jato punctual de ordem k em O ($k \in \mathbb{N}^*$) se existe um polinômio $P: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de grau menor ou igual a k tal que* $\lim\limits_{x \to O} \frac{f(x)-P(x)}{\|x\|^k} = 0$.

É claro que tal polinômio quando existe é único e, sempre que f tiver polinômio de Taylor de ordem k na origem este será também o jato punctual de ordem k de f em O.

O jato punctual de ordem k de f em O será denotado por $j^k f$ e será muitas vezes chamado simplesmente jato k de f.

Relativamente a extremos, f pode ter na origem um dos seguintes comportamentos:

(A) f tem mínimo local estrito em O.

(B) f tem máximo local estrito em O.

(C) f não tem máximo nem mínimo local em O, neste caso diremos que O é um ponto de sela de f.

(D) f tem mínimo local estritamente fraco em O (i.e. existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in B_\epsilon$ e existe uma seqüência (x_k) de elementos não nulos tal que $x_k \to O$ e $f(x_k) = 0$).

(E) f tem máximo local estritamente fraco em O (i.e. $-f$ tem mínimo local estritamente fraco em O).

Se f não for identicamente nula é imediato que apenas uma das situações apresentadas pode ocorrer.

Dir–se–á que f e g tem **mesmo comportamento quanto a extremo em** O se f e g estiverem ambas no mesmo ítem dos apresentados acima.

O conceito seguinte introduzido por A. Barone-Netto em 1980 é a ferramenta básica para os resultados obtidos.

Definição 1.1: *A função f é dita k–***decidível** *se*

(i) f tiver jato k em O.

(ii) Para toda $g: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $j^k f = j^k g$, tem–se que f e g tem mesmo comportamento quanto a extremo em O.

Observação 1.0: Uma pequena variação deste conceito que será também utilizado é o de $j^k f$ **mostrar que** f **não tem mínimo em** O. Com isto quer-se dizer que f tem jato punctual de ordem k em O e, para toda a função $g: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $j^k f = j^k g$ tem-se que g **não tem mínimo (nem estritamente fraco) em** O.

Um fato de fácil comprovação é que f é k-decidível se, e só se, $j^k f$ for k-decidível.
Exemplos: (i) Na reta o conceito de k-decidibilidade resume-se ao seguinte fato, se $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem algum jato não nulo em 0 e k é a ordem do primeiro jato não nulo de f então f é k-decidível.

(ii) $f(x;y) = x^2 - y^4$ é quatro decidível. Basta estudar o comportamento de $j^4 f$ (que no caso é igual a f) nos eixos coordenados.

(iii) $f(x;y) = (y - x^2)^2 + y^4$ não é sete decidível. Para comprovar esta afirmação, tome $g(x;y) = f(x;y) - 2x^8$ e estude g na parábola $y = x^2$ para ver que f e g não tem mesmo comportamento quanto a extremo em O, já que enquanto f tem mínimo estrito em O, $g(x;x^2) = -x^8$, o que mostra que g tem sela em O. Pode-se mostrar que f é 8-decidível, uma prova disto encontra-se em (G0).

(iv) $f(x;y) = y^2 - 2x^2y$ tem uma sela em O, é 4-decidível mas não é 3-decidível. Para ver isto observe que $f(0;y) = y^2$ e $f(x;x^2) = -x^4$, logo f tem sela em O. Também é evidente a partir desta observação que, se $j^4 R = 0$, então a função $h = f + R$ restrita ao eixo dos y tem mínimo estrito na origem enquanto $h(x;x^2)$ tem um máximo estrito em $x = 0$. Isto estabelece que f é 4-decidível. Para ver que f não é 3-decidível, basta notar que $j^3(y - x^2)^2 = f$ e evidentemente $g(x;y) = (y - x^2)^2$ não tem sela em O.

O primeiro resultado do texto necessita da definição de cone fechado de vértice na origem, que é dada a seguir.
Definição 1.2: *Um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ é um* **cone de vértice** O *se para todo $(x;\lambda) \in A \times \mathbb{R}^+$ tem-se $\lambda x \in A$. Se A for um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ o cone diz-se fechado e se $A \setminus \{O\}$ for um aberto não vazio de $\mathbb{R}^n$ dir-se-á que A é um* **cone aberto.**

Fato 1.0: *Seja $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ um polinômio homogêneo de grau p e seja K um cone fechado de vértice na origem tal que $f(x) > 0$, para todo $x \in K \setminus \{O\}$. Então, se $R: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função que possui jato de ordem p em O e $j^p R = 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(f + R)(x) > 0$, quando $x \in (K \cap B_\varepsilon) \setminus \{O\}$.*
Dem.: Considere o compacto $K_1 = K \cap S_1$.

Dessa compacidade e das hipóteses vem que $\min\{f(x): x \in K_1\} = m > 0$.

Use agora que $j^p R = 0$ para conseguir $\varepsilon > 0$ tal que $|R(x)| \leq \frac{m}{2}\|x\|^p$, para $x \in B_\varepsilon$.

Como K é cone de vértice O vem que, para $x \in (K \cap B_\varepsilon) \setminus \{O\}$ podemos tomar $v = \frac{x}{\|x\|} \in K_1$. Usando então a homogeneidade de f e a desigualdade acima para calcular $(f + R)(x)$, vem

$$(f + R)x = f(x) + R(x) = (f(v) + \frac{R(x)}{\|x\|^p})\|x\|^p > (m + \frac{R(x)}{\|x\|^p})\|x\|^p.$$

Lembrando que $\frac{|R(x)|}{\|x\|^p} \leq \frac{m}{2}$ resulta que $(f + R)(x) > 0$ estabelecendo a tese. ■

Em termos de k-decidibilidade este resultado tem uma conseqüência importante que afirma que em regiões onde o primeiro jato não nulo de uma função não se anula, este determina o sinal da própria função. Isto fica precisamente enunciado pelo corolário seguinte.

Corolário 1.0.0: *Seja $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui jato punctual de ordem s em O e suponha que $j^s f$ seja homogêneo. Então se K é um cone fechado de vértice O e $j^s f(x) \neq 0$, para todo $x \in K \setminus \{O\}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x)$ tem o mesmo sinal de $j^s f(x)$ qualquer que seja $x \in (K \cap B_\epsilon) \setminus \{O\}$.*

Dem.: Isto é uma aplicação imediata do Fato 1.0. ■

Deste ponto em diante passa-se a trabalhar no caso $n = 2$.

Como se viu no Fato 1.0 e seu corolário o primeiro jato não nulo de f tem grande importância para o estudo de k-decidibilidade. O fato seguinte, totalmente óbvio, descreve os conjuntos que são "zeros" de polinômios homogêneos de $\mathbb{R}^2$.

Fato 1.1: *Se $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} = \sum_{\ell=0}^{p} a_\ell x^{p-\ell} y^\ell$ é um polinômio homogêneo de grau $p \geq 1$ então $Z_f = f^{-1}(\{O\})$ é formado apenas por O ou é constituído por um número finito de retas todas passando pela origem.*

Dem.: Como $p \geq 1$ é claro que $\{O\} \subseteq Z_f$ e que $f \neq 0$.

Se f tem extremo estrito em O é claro que $Z_f = \{O\}$.

Da homogeneidade de f vem que se $f(q) = 0$ tem-se $f(\lambda q) = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Isto mostra que, quando $Z_f \neq \{O\}$, este conjunto é uma reunião de retas passando por O.

Para ver que há apenas um número finito de retas que podem estar em Z_f veja que f se anula na reta $y = \alpha x$ se, e apenas se, α é raiz de $P(\lambda) = \sum_{\ell=0}^{p} a_\ell \lambda^\ell$.

Como $f \neq 0$ tem-se que P não é o polinômio nulo e portanto tem um número finito de raízes reais. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ essas raízes.

É claro então que f nas retas $y = \alpha_j x$ e, eventualmente, na reta $x = 0$. ■

O corolário 1.0.0 e o Fato 1.1 podem sugerir que se $j^k f$ não se anula em nenhuma reta que passe por O então f é k-decidível. O exemplo (iii) apresentado antes, onde $f(x;y) = (y - x^2)^2 + y^4$ mostra que isto é falso, pois $j^4 f$ tem mínimo estrito em O e f não é nem 7-decidível.

Uma propriedade deste tipo é entretanto verdadeira em $\mathbb{R}^2$ quando $j^k f$ é a soma de polinômios homogêneos semi-definidos. Uma vez que a mencionada propriedade será útil no futuro ela está explicitada no Fato 1.2, antes porém será necessário apresentar mais uma definição que também será valiosa posteriormente.

Definição 1.3: *Sejam $\Omega = \mathring{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ com $O \in \Omega$ e $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função que tem jato de ordem k em O.*

Para $1 \leq r \leq k$ define-se a parte homogênea de ordem r do jato k de f como $f_r = j^r f - j^{r-1} f$.

Perceba que f_r ou é identicamente nulo ou é um polinômio homogêneo de grau r.

Agora a propriedade anunciada.

Fato 1.2: *Suponha que Ω é uma vizinhança aberta de O e que $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tem jato punctual de ordem r em O e que o primeiro jato não nulo de f é o de ordem $s \leq r$. Admita ainda que $f_j(q) \geq 0$, para $s \leq j \leq r$ e $q \in \mathbb{R}^2$. Então são equivalentes:*

(A) f é r–decidível.

(B) $j^r f|_\ell$ tem mínimo estrito para toda reta ℓ passando por O.

Dem.: É claro que, como $j^k f = \sum_{j=s}^{k} f_j$ então $f(q) \geq 0$, para todo q.

Assim é imediato que (A) implica (B).

Vai-se provar agora que (B) implica (A).

Admita portanto (B).

Veja que $f_s = j^s f$ é um polinômio homogêneo de grau $s \geq 1$.

Faça $Z = (j^s f)^{-1}(\{O\})$ e aplique o Fato 1.1 para ver que existem duas possibilidades, ou $Z = \{O\}$ ou Z é uma reunião de um número finito de retas passando por (A). Estes casos serão estudados separadamente.

• Se $Z = \{O\}$ então vem que $j^s f$ tem extremo estrito em O.

Assim, como $j^r f = j^s f + \sum_{j=s+1}^{r} f_j$ e $f = j^s f + R$, com $j^s R = 0$, fazendo duas aplicações do Corolário 1.0.0 conclui-se que vale (B) e que f é s–decidível. E como $s \leq r$ isto implica que f é r–decidível.

Logo, nesta situação, (A) e (B) sempre ocorrem e portanto o resultado segue-se.

•• Suponha agora que Z é uma reunião finita de retas $\ell_1, \ldots, \ell_p$, todas passando por O e (B) vale.

Fixe $k \in \{1, \ldots, p\}$. Como $(j^r f)|_{\ell_k} = \sum_{j=s}^{r} (f_j)|_{\ell_k}$ tem mínimo estrito em O e $f_j(q) \geq 0$, para todo $q \in \ell_j$, existe algum $m \in s, \ldots, k$ tal que $f_m|_{\ell_j}$ tem mínimo estrito em O.

Seja $m(k)$ o menor desses naturais.

Perceba que $s + 1 < m(k) \leq r$ e que se $k_0 = \max\{m(i): 1 \leq i \leq p\}$ então segue-se de (B) que $j^k f$ tem mínimo estrito (até global) em O, para todo $k_0 \leq k \leq r$.

Para completar a prova deve-se tomar $h: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $j^r h = 0$ e mostrar que $j^r f + h$ tem mínimo local estrito em O.

Para isso primeiramente considere para cada $j \in \{1, \ldots, p\}$ tome um cone aberto C_j tal que:

(I) $\ell_j \subset C_j$;

(II) $C_j \cap \ell_i = \{O\}$, se $i \neq j$; e

(III) Se $m(j)$ é o inteiro definido antes então $f_{m(j)}(q) > 0$, para todo $q \in \overline{C_j} \setminus \{O\}$ (veja que, como $f_{m(j)}$ é um polinômio homogêneo de grau $m(j)$, o Fato 1.1 garante poder-se escolher C_j com esta propriedade).

Faça $C = \cup_{j=1}^{p} C_j$ e $K = (\mathbb{R}^2 \setminus C) \cup \{O\}$.

Perceba que C e K são cones de vértice na origem, sendo que o primeiro é aberto e o segundo fechado.

Além disso se (B) vale então para todo $q \in K \setminus \{O\}$ tem-se $j^s f(q) > 0$.

Como $j^s f$ é homogêneo o Fato 1.0 mostra que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$(j^r f + h)(q) \geq (j_s f + h)(q) > 0,$$

para todo $q \in (K \cap B_{\varepsilon_0}) \setminus \{O\}$.

Fixe agora $j \in \{1,\dots,p\}$ e tome o cone fechado de vértice na origem $K_j = \overline{C_j}$.

Use (B), (III) e o Fato 1.0 e conclua que existe $\varepsilon_j > 0$ tal que, se $q \in (K_j \cap B_{\varepsilon_j}) \setminus \{O\}$ então

$$(j^r f + h)(q) \geq (f_{m(j)} + h)(q) > 0.$$

Tome $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_p\}$ e veja que se $0 < \|q\| < \varepsilon$ tem-se $(j^r f + h)(q) > 0$. ■

§1.2 – Curva de mínimos: Nesta secção são discutidos alguns aspectos naturalmente ligados a k-decidibilidade e é introduzida a noção de curva de mínimos de um polinômio.

Definição 1.4: *Sejam ε e λ reais estritamente positivos e $h: [0;\varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}$, com $h(0) = 0$. Diz-se que h* **tem ordem λ** *em $0+$ se $\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{h(x)}{|x|^\lambda} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{h(x)}{|x|^\lambda} = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ então dir-se-á que h* **tem ordem $+\infty$** *em $0+$.*

Observação 1.1: É evidente que se h tem ordem λ então esta função tem um extremo local estrito em $0+$ e tem mínimo se, e só se $\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{h(x)}{|x|^\lambda} > 0$.

Observação 1.2: Veja que se a ordem de h em $0+$ é λ e $0 < \alpha < \lambda < \omega$ então $\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{h(x)}{|x|^\alpha} = 0$ e $\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{h(x)}{|x|^\omega} = \pm\infty$.

Definição 1.5: *Sejam $\Omega = \mathring{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Considere $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon \subseteq \Omega$ e defina as funções f_+ e f_- como:*

$$\begin{aligned} f_+: [0;\varepsilon] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto \max\{f(x): \|x\| = r\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_-: [0;\varepsilon] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto \min\{f(x): \|x\| = r\} \end{aligned}$$

Esta definição sugere o seguinte esquema para ver se uma função $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que tem jato punctual de ordem k em O é ou não k-decidível: Considerar as funções $(j^k f)_+$ e $(j^k f)_-$ e ver qual a ordem destas em $0+$, caso estas ordens sejam menores ou iguais a k então f é k-decidível.

De fato, esta é uma condição necessária e suficiente para a k-decidibilidade (a bem da verdade deve-se dizer que este é um dos resultados de Barone-Netto em (B0)), mas neste trabalho não será necessário estabelecer senão um caso particular deste resultado, antes porém de estabelece-lo, vai-se discutir um pouco acerca de $(j^k f)_+$ e $(j^k f)_-$ ou, mais geralmente, f_+ e f_- no caso em que f é polinômio.

Veja que quando $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é um polinômio pode-se considerar o conjunto

$$V(f) = \left\{ q \in \mathbb{R}^2 \colon \text{posto} \begin{bmatrix} q \\ \nabla f(q) \end{bmatrix} \right\}^{(\dagger)}.$$

(†) No seu trabalho supracitado Barone-Netto define $V(f)$ como sendo este conjunto *sem* a origem, tal coisa não faz a mais mínima diferença, espero que o inventor deste conjunto me perdoe a pequena modificação.

Fato 1.3: *$V(f)$ é um subconjunto algébrico ao qual a origem pertence e não é um ponto isolado.*
Dem.: Como $V(f) = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 0\right\}$ é claro que este é um conjunto algébrico e $O \in V(f)$.

A útima afirmação decorre do fato de

$$V(f) \setminus \{O\} = \cup_{r>0} \{q \in S_r : q \text{ é ponto crítico de } f|_{S_r}\}$$

e da compacidade de S_r. ∎

É neste ponto que serão usados dois resultados dos quais se omitem as demonstrações (os Fatos 1.4 e 1.8). O leitor pode consultar (W0), ou seu texto favorito sobre curvas algébricas (planas), para ver as provas.

Fato 1.4: *Seja A um um subsconjunto algébrico do $\mathbb{R}^2$ tal que $O \in \overline{A \setminus \{O\}}$. Então uma das seguintes possibilidades ocorre:*

(i) $A = \mathbb{R}^2$.

(ii) Existe um $\varepsilon > 0$ tal que $A \setminus \{O\} \cap B_\varepsilon = \Gamma_1 \cup \ldots \Gamma_r$ onde, para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, Γ_j é a imagem de uma curva analítica $\tilde{\gamma}_j : (0;\sigma_j) \longrightarrow B_\varepsilon$.

Além disso, se $i \neq j$ então $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ e, para $1 \leq j \leq r$, a curva $\tilde{\gamma}_j$ admite uma extensão analítica γ_j a $[0;\sigma_j)$ definida por

$$\gamma_j(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}_j(t) & se\ t > 0 \\ O & se\ t = 0 \end{cases} .$$

Uma parametrização das componentes conexas de $A \setminus \{O\}$, quando $\{O\} \neq A \neq \mathbb{R}^2$ extremamente cômoda é dada pelo resultado seguinte:

Fato 1.5: *Seja $P: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ um polinômio e $A = P^{-1}(\{O\})$ e suponha que $O \in \overline{A \setminus \{O\}}$ e $A \neq \mathbb{R}^2$.*

Então as curvas γ_j da decomposição de $(A \setminus \{O\}) \cap B_\varepsilon$ dadas no Fato 1.4 que são tangentes ao semi-eixo dos x positivos em $0+$ podem ser parametrizadas como $y = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p x^{\alpha_p}$, onde (α_p) é uma seqüência de racionais com $\alpha_1 > 1$.

Dem.: Consulte, por exemplo, (W0). ∎

Observação 1.3: Perceba que o caso em que γ_j é o semi-eixo dos x positivos está previsto no Fato 1.5 fazendo $a_p = 0$, para todo $p \in \mathbb{N}^*$.

Observação 1.4: A parametrização de γ_j dada pelo Fato 1.5 será doravante chamada **parametrização canônica da curva algébrica γ_j.**

Usando estes resultados vão se obter alguns resultados úteis.

Fato 1.6: *Seja $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ um polinômio.*

Existem reais estritamente positivos ε, λ e uma curva analítica $\gamma_- : [0;\lambda] \longrightarrow B_\varepsilon$ tais que $\gamma_-(0) = O$ e $f(\gamma_-(t)) = f_-(\|\gamma_-(t)\|)$, para $t \in [0;\sigma]$.

Dem.: Considere o conjunto $V(f)$.

Se $V(f) = \mathbb{R}^2$ então f é constante nas circunferências de centro O e o resultado segue-se trivialmente, por exemplo, tomando $\gamma_-(t) = (t;0)$, $t \geq 0$.

Caso contrário, considere a decomposição de $V(f) \setminus \{O\}$ dada no Fato 1.4.

Pode-se escolher $\sigma > 0$ suficientemente pequeno para que as curvas analíticas γ_j se definam em $[0;\sigma]$ e $\langle\gamma_j(t)|\dot{\gamma}_j(t)\rangle \neq O$, para $0 < t < \sigma$ (lembre que $\gamma_j(t) \neq O$ se $t > 0$ e γ_j é analítica).

Além disso, escrevendo γ_j em série de potências vem, para $t \geq 0$, $\gamma_j(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p^j t^{m_p^j}$, onde $a_p^j \in \mathbb{R}^2$, para $p \geq 1$ e $a_1^j \neq O$.

Assim, considerando para $j \in \{1,\ldots,r\}$, $\delta_j = \|\gamma_j(\sigma)\|$ a função $\psi_j: [0;\sigma] \longrightarrow [0;\delta_j]$ dada por $\psi_j(t) = \|\gamma_j(t)\|$, tem-se $\psi_j(t) = \|a_1^j\| t^{m_p^j}(\sqrt{1+h_j(t)})$, com h_j uma função analítica que satisfaz $h_j(0) = 0$. Dessa forma ψ_j é um homeomorfismo analítico estritamente crescente em $[0;\sigma_j]$.

Tem-se então que, diminuindo eventualmente σ, $\psi_j(t) = (w(t))^{m_1^j}$, onde w é uma função analítica com deridada diferente de zero no intervalo fechado não degenerado $[0;\sigma]$, o que implica ser w^{-1} analítica.

Dessa forma vê-se que $(\psi_j)^{-1} = (w^{-1} \circ (\psi_j)^{\frac{1}{m_1^j}})$. Portanto, como w^{-1} e ψ_j são analíticas resulta que $(\psi_j)^{-1}$ pode-se escrever como um série de potências de expoentes racionais, convergente, $(\psi_j)^{-1}(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} b_p t^{r_p}$, onde (r_p) é uma seqüência de racionais estritamente crescente (veja que eventualmente, $r_1 < 1$).

Como f é polinômio e γ_j é analítica, resulta que $\widehat{f}_j = f \circ \gamma_j \circ (\psi_j)^{-1}$ pode ser expressa como uma série convergente $\widehat{f}_j(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n s^{q_n}$, onde (q_n) é uma seqüência de racionais estritamente crescente.

Desse modo vê-se que existem $\delta > 0$ e $m \in \{1,\ldots,r\}$ tais que, todas as $\widehat{f}_j$ se definem em $[0;\delta]$ e $\widehat{f}_m(s) \leq \widehat{f}_j(s)$ para $s \in [0;\delta]$ e $j \in \{1,\ldots,r\}$.

Faça $\gamma = \gamma_m$, $\lambda = (\psi_m)^{-1}(\delta)$ e $\varepsilon = \delta$ para obter de pronto a tese. ∎

Corolário 1.6.0: *Se estão verificadas as hipóteses do Fato 1.6, então a ordem de f_- em $0+$ é μ se, e só se,* $\lim_{t\to 0+} \frac{f(\gamma_-(t))}{\|\gamma_-(t)\|^\mu} \in \mathbb{R} \setminus \{O\}$.

Dem.: Basta ver que, pelo Fato 1.6, para todo $\lambda > 0$, $\lim_{t\to 0+} \frac{f(\gamma_-(t))}{\|\gamma_-(t)\|^\lambda} = \lim_{q\to O} \frac{f_-(q)}{\|q\|^\lambda}$. ∎

Definição 1.6: *Seja $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ um polinômio. Cada uma das curvas γ_- determinadas no Fato 1.6 é chamada* **curva de mínimos de f em O**, *ou simplesmente,* **curva de mínimos de f.**

Agora vai-se trabalhar, pela primeira vez, com o conceito de $j^k f$ mostrar que f não tem mínimo em O (veja a observação 1.0 após a definição de k-decidibilidade).

Fato 1.7: *Seja $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui jato punctual de ordem k em O então são equivalentes:*

(A) $j^k f$ mostra que f não tem mínimo em O.

(B) Se $\gamma_-: [0;\sigma] \longrightarrow \Omega$ é uma curva de mínimos de $j^k f$ então $\lim_{t\to 0+} \frac{j^k f(\gamma_-(t))}{\|\gamma_-(t)\|^k} \in \mathbb{R}_*^- \cup \{-\infty\}$.

(C) A ordem de $(j^k f)_-$ em 0+ é menor ou igual a k e esta função tem máximo estrito em 0+.

Dem.: Pelo Coroláro 1.6.0 é claro que (B) e (C) são equivalentes.

Também é óbvio que se (C) vale e $h: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tem jato de ordem k em O nulo então, pelo Corolário 1.6.0, $(j^k f + h) \circ \gamma_-$ tem máximo estrito em 0+ (de ordem igual à de $(j^k f) \circ \gamma_-$). Isto mostra que (B) ou (C) implicam (A).

Resta provar que (A) implica (B).

Admita então que (A) ocorre.

Tome $\delta > 0$ tal que γ_- corta todas as circunferências de centro O e raio menor do que δ exatamente uma vez.

De (A) vem que $j^k f \circ \gamma_-$ tem máximo estrito em O, pois $j^k f$ não tem mínimo em O.

Além disso, como $j^k f$ e γ_- são analíticas então $(j^k f) \circ \gamma_-$ é analítica e, como se viu, tem máximo estrito em 0+. Portanto podem-se concluir duas coisas:

(I) $(j^k f) \circ \gamma_-$ tem ordem $\mu \in \mathbb{N}^*$.

(II) $\lim\limits_{t \to 0+} \frac{j^k f(\gamma_-(t))}{\|\gamma_-(t)\|^k}$ ou é um número real $\rho \leq 0$, ou é $-\infty$.

Para encerrar a prova deve-se mostrar que não pode acontecer em (II) o caso $\rho = 0$.

Suponha então, por redução ao absurdo, que $\rho = \lim\limits_{t \to 0+} \frac{j^k f(\gamma_-(t))}{\|\gamma_-(t)\|^k} = 0$.

Escrevendo $\gamma_-(t) = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} a_p t^{m_p}$, onde $a_p \in \mathbb{R}^2$ e $a_1 \neq O$ vem $\|\gamma_-(t)\| = \|a_1\| t^{m_1} \varphi(t)$ onde φ é uma função analítica com $\varphi(0) = 1$.

Assim a ordem de $\|\gamma_-(t)\|^k$ em 0+ é $k m_1$.

Da hipétese de absurdo vem que $k m_1 < \mu$, Portanto pode-se escolher $k m_1 < \sigma < \mu$. Veja que $k < \sigma$ e de (I) resulta $\lim\limits_{t \to 0+} \frac{j^k f(\gamma_-(t))}{\|\gamma_-(t)\|^\sigma} = 0$.

Portanto, eventualmente diminuindo um pouco δ, pode-se supor que:

(III) $-\frac{1}{2} < \frac{j^k f(\gamma_-(t))}{\|\gamma_-(t)\|^\sigma} < 0$.

Considere $g(q) = j^k f(q) + \|q\|^\sigma$.

É claro que $j^k g = j^k f$.

Por (A) tem-se que g não tem mínimo, nem estritamente fraco, em O. Portanto existe uma seqüência $q_n \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ convergente para O tal que $g(q_n) < 0$. Sem perda de generalidade suponha que $\|q_n\| < \min\{\delta, 1\}$.

Portanto $j^k f(q_n) < 0$ e $|j^k f(q_n)| > \|q_n\|^\sigma$, de onde se conclui que:

(IV) $\frac{j^k f(q_n)}{\|q_n\|^\sigma} < -1$.

Tome agora $y_n = \gamma_-(t_n)$ tal que $\|y_n\| = \|q_n\|$ (como $\|q_n\| < \delta$ sempre há exatamente um ponto nessas condições) e use (III) e (IV) para y_n e q_n respectivamente concluindo que $j^k f(q_n) < j^k f(y_n)$.

Mas esta desigualdade contraria o fato de γ_- ser uma curva de mínimos de $j^k f$, o que mostra que ρ não pode ser zero. ■

Usando os resultados precedentes conclui-se também que:

Fato 1.8: *Seja $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ um polinômio que não tem mínimo em O e suponha que γ_- é uma curva de mínimos de f tangente ao semi-eixo dos x positivos em 0+. Então a ordem de $f \circ \gamma_-$ é igual à ordem de f_-.*

Dem.: Tome a parametrização canônica de γ_- dada no Fato 1.5, $\gamma_-(x) = (x; \sum_{p=1}^{+\infty} a_p x^{\alpha_p})$, onde (α_p) é uma conveniente seqüência crescente de racionais com $\alpha_1 > 1$, e veja que $\|\gamma_-(x)\| = x(\sqrt{1 + h(x)})$, com h contínua e $h(0) = 0$.

Assim a ordem de $\|\gamma_-\|$ em $0+$ é 1.

Como f é um polinômio e $f \circ \gamma_- \neq 0$ (pois f não tem mínimo) vem que $f \circ \gamma_-$ tem ordem finita μ e portanto $\lim_{x \to 0+} \frac{\gamma_-(x)}{x^\mu} \in \mathbf{R} \setminus \{O\}$.

Logo $\lim_{x \to 0+} \frac{\gamma_-(x)}{\|\gamma(x)\|^\mu} \in \mathbf{R} \setminus \{O\}$ e o resultado segue-se do Corolário 1.6.0. ■

Um comentário que também vai ter sua utilidade mais tarde é que se γ_- é uma curva de mínimos de f e R é uma rotação de $\mathbf{R}^2$ então $R \circ \gamma_-$ é uma curva de mínimos de $f \circ R^{-1}$.

Capítulo 2
Uma Ferramenta Auxiliar

§2.0 - Introdução: Este capítulo introduz os conceitos de reticulado de Newton e poligonal de Newton modificada de um polinômio de duas variáveis. Apesar de lembrar o clássico polígono de Newton estes instrumentos são, tanto quanto o autor saiba, novos.

§2.1 - Definições: Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ um polinômio de grau k tal que o primeiro jato não nulo de f tem grau $p < k$.

Escreva $f(x;y) = \sum_{(i,j)\in I} a_{ij}x^i y^j$, com a convenção usual de $a_{ij} \neq 0$, para todo $(i;j) \in I$.

Para $(i;j) \in I$ chame de ℓ_{ij} à semi-reta do plano $(\alpha;\beta)$ definida por $\beta = i + \alpha j$, $\alpha \geq 1$.

É claro que, com essa construção, elementos diferentes de I darão origem a diferentes semi-retas. Dessa forma é natural chamar $a_{ij}x^i y^j$ de monômio gerador de ℓ_{ij}.

Esta mesma observação mostra que a definição abaixo não é ambígua.

Definição 2.0: *Para $(i;j) \in I$ definir-se-á o* **sinal** *de ℓ_{ij} como sendo o sinal de a_{ij}. O símbolo $sg(\ell_{ij})$ indicará o sinal dessa semi-reta.*

Com isto pode-se passar às definições centrais deste capítulo.

Definição 2.1: *Define-se* **Reticulado de Newton** *de f como sendo o conjunto de pares ordenados $\mathcal{R} = \{(\ell_{ij};\ sg\,(\ell_{ij}))\colon (i;j) \in I\}$.*

Destaque-se o fato de que quando se disser que os reticulados de Newton de dois polinômios f e g são *iguais* isso significará que as semi-retas ℓ_{ij} de ambos são as mesmas e também que o *sinal* de cada uma dessas semi-retas é igual. Para uso futuro esta observação será formalizada através do fato seguinte.

Fato 2.0: *Sejam $f(x;y) = \sum_{(i;j)\in I} a_{ij}x^i y^j$ e $g(x;y) = \sum_{(u;v)\in J} b_{uv}x^u y^v$ polinômios. Então o reticulado de Newton de f é igual ao reticulado de Newton de g se, e apenas se, $I = J$ e, para todo $(i;j) \in I$, os sinais de a_{ij} e b_{ij} são iguais.*

Dem.: Decorre diretamente da definição. ■

Considere agora a poligonal $\mathcal{P}$ formada pelos pontos das semi-retas de $\mathcal{R}$ que estão mais próximos do eixo α. Veja que $\mathcal{P}$ é constituída pelos $(\alpha;\beta)$ do plano que satisfazem as duas condições abaixo:

(i) Existe $(i;j) \in I$ tal que $(\alpha;\beta) \in \ell_{ij}$; e

(ii) Se existem $(u;v) \in I$ e $\beta' \in \mathbb{R}$ tais que $(\alpha;\beta') \in \ell_{uv}$ então $\beta \leq \beta'$.

Veja que $\mathcal{P}$ é formada por um número finito de segmentos de reta e por uma semi-reta. Os vértices $Q = (\alpha;\beta)$ de $\mathcal{P}$ serão ordenados pela ordem crescente de suas abscissas e serão denotados por $Q_0, Q_1, \ldots, Q_r$. Chame $r_{\mathcal{P}}$ à semi-reta de $\mathcal{P}$.

Cada segmento Q_nQ_{n+1} de $\mathcal{P}$, $0 \leq n \leq r-1$, pertence a uma, e apenas uma, semi-reta ℓ_{ij} de $\mathcal{R}$.

Assim pode-se definir sem ambigüidade o **sinal do segmento** Q_nQ_{n+1} como sendo o sinal da semi-reta de $\mathcal{R}$ à qual ele pertence. De forma análoga será definido o **sinal da semi-reta de** $\mathcal{P}$.

Definição 2.2: *A* **poligonal de Newton modificada** *de f será a poligonal $\mathcal{P}$ onde os segmentos Q_nQ_{n+1}, $0 \leq n < r$, e a semi-reta $r_{\mathcal{P}}$ são considerados com seu sinal.*

Resulta claro desta definição que se f e g tem mesmo reticulado de Newton então também tem a mesma poligonal de Newton modificada.

Observação: Seja $j^p f$ o primeiro jato não nulo de f. Se $j^p f(x;0) \not\equiv 0$ então a poligonal de Newton modificada de f é formada por um único vértice, $Q_0 = (1;p)$ e pela semi-reta $\beta = p$, $\alpha \geq 1$, que tem o sinal do coeficiente de seu monômio gerador $a_{p0}x^p$. A única informação que $\mathcal{P}$ dá nesse caso é que se γ é uma curva definida em $[0;\sigma]$ que seja aderente ao semi-eixo dos x positivos em $0+$ então $f \circ \gamma$ tem extremo estrito em $0+$ e tem máximo se, e só se, $a_{p0} < 0$. No futuro não se estará interessado nessa situação trivial, por isso será sempre admitido que $j^p f(x;0) \equiv 0$.

§2.2 - Resultados: Os resultados apresentados neste capítulo são os estritamente necessários ao estabelecimento das propriedades de instabilidade do resto do trabalho. Um estudo mais completo e detalhado deste assunto pode ser encontrado em **(G0)**.

A pimeira propriedade enunciada é de tipo puramente combinatório.

Fato 2.1: *Sejam $Q = (\alpha;\beta), \alpha > 1$, um vértice da poligonal de Newton modificada de $f = \sum_{(i;j)\in I} a_{ij}x^i y^j$ e $I_Q = \{(u;v) \in I: u + \alpha v = \beta\}$ (ie, I_Q é o conjunto dos pares $(u;v)$ tais que ℓ_{uv} passa por Q) então:*

(A) Para cada $j \in \mathbb{N}$ existe no máximo um elemento $(u;v) \in I_Q$ tal que $v = j$.

(B) Se $(i_1;j_1)$ e $(i_2;j_2)$ estão em I_Q e $j_1 < j_2$ então $i_1 + j_1 > i_2 + j_2$.

Dem.: É imediata. O que vai ser feito é mais com o intuito de dar uma interpretação geométrica do significado de (A) e (B) do que apresentar uma demonstração disto (pelo menos para o ítem (B) há-as mais curtas).

Veja que a semi-reta ℓ_{ij} de $\mathcal{R}$ tem origem em $(1;i+j)$ e seu coeficiente angular é j.

Logo, como $\alpha > 1$, Q não é origem de nenhuma das semi-retas de $\mathcal{R}$. Isto mostra (A) uma vez que se duas semi-retas distintas de $\mathcal{R}$ que passem por Q tem origens distintas e não podem portanto ser paralelas.

Por outro lado, se $Q \in \ell_{(i_1j_1)} \cap \ell_{(i_2j_2)}$ e $j_1 < j_2$, isso implica que o coeficiente angular de $\ell_{(i_1j_1)}$ é menor do que o coeficiente angular de $\ell_{(i_2j_2)}$. Portanto, como $\alpha > 1$ a origem $(1;i_1+j_1)$ de $\ell_{(i_1j_1)}$ tem de estar acima da origem $(1;i_2+j_2)$ de $\ell_{(i_2j_2)}$. ■

O estudo subseqüente visa determinar o comportamento de f relativamente a extremo em curvas do tipo $y = \lambda x^\alpha$ onde $Q = (\alpha;\beta)$ é um vértice de $\mathcal{P}$ de abscissa maior do que 1. Para isso serão necessários dois novos conceitos introduzidos na definição seguinte.

Definição 2.3: *Seja $Q = (\alpha;\beta)$, $\alpha > 1$ um vértice da poligonal Newton modificada de $f = \sum_{(ij)\in I} a_{ij}x^i y^j$ com $\alpha > 1$ e considere $I_Q = \{(u;v) \in I: Q \in \ell_{uv}\}$. Chama-se* **polinômio de f incidente a Q**, *a* $M_Q(x;y) = \sum_{(i;j)\in I_Q} a_{ij}x^i y^j$.

O polinômio de uma variável real λ, $P_Q(\lambda) = \sum_{(i;j)\in I_Q} a_{ij}\lambda^j = M_Q(1;\lambda)$ será chamado **polinômio associado a f em Q.**

Note que se $P_Q(0) \neq 0$ então existe um $i \in \mathbb{N}^*$ tal que $(i;0) \in I_Q$. Portanto, neste caso, $Q = (\alpha;i)$ é vértice da semi-reta de $\mathcal{P}$ a qual é gerada pelo monômio $a_{i0}x^i$ e é paralela ao eixo das abscissas.

No que se segue será estabelecida a relação entre estes conceitos e k-decidibilidade.

Para aliviar notações fixar-se-ão um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, uma função $\pi: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que possui jato punctual de ordem k em O e cujo primeiro jato não nulo tem ordem $s < k$. Conforme a observação do final do parágrafo 2.1 supor-se-á que $j^s\pi(x;0) \equiv 0$ (note porém que nada impede que $j^k\pi(x;0) \not\equiv 0$).

Nessas condições o jato k de π será representado por $j^k\pi(x;y) = \sum_{(i,j)\in I} a_{ij}x^iy^j$ e $\mathcal{R}$ e $\mathcal{P}$ representarão respectivamente o reticulado e a poligonal de Newton modificada de $j^k\pi$.

Fato 2.2: *Sejam $Q = (\alpha;\beta)$ um vértice de $\mathcal{P}$, com $\alpha > 1$, $\beta \leq k$ e tome P_Q o polinômio associado a $j^k\pi$ em Q.*

Suponha que $P_Q(a) \neq 0$ e considere a curva definida para $x \geq 0$ por $\gamma(x) = (x;ax^\alpha + \sum_{q=1}^{+\infty} a_q x^{\mu_q})$, com (μ_q) uma seqüência de racionais estritamente crescente tal que $\mu_1 > \alpha$.

Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $0 < x < \varepsilon$, o sinal de $\pi(\gamma(x))$ ao sinal de $P_Q(a)$ que também é o sinal do polinômio de $j^k\pi$ incidente a Q.

Dem.: Escreva $\pi = j^k\pi + R$. É claro que $j^kR = 0$.

Considere $I_Q = \{(u;v) \in I: Q \in \ell_{uv}\}$, M_Q o polinômio incidente de $j^k\pi$ em Q e $g(x;y) = \sum_{(i;j)I\setminus I_Q} a_{ij}x^iy^j = j^k\pi - M_Q$.

Um cálculo imediato estabelece que $M_Q(x;ax^\alpha) = P_Q(a)x^\beta$, logo tem-se

$$\pi(x;ax^\alpha) = P_Q(a)x^\beta + g(x;ax^\alpha) + R(x;ax^\alpha),$$

e $\lim_{x\downarrow 0} \frac{g(x;ax^\alpha)}{|x|^\beta} = 0$.

Use agora que $\beta \leq k$ e $j^kR = 0$ para estabelecer que $\lim_{x\downarrow 0} \frac{|R(x;ax^\alpha)|}{|x|^\beta} = 0$.

Basta então ver que $\lim_{x\downarrow 0} \frac{\pi(x;ax^\alpha)}{x^{\beta}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{P_Q(a)x^\beta}{x^\beta} = P_Q(a)$ para estabelecer a tese. ■

Portanto vê-se que neste tipo de curva $\pi \circ \gamma$ tem extremo estrito em $0+$ e, ademais, este extremo é um máximo se, e apenas se, $P_Q(a) < 0$. Este fato terá grande importância no futuro.

Fato 2.3: *Seja $Q = (\alpha;\beta)$ um vértice da poligonal de Newton de $j^k\pi$, com $\alpha > 1$ e $\beta \leq k$.*

Se $\lambda_1 < \lambda_2$ são duas raízes de multiplicidade ímpar do polinômio P_Q associado a $j^k\pi$ em Q e $P_Q(\lambda) < 0$ em $]\lambda_1;\lambda_2[$ então existe $\sigma_0 > 0$ tal que, para todos $\varepsilon > 0$ e $0 < \sigma < \sigma_0$, o conjunto

$$A = \{(x;y) \in \Omega: 0 < x < \sigma,\ (\lambda_1 - \varepsilon)x^\alpha < y < (\lambda_2 + \varepsilon)x^\alpha\}$$

contém propriamente uma componente conexa U de $(\pi|_{B_\sigma})^{-1}(]-\infty;0[)$ que satisfaz $\bar{U} \setminus \{O\} \subset A$.

Dem.: Tome $\sigma_0 > 0$ tal que $B_{\sigma_0} \subseteq \Omega$ e veja que:

(i) Como λ_1 e λ_2 são raízes de multiplicidade ímpar de P_Q e este polinômio é estritamente negativo entre ambas existe $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ tal que $P_Q(\lambda_1 - \varepsilon_1) > 0$ e $P_Q(\lambda_2 + \varepsilon_1) > 0$.
(ii) Tomando $\lambda_1 < \lambda_* < \lambda$ vem da hipótese que $P_Q(\lambda_*) < 0$.
(iii) Usando (i), (ii) e o Fato 2.2 conclua a existência de $0 < \sigma < \sigma_0$ tal que, para $0 < x < \sigma$, tem-se $\pi(x;(\lambda_1 - \varepsilon_1)x^\alpha) > 0$, $\pi(x;(\lambda_2 + \varepsilon_1)x^\alpha) > 0$ e $\pi(x;\lambda_* x^\alpha) < 0$.
(iv) Faça agora $A = \{(x;y) \in \Omega: 0 < x < \sigma,\ (\lambda_1 - \varepsilon)x^\alpha < y < (\lambda_2 + \varepsilon)x^\alpha\}$ e perceba que a componente conexa de $(\pi|_{B_\sigma})^{-1}(]-\infty;0[)$ que contém a curva a curva $y = \lambda_* x^\alpha$, $0 < x < \sigma$, é um subconjunto de $B = \{(x;y) \in \Omega: 0 < x < \sigma,\ (\lambda_1 - \varepsilon_1)x^\alpha < y < (\lambda_2 + \varepsilon_1)x^\alpha\}$. Como $B \setminus \{O\} \subsetneq A$ segue-se a tese. ∎

Fato 2.4: *Seja $Q = (\alpha;\beta)$ um vértice da poligonal de Newton de $j^k\pi$, com $\alpha > 1$ e $\beta \le k$.*
Se $P_Q(\lambda) < 0$, para $\lambda \in [a;b]$, existem $\sigma_1 > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que $\pi(x;y) < 0$ para $(x;y) \in \{(x;y) \in \Omega: 0 < x < \sigma_1,\ (a - \varepsilon)x^\alpha < y < (b + \varepsilon)x^\alpha\}$.
Dem.: É claro que existe $\varepsilon > 0$ tal que $P_Q(\lambda) < 0$ em $[a - \varepsilon; b + \varepsilon]$. Portanto fazendo $m = \max\{P_Q(\lambda): \lambda \in [a - \varepsilon; b + \varepsilon]\}$ tem-se $m < 0$ e além disso:
(i) Se M_Q é polinômio incidente de $j^k\pi$ em Q vem que, para $\lambda \in [a - \varepsilon; b + \varepsilon]$ e $x > 0$, tem-se $M_Q(x;\lambda x^\alpha) = P_Q(\lambda)x^\beta \le m x^\beta$.

Escreva agora $g = j^k\pi - M_Q$ e $\pi = j^k\pi + R$ e observe que:
(ii) Por g ser um polinômio e $\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{g(x;\lambda x^\alpha)}{|x|^\beta} = 0$ segue-se $g(x;\lambda x^\alpha) = x^\gamma h(x;\lambda)$ com $\gamma > \beta$ e h uma função contínua.
(iii) Assim, decorre de (ii) que existe $\sigma_2 > 0$ tal que para $0 < x < \sigma_2$ e $\lambda \in [a - \varepsilon; b + \varepsilon]$ tem-se $|g(x;\lambda x^\alpha)| \le \frac{|m|}{4} x^\beta$.
(iv) Escolhendo $\sigma_3 > 0$ para que $(1 + \lambda^2 x^{2\alpha - 2})^k < 2$, quando $|x| < \sigma_3$, e usando que $j^k R = 0$ e $\beta \le k$ vem que, para $\lambda \in [a - \varepsilon; b + \varepsilon]$ e $|x| \le \sigma_3$,

$$|R(x;\lambda x^\alpha)| \le \frac{|m|}{4}\|(x;\lambda x^\alpha)\|^k = \frac{|m|}{4}|x|^k\left(\sqrt{1 + \lambda^2 |x|^{2\alpha-2}}\right)^k \le \frac{|m|}{2}|x|^\beta.$$

Assim, fazendo $\sigma_1 = \min\{\sigma_2;\sigma_3\}$ e lembrando que $m < 0$, segue-se de (i), (iii) e (iv) que, para $(x;\lambda) \in]0;\sigma_1[\times [a - \varepsilon; b + \varepsilon]$,

$$\pi(x;\lambda x^\alpha) = M_Q(x;\lambda x^\alpha) + g(x;\lambda x^\alpha) + R(x;\lambda x^\alpha) \le (m + \tfrac{|m|}{4} + \tfrac{|m|}{2})x^\beta < 0.$$

Evidentemente isto encerra a demonstração. ∎

O resultado seguinte tem caráter apenas técnico e será usado na prova do Fato 2.6.

Fato 2.5: *Suponha que π tem jato punctual de ordem k em O. Seja $\gamma(x) = (x; \sum\limits_{p=1}^{+\infty} a_p x^{\nu_p})$, $x \in [0;\sigma]$, uma curva de mínimos de $j^k\pi$, tal que (ν_p) é uma seqüência crescente de racionais com $\nu_1 > 1$ e $a_1 \neq 0$.*
Então o ponto Q_ν de $\mathcal{P}$ cuja abscissa é ν_1 é vértice de $\mathcal{P}$.
Dem.: Da equação de γ vem que esta curva é tangente em $0+$ ao semi-eixo dos x positivos.

Lembre que $j^k\pi = \sum\limits_{(i;j)\in I} a_{ij}x^i y^j$ e escreva $Q_\nu = (\nu_1;\nu_2)$.

Como Q_ν é o único ponto de $\mathcal{P}$ de abscissa ν_1 tem-se da definição de poligonal de Newton que, para todo $(u;v) \in I$, vale $u + \nu_1 v \ge \nu_2$.

A prova da proposição será feita por redução ao absurdo supondo que Q_ν não é um vértice de $\mathcal{P}$.

Então existiria um único $(u;v) \in I$ tal que $Q_u \in \ell_{uv}$.

Um cálculo directo mostra que, nestas condições, $(j^k\pi)\circ\gamma \neq 0$ tem extremo estrito em $0+$ e sua ordem é $\mu = u + \nu_1 v = \nu_2$.

Como está se supondo que Q_ν não é vértice de $\mathcal{P}$ pode-se escolher $\tau > 0$ suficientemente pequeno para que $(\nu_1 + \lambda; u + (\nu_1 + \lambda)v)$ também seja um ponto de $\mathcal{P}$ que não é vértice, para todo $-\tau \leq \lambda \leq \tau$.

Considere $\lambda \in [-\tau;\tau]$ e a curva $\gamma_\lambda(x) = (x; \sum_{j=1}^{+\infty} a_1 x^{\nu_1+\lambda})$, $0 \leq x \leq \sigma$.

Veja que $(j^k\pi)\circ\gamma_\lambda$ também tem extremo estrito em $0+$ e sua ordem aí é $u + (\nu_1 + \lambda)v$. Além disso, $(j^k\pi)\circ\gamma_\lambda$ e $(j^k\pi)\circ\gamma$ tem o mesmo tipo de extremo em $0+$.

Suponha agora que $(j^k\pi)\circ\gamma$ tem máximo em $0+$ e tome $-\tau \leq \lambda < 0$.

Então, $(j^k\pi)\circ\gamma_\lambda$ tem máximo em $0+$ de ordem $u + v(\nu_1 + \lambda) < \mu$. Isto contraria o fato de γ ser curva de mínimos de $j^k\pi$ e mostra que Q_ν é vértice de $\mathcal{P}$, neste caso.

Se $(j^k\pi)\circ\gamma$ tem mínimo em $0+$ tomando $0 < \lambda \leq \tau$ obtem-se o mesmo tipo de contradição. ∎

Juntamente com o Fato 2.3 o resultado seguinte é o mais delicado deste capítulo.

Fato 2.6: *Suponha que π tem jato punctual de ordem k em O e $j^k\pi$ mostra que π não tem mínimo. Seja $\gamma: [0;\sigma] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de mínimos de $j^k\pi$ aderente em 0^+ ao semi-eixo $x \geq 0$ e tome μ a ordem de $(j^k\pi)\circ\gamma$ em $0+$. Então:*

(A) $\mu \leq k$;

(B) Existe um vértice $Q = (\alpha;\beta)$ da poliginal de Newton modificada de $j^k\pi$ com $\beta = \mu$ e existe uma semi-reta do reticulado de Newton de $j^k\pi$ que passa por Q e ou é negativa ou tem coeficiente angular ímpar.

Dem.: A parte (A) é conseqüência direta de $j^k\pi$ mostrar que π não tem mínimo em O, conforme mostra o Fato 1.8.

Para a prova de (B), considere $\mathcal{R}$ e $\mathcal{P}$ o reticulado e a poligonal de Newton modificada de $j^k\pi$, respectivamente.

Como γ é uma curva ágébrica aderente ao semi-eixo dos x positivos em $0+$ pode-se supor que $\gamma(x) = (x; \sum_{j=1}^{+\infty} a_j x^{\nu_j})$, onde (ν_j) é uma seqüência de racionais estritamente crescente com $\nu_1 > 1$.

Vão ser analisados separadamente os casos em que todos os a_j são nulos ou não (ie, quando γ é o semi-eixo dos x positivos ou não).

• Caso $a_j = 0$ para todo j tem-se $j^k\pi(x;0) = a_r x^r + w(x)$, com $a_r < 0$, $r \leq k$ e $j^r w = 0$. Portanto $\beta = r$, $\alpha \geq 1$ é uma semi-reta negativa de $\mathcal{R}$ que contém a semi-reta de $\mathcal{P}$ cuja origem é o vértice Q'. Assim o resultado segue, nesta situação, considerando $Q = Q'$.

•• Quando pelo menos um dos a_j é diferente de zero não há perda de generalidade em supor $a_1 \neq 0$.

Tome então Q_ν o ponto de $\mathcal{P}$ que tem abscissa ν_1. Pelo Fato 2.5, Q_ν é um vértice de $\mathcal{P}$.

Para encerrar a prova proceda por absurdo e veja que se Q_ν não satisfizer (B) então todas as semi-retas de $\mathcal{R}$ que passam por este vértice são positivas e tem coeficiente angular par.

Então, tomando P o polinômio associado a $j^k\pi$ em Q_ν, vem $P(\lambda) > 0$, para todo $\lambda \neq 0$.

Portanto $P(a_1) > 0$ e, do Fato 2.2, seguir–se–ia que $(j^k\pi) \circ \gamma$ tem mínimo estrito em $0+$ o que contraria a maneira como foi escolhida γ.

Assim, faça $Q = Q_\nu$ e obtenha a tese. ■

Capítulo 3
Uma Classe de Jatos que Garante Instabilidade

§3.0 - Preliminares: Com os resultados apresentados no capítulo anterior caracterizar-se-á uma classe de jatos que assegura a instabiliade almejada.

Antes de definir a classe supra-mencionada será útil estabelecer dois resultados de cálculo ligados a k-decidibilidade que serão extremamente úteis para estabelecer relações entre π e sua "derivada radial", definida como $D_r\pi(x;y) = x\frac{\partial \pi}{\partial x} + y\frac{\partial \pi}{\partial y}$. Estes resultados serão provados para o contexto de n variáveis.

Nestes resultados será mencionada expressão $\nabla\pi$ *tem jato punctual de ordem* $k-1$ *em* O, isto significará que todas as derivadas parciais de primeira ordem de π tem jato punctual de ordem $k-1$ em O.

Lema de Cálculo: *Seja* $U = \overset{\circ}{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ *uma vizinhança de* O *e tome* $\pi: U \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *tal que* $\nabla\pi$ *tem jato punctual de ordem* $k-1$ *em* O. *Então* π *tem jato punctual de ordem* k *em* O *e* $j^{k-1}\nabla\pi = \nabla j^k\pi$.

Dem.: Defina o seguinte polinômio em U,

$$P(q) = \int_0^1 (j^{k-1}\nabla\pi(tq)|q)dt.$$

Afirmo que $P = (j^k\pi)|_U$.

De fato, é claro que P tem grau menor ou igual a k e, se $q \in U \setminus \{O\}$,

$$\frac{|\pi(q) - P(q)|}{\|q\|^k} = \left| \int_0^1 \frac{(\nabla\pi(tq) - j^{k-1}\nabla\pi(tq)|q)}{\|q\|^k} dt \right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 t^{k-1} \frac{\|\nabla\pi(tq) - j^{k-1}\nabla\pi(tq)\|}{\|tq\|^{k-1}} dt.$$

Da definição de jato $k-1$ segue-se desta última expressão que $\lim\limits_{q\to O} \frac{|\pi(q)-P(q)|}{\|q\|^k} = 0$ com o que termina-se a prova de $P = j^k\pi$.

Tome $R = \pi - P$, escreva $q = \sum\limits_{j=1}^{n} q_je_j$ e defina, para $1 \leq j \leq n$, as funções G_j e $\hat{R}_j$ por:

$$G_j = j^{k-1}\frac{\partial\pi}{\partial q_j} \text{ e } \frac{\partial\pi}{\partial q_j} = G_j + \hat{R}_j.$$

Para terminar a prova basta mostrar que $G_j = \frac{\partial P}{\partial q_j}$.

Veja que $\|q - q_je_j + te_j\| \leq \|q\|$, para $t \in [0;q_j]$. Portanto, como $j^{k-1}\hat{R}_j = 0$, tem-se

$$j^k \int_0^{q_j} \hat{R}_j(q - q_je_j + te_j)dt = 0. \qquad (*)$$

Assim,

$$\pi(q) = \pi(q - q_je_j) + \int_0^{q_j} \frac{\partial \pi}{\partial q_j}(q - q_je_j + te_j)dt =$$

$$= (P + R)(q - q_je_j) + \int_0^{q_j} (G_j + \hat{R}_j)(q - q_je_j + te_j)dt.$$

Use agora $(*)$ e calcule o jato k de ambos os membros da última expressão, obtendo assim a tese. ∎

Como conseqüência deste resultado tem-se o

Fato 3.0: *Seja π de classe C^1 tal que $\nabla\pi$ tem jato punctual de ordem $k-1$ em O.*

Então, a função $D_r\pi(q) = D_r\pi(q_1;\ldots;q_n) = \sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\partial \pi}{\partial q_j}$ tem jato punctual de ordem k em O e

$$j^kD_r\pi(q) = D_r(j^k\pi)(q) = \sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\partial j^k\pi}{\partial q_j}(q).$$

Dem.: Pelo Lema de Cálculo, π tem jato punctual de ordem k em O e $\nabla j^k\pi = j^{k-1}\nabla\pi$.

Use essa igualdade, o fato de $D_r\pi(q) = \langle\nabla\pi(q)|q\rangle$ e a desigualdade de Cauchy–Schwartz para obter $\lim_{q \to O} \frac{|D_r\pi(q) - \langle\nabla j^k\pi(q)|q\rangle|}{\|q\|^k} = 0$. ∎

§3.1 - Uma Classe de Energias que Garante Instabilidade: Passa-se agora à definição da classe $\mathcal{V}_k$ que constituirá o conjunto das energias potenciais abarcadas pelo resultado de instabibilidade.

Será novamente admitido que $\Omega = \mathring{\Omega} \subseteq \mathbf{R}^2$ é uma vizinhança de $O = (0;0)$.

Definição 3.0: *Uma função $\pi : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que $\pi(O) = 0$ estará na classe $\mathcal{V}_k$, para um natural $k \geq 2$ se:*

(i) π for de classe C^2 e $\nabla\pi$ tiver jato punctual em O de ordem $k-1$ (portanto pelo Lema de Cálculo anterior, π tem jato k);

(ii) A poligonal de Newton modificada de $j^k\pi$ tem sua semi-reta com origem no ponto $Q = (\alpha;k)$, com $\alpha > 1$, e se $P(\lambda) = \sum_{j=0}^{g} a_j\lambda^j$, $a_g \neq 0$ é o polinômio associado a $j^k\pi$ em Q, então

(ii-A) $a_0 < 0$.

(ii-B) P é uma função par.

(ii-C) Existe $m \in \{1,\ldots,g\}$ tal que $a_j \leq 0$ se $j < m$ e $a_j \geq 0$, se $j \geq m$.

Observação 0: Veja que como $\alpha > 1$, o grau de P é $g > 0$ e tem-se por (ii-C) que $a_g > 0$.

Observação 1: Veja também que pode-se caracterizar $\mathcal{V}_k$ apenas usando o reticulado de Newton de $j^k\pi$ (sem fazer menção ao polinômio associado a esse jato em Q) através da seguinte proposição,

Proposição 3.1: *Seja $\pi : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $\pi(O) = 0$, de classe C^2, com $\nabla\pi$ tendo jato punctual de ordem $k-1$ em O. Tome $\mathcal{P}$ a poligonal de Newton modificada de $j^k\pi$ e suponha que $Q = (\alpha;k)$, com $\alpha > 1$, é a origem da semi-reta r de $\mathcal{P}$. Então $\pi \in \mathcal{V}_k$ se, e somente se,* *(ii*-a) A semi-reta r é paralela ao eixo das abscissas;*

(ii-b) Se $r_1, r_2, \ldots, r_p$ $(p \geq 2)$ são as semi-retas do reticulado de Newtom modificado de $j^k\pi$ que passam por Q e ℓ_j é o coeficiente angular de r_j (lembre que ℓ_j é natural) então ℓ_j é par, para $1 \leq j \leq p$, e supondo que essas semi-retas estão ordenadas por ordem decrescente de coeficiente angular então existe um $m \in \{1, \ldots, p-1\}$ tal que, r_j é positiva se, e somente se $j < m$ (isto é, se o coeficiente angular de r_j é maior do que o de r_m).*

Observação 2: Veja que, como a semi-reta de $\mathcal{P}$ é paralela ao eixo das abscissas então, conforme (ii*-b), $r_p = r$, $\ell_p = 0$ e r é negativa.

Dem.: Tome M o polinômio de $j^k\pi$ incidente a Q. Como $P(\lambda) = M(1;\lambda)$ tem-se a tese.■

Observação 3: Pode parecer estranho colocar na definição de $\mathcal{V}_k$ a exigência de $\nabla\pi$ ter jato $k-1$ e concluir que então π tem jato k. Talvez o caminho invrso pareça mais "natural" impor que π tenha jato k em O e concluir que $\nabla\pi$ tem jato de ordem $k-1$, ainda mais sendo π de classe C^2. O exemplo seguinte mostra por que este não foi o caminho escolhido.

Considere

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^5 \sin(\frac{1}{x}) & , \text{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0, \end{cases}$$

perceba que φ é de classe C^2, tem jato punctual de ordem 4 em 0 enquanto que φ' não possui jato punctual de ordem 3 em 0.

O objetivo precípuo deste capítulo é mostrar que se π está em $\mathcal{V}_k$ estão tem-se a instabilidade do ponto de equilíbrio (0;0;0;0) do sistema conservativo de Hamiltoniana $\mathcal{H} = T + \pi$. Para obter este resultado (Teorema 3.4) será necessário estabelecer alguns resultados preliminares de índole técnica.

Fato 3.2: *Sejam $\pi \in \mathcal{V}_k$, $\mathcal{P}$ a poligonal de Newton modificada de $j^k\pi$, Q a origem da semi-reta de $\mathcal{P}$ e P o polinômio associado a $j^k\pi$ em Q.*

Então existe $\lambda_0 > 0$ tal que:

(i) As únicas raízes reais de P são $\pm\lambda_0$ e ambas são simples.

(ii) $P(\lambda) < 0$ se, e somente se, $-\lambda_0 < \lambda < \lambda_0$.

Dem.: Seja $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{g} a_i\lambda^i$. Como $\pi \in \mathcal{V}_k$ tem-se que $a_0 < 0$, $a_g > 0$ e P é par, logo se a_i é diferente de zero, i é par. Portanto, para provar todo o Fato 3.2 basta provar que P tem uma única raiz estritamente positiva, que é simples.

Dado que $a_0 a_g < 0$ é imediato que existe pelo menos uma raiz de P estritamente positiva.

A prova da unicidade dessa raiz e de que ela é simples será feita simultaneamente, demonstrando que:

Em toda a raiz $\lambda_* > 0$ de P tem-se $P'(\lambda_*) > 0$,

pois evidentemente isso acarreta a tese.

Seja então λ_* uma raiz estritamente positiva de P e tome o natural $m \geq 1$ dado na definição de $\mathcal{V}_k$ que garante que $a_i \leq 0$ se $i < m$ e $a_i \geq 0$, se $i \geq m$.

Então $P'(\lambda) = \sum_{i=1}^{m-1} i a_i \lambda^{i-1} + \sum_{i=m}^{g} i a_i \lambda^{i-1}$. Repare que a primeira dessas somatórias pode deixar de existir, o que ocorre quando $m = 1$, mas a segunda somatória sempre está presente, já que $a_s > 0$.

Usando então que $m \geq 1$, $a_0 < 0$, $a_i \leq 0$, para $i < m$ e $a_i \geq 0$ se $i \geq m$ vem que

$$P'(\lambda_*) > \frac{m}{\lambda_*}a_0 + P'(\lambda_*) = \frac{m}{\lambda_*}a_0 + \sum_{i=1}^{m-1} ia_i\lambda_*^{i-1} + \sum_{i=m}^{s} ia_i\lambda_*^{i-1} \geq$$

$$\geq \frac{m}{\lambda_*}a_0 + \sum_{i=1}^{m-1} ma_i\lambda_*^{i-1} + \sum_{i=m}^{s} ma_i\lambda_*^{i-1} =$$

$$= \frac{m}{\lambda_*}a_0 + \frac{m}{\lambda_*}(\sum_{i=1}^{m-1} a_i\lambda_*^{i} + \sum_{i=m}^{s} a_i\lambda_*^{i}) = \frac{m}{\lambda_*}P(\lambda_*) = 0.$$

Chame λ_0 à única raiz positiva de P para obter a tese. ∎

Fato 3.3: *Sejam $\pi \in \mathcal{V}_k$, $\mathcal{P}$ a poligonal de Newton modificada de $j^k\pi$, Q a origem da semi-reta de $\mathcal{P}$ e P o polinômio associado a $j^k\pi$ em Q. Considere ainda λ_0 a única raiz estritamente positiva de P.*

Então, a função $D_r\pi(x;y) = x\frac{\partial\pi}{\partial x}(x;y) + y\frac{\partial\pi}{\partial y}(x;y)$ satisfaz:

(i) A poligonal de Newton modificada de $j^kD_r\pi$ é $\mathcal{P}$.

(ii) $j^kD_r\pi \in \mathcal{V}_k$.

(iii) Se P_1 é o polinômio associado a $j^kD_r\pi$ em Q então as únicas raizes reais de P_1 são $\pm\lambda_1$, ambas simples, com $\lambda_1 > \lambda_0$ e, além disso, $P_1(\lambda) < 0$ se, e só se, $-\lambda_1 < \lambda < \lambda_1$.

Dem.: Preliminarmente observe que (ii) é decorrência imediata de (i), em virtude da definição e da Proposição 3.1.

Para provar (i) veja que, do Fato 3.0 segue–se, usando a fórmula de Euler para funções homogêneas que

$$j^kD_r\pi(x;y) = \sum_{j=1}^{k} j\pi_j, \qquad (*)$$

lembrando que π_j é a parte homogênea de grau j de $j^k\pi$.

Desse modo, vê–se, através do Fato 2.0 que a poligonal de Newton de $j^k\pi$ e $D_rj^k\pi$ tem mesma poligonal de Newton modificada.

Isto prova (i) e (ii).

Quanto a (iii), veja que aplicando o Fato 3.2 a $j^kD_r\pi$ garante–se a existência de $\lambda_1 > 0$ tal que as únicas raizes reais de P_1 são $\pm\lambda_1$, ambas são simples e $P_1(\lambda) < 0$ se, e só se, $-\lambda_1 < \lambda < \lambda_1$.

Desta forma resta provar apenas que $\lambda_1 > \lambda_0$.

Para isto será estabelecido que $P_1(\lambda_0) < 0$.

Sejam M e M_1 respectivamente os polinômios de $j^k\pi$ e $D_rj^k\pi$ incidentes a Q.

Escreva, conforme as notações da secção 2.2, $M(x;y) = \sum_{(i;j)\in I_Q} a_{ij}x^iy^j$.

Então, por $(*)$, vem que $M_1(x;y) = \sum_{(i;j)\in I_Q} (i+j)a_{ij}x^iy^j$.

Assim resulta $P(\lambda) = \sum_{(i;j)\in I_Q} a_{ij}\lambda^j$ e $P_1(\lambda) = \sum_{(i;j)\in I_Q} (i+j)a_{ij}\lambda^j$.

Lembre agora o Fato 2.1 e veja que:

(A) Para cada $j \in \mathrm{N}$ existe no máximo um elemento $(u;v) \in I_Q$ tal que $v = j$.

(B) Se $(i_1;j_1)$ e $(i_2;j_2)$ estão em I_Q e $j_1 < j_2$ então $i_1 + j_1 > i_2 + j_2$.

Veja ainda que da definição de $\mathcal{V}_k$ vem que $(k;0) \in I_Q$, $a_{k0} = a_0 < 0$ e, como o grau de P é g, existe $(i_p;j_p) \in I_Q$ tal que $j_p = g$ e $a_{i_p g} = a_g > 0$. Além disso $(i_p;g)$ é o par de I_Q cuja segunda coordenada é máxima.

Agora particione I_Q em

$$I_Q^- = \{(i;j) \in I_Q : j < m\} \quad \text{e} \quad I_Q^+ = \{(i;j) \in I_Q : j \geq m\}.$$

A definição de $\mathcal{V}_k$ mostra que nenhum desses conjuntos é vazio e:

(C) Se $(i;j) \in I_Q^+$ então $a_{ij} > 0$ e se $(i;j) \in I_Q^-$ então $a_{ij} < 0$.

Tome $(\overline{u};\overline{v}) \in I_Q^+$ tal que $\overline{v} = \min\left\{j \in \mathrm{N} : \exists (u;v) \in I_Q^+, \text{ com } v = j\right\}$, veja que (A) mostra que este elemento está perfeitamente definido.

Faça $\ell = \overline{u} + \overline{v}$ e conclua, através de (B), que:

(D) Se $(i;j) \in I_Q^-$ então $i + j > \ell$.

(E) Se $(i;j) \in I_Q^+$ então $i + j \leq \ell$.

Use agora (C), (D) e (E) para concluir que

$$\begin{aligned} P_1(\lambda_0) &= \sum_{(i;j)\in I_Q^-} (i+j)a_{ij}\lambda_0^j + \sum_{(i;j)\in I_Q^+} (i+j)a_{ij}\lambda_0^j < \\ &< \ell\Big(\sum_{(i;j)\in I_Q^-} (i+j)a_{ij}\lambda_0^j\Big) + \ell\Big(\sum_{(i;j)\in I_Q^-} (i+j)a_{ij}\lambda_0^j\Big) = \\ &= \ell P(\lambda_0) = 0. \end{aligned}$$

Desta desigualdade, segue–se, como já foi observado, a tese. ∎

§3.2 - Resultados Auxiliares de Instabilidade: Neste parágrafo são apresentados alguns resultados de instabiliade para equações diferenciais ordinárias que são pequenas adaptações de resultados "clássicos" nesse assunto.

Lembre que se q_0 for um ponto de equilíbrio de uma equação diferencial $\dot{q} = f(q)$ uma **trajetória assintótica** para q_0 é uma solução não trivial desta equação φ que se define em $]-\infty;0]$ e tem a propriedade de $\lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = q_0$.

É claro que se existe um solução assintótica para q_0 então q_0 é instável segundo Liapunoff.

Em (K0) Krasovsky enuncia o seguinte resultado.

Teorema de Krasovsky: *Considere um subconjunto aberto U de R^n e a equação diferencial ordinária $\dot{q} = f(q)$, onde $f: U \longrightarrow \mathrm{R}^n$ é localmente Lipcshitziana e $f(q_0) = O$.*

Suponha que existam um aberto $\Delta \subsetneq U$ e uma função $V: \Delta \longrightarrow \mathrm{R}^n$ de classe C^1 tais que:

(i) $q_0 \in \partial\Delta$.

(ii) $V(q) < 0$ para $q \in \Delta$.

(iii) $V(q) = 0$, *para* $q \in \partial\Delta$.
(iv) $\dot{V}(q) < 0$ *para* $q \in \overline{\Delta} \setminus \{q_0\}$.

Então existe uma trajetória assintótica para q_0 *na equação considerada.*

O Teorema que será utilisado aqui decorre de uma pequena generalização deste resultado bastante útil em equações onde se conhece uma integral primeira.

Nesta demonstração, se $a > 0$ e $q \in \mathbf{R}^n$, a bola fechada e a esfera de centro q e raio a serão representadas respectivamente por $B(q;a)$ e $S(q;a)$.

Teorema de Krasovsky: *Considere um subconjunto aberto* U *de* $\mathbf{R}^n$ *e a equação diferencial ordinária* $\dot{q} = f(q)$, *onde* $f: U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ *é localmente Lipcshitziana e* $f(q_0) = O$.

Suponha que existam um aberto $\Delta \subsetneq U$ *e funções* $W: \Delta \longrightarrow \mathbf{R}^n$ *e* $V: \Delta \longrightarrow \mathbf{R}^n$ *de classe* C^1 *tais que:*

(i) $q_0 \in \partial\Delta$.
(ii) $V(q) < 0$, *para* $q \in \Delta$.
(iii) $V(q) = 0$, *para* $q \in \partial\Delta$.
(iv) $\dot{V}(q) \leq 0$, *para* $q \in \Delta$.
(v) $\dot{W}(q) \neq 0$, *para* $q \in \overline{\Delta} \setminus \{q_0\}$.

Então existe uma trajetória assintótica para q_0 *na equação considerada.*

Dem.: Antes de mais nada veja que as condições (i)-(iv) já garantem a instabilidade de q_0, pois V é uma função de Četaev para a instabilidade.

De (i) segue-se que para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $\Delta_\varepsilon = \Delta \cap B(q_0;\varepsilon) \neq \emptyset$.

Fixe então $\varepsilon > 0$ e considere $L_\varepsilon = \partial\Delta_\varepsilon \cap \{q \in \mathbf{R}^n: \|q - q_0\| < \varepsilon\}$ e $C_\varepsilon = \partial\Delta_\varepsilon \cap S(q_0;\varepsilon)$.

Veja que (iii) acarreta

$$V(q) = 0, \ \forall q \in L_\varepsilon. \qquad (*)$$

Tome para $\delta_n = \frac{1}{n} < \varepsilon$ um ponto $q_n \in \Delta_{\delta_n}$ e represente por φ_n a solução de $\dot{q} = f(q)$ tal que $\varphi_n(0) = q_n$.

Use (ii), (iv) e $(*)$ para ver que existe $T_n > 0$ tal que $\varphi_n(t) \in \Delta_\varepsilon$, para $0 \leq t < T_n$ e $\varphi_n(T_n) \in C_\varepsilon$. Faça $z_n = \varphi_n(T_n)$.

Como C_ε é compacto existe uma subseqüência de z_n que converge para $\overline{z} \in C_\varepsilon$. Será admitido sem perda de generalidade, que $z_n \longrightarrow \overline{z}$.

Tome $K = \max\{\|f(q)\|: q \in B(q_0;\varepsilon)\}$ e veja que, como $\delta_n \longrightarrow 0$ e $\|\dot{\varphi}_n(t)\| \leq K$, para $0 \leq t \leq T_n$, então existem M e N positivos tais que $T_n > M$ para todo $n > N$.

Afirmo que $T_n \longrightarrow +\infty$.

De fato, suponha por absurdo que isto é falso, então existe uma subseqüência de T_n que converge para algum $\overline{T} \geq M > 0$. Sem perda de generalidade, suponha que $T_n \longrightarrow \overline{T}$.

Seja $\overline{\varphi}$ a solução não prolongável de $\dot{q} = f(q)$ tal que $\overline{\varphi}(\overline{T}) = \overline{z}$ e considere I seu domínio.

Vai ser provado agora que, neste caso, $0 \in I$ e $\overline{\varphi(t)} \in \overline{\Delta_\varepsilon}$ para $0 \leq t \leq \overline{T}$.

Para isso veja que evidentemente uma das duas possibilidades seguintes ocorre:

$(\bullet)$ $\overline{\varphi(t)} \in \overline{\Delta_\varepsilon}$ para todo $t < \overline{T}$.
$(\bullet\bullet)$ Existe $t_* < \overline{T}$, $t \in I$ tal que $q_* = \overline{\varphi}(t_*) \notin \overline{\Delta_\varepsilon}$.

Se $(\bullet)$ vale então da compacidade de $\overline{\Delta_\varepsilon}$ segue-se que $]-\infty;\overline{T}] \subset I$.

Portanto, neste caso, $0 \in I$ e está provada a afirmação feita.

Por outro lado, se $(\bullet\bullet)$ vale então existe $\sigma > 0$ tal que $B(q_*;\sigma) \subset \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Delta_\varepsilon}$ e $[t_*;\overline{T}] \subset I$.

Logo, pelo teorema da dependência contínua de soluções de e.d.o. relativamente a condições iniciais, conclui-se que para n suficientemente grande φ_n se define em $[t_*;\overline{T}]$ e $\varphi_n(t_*) \in B(q_*;\sigma)$. Portanto $\varphi_n(t_*) \notin \Delta_\epsilon$ e segue-se que $t_* < 0$.

Assim, se (••) ocorre, segue-se também que $0 \in I$ e $\overline{\varphi}(t) \in \overline{\Delta_\epsilon}$ para $0 \leq t \leq \overline{T}$.

Seja então $\overline{q} = \overline{\varphi}(0)$.

Lembre que φ_n é a solução de $\dot{q} = f(q)$, com $\varphi(T_n) = z_n$, e use novamente o Teorema da dependência contínua e o fato de $q_n = \varphi_n(0) \to q_0$ para concluir que então ter-se-ia $\overline{q} = q_0$.

Mas esta concluão contraria o Teorema de existência e unicidade de de e.d.o., pois f é localmente Lipschitziana e q_0 é um ponto de equilíbrio de $\dot{q} = f(q)$.

Assim fica estabelecido que $T_n \to +\infty$.

Considere agora $\overline{\varphi_0}$ a solução não prolongável de $\dot{q} = f(q)$ tal que $\overline{\varphi_0}(0) = \overline{z}$ e chame J a seu domínio.

Use outra vez o Teorema da dependência contínua como antes para concluir que se $t \in J$ e $t < 0$ então $\overline{\varphi_0}(t) \in \overline{\Delta_\epsilon}$.

Da compacidade de $\overline{\Delta_\epsilon}$ segue-se que o conjunto α-limite de $\overline{\varphi_0}$, A, é não vazio e está contido em $\overline{\Delta_\epsilon}$.

Como para todo ponto de A tem-se $\dot{W}(q) = 0$ e $\overline{\Delta_\epsilon} \subset \overline{\Delta}$, a hipótese (v) mostra que $A = \{q_0\}$ e estabelece que $\overline{\varphi_0}$ é uma trajetória assintótica para q_0. ∎

Com esse resultado é fácil estabelecer a seguinte versão "robusta" de um conhecido resultado de Četaev.

Teorema de Četaev: *Seja o sistema Hamiltoniano $\mathcal{H}$ definido no aberto $U \times \mathbf{R}^n$ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ de energia potencial π e cinética T, ambas de classe C^2.*

Suponha que $(q_0;O)$ seja um ponto de equilíbrio de $\mathcal{H}$ tal que, $\pi(q_0) = 0$ e que existem $\epsilon > 0$ e uma componente conexa G de $\pi^{-1}(]-\infty;o[)$ aderente a q_0 tais que

$$\langle \nabla\pi(q);q\rangle < 0 \ \forall q \in \overline{G} \setminus \{q_0\}, \ \|q - q_0\| < \epsilon.$$

Então existe uma trajetória assintótica para $(q_0;O)$ em $\mathcal{H}$.

Dem.: Considere

$$\Delta = \{(q;p) \in G \times \mathbf{R}^n : \|q - q_0\| < \epsilon, \ \langle q;p\rangle > 0 \text{ e } H(q;p) = \pi(q) + T(q;p) < 0\}$$

É simples ver que nestas condições, Δ é um subconjunto aberto de $U \times \mathbf{R}^n$ e as funções $V(q;p) = H(q;p)$ e $W(q;p) = \langle q;p\rangle$ satisfazem as hipóteses do Teorema de Krasovsky. ∎

§3.3 - O Teorema de Instabilidade: Está-se agora em condições de estabeler o resultado central deste Capítulo.

Teorema 3.4: *Seja $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subseteq \mathbf{R}^2$ contendo $O = (0;0)$ e considere em $\Omega \times \mathbf{R}^2$ o sistema mecânico conservativo de Hamiltoniana $\mathcal{H} = T + \pi$, com energia potencial $\pi : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ e energia cinética $T : \Omega \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, ambas de classe C^2.*

Suponha que π tem um ponto crítico em O e está na classe V_k, então existe uma trajetória assintótica para $(0;0;0;0)$ no sistema $\mathcal{H}$.

Dem.: Graças ao Teorema de Četaev, basta demosntrar que nas condições apresentadas existe $\sigma > 0$ e uma componente conexa U de $(\pi|_{B_\sigma})^{-1}(]-\infty;0[)$ aderente a O tal que $x\frac{\partial\pi}{\partial x}(x;y) + y\frac{\partial\pi}{\partial y}(x;y) < 0$, para todo $(x;y) \in \overline{U} \setminus \{O\}$.

O que se fará é usar o fato de π estar em $\mathcal{V}_k$ para poder aplicar esse resultado.

Sejam $\mathcal{P}$ a poligonal de Newtom modificada de $j^k\pi$ e Q a origem da semi-reta de $\mathcal{P}$ e P o polinômio associado a $j^k\pi$ em Q.

Considere agora $D_r\pi = x\frac{\partial\pi}{\partial x} + y\frac{\partial\pi}{\partial y}$ que, devido ao Fato 3.0 tem jato de ordem k e $j^kD_r\pi = D_r(j^k\pi)$.

Pelo Fato 3.3 tem-se que $\mathcal{P}$ é também a poligonal de Newton modificada associada a $j^kD_r\pi$.

Seja P_1 o polinômio associado a $D_r\pi$ em Q.

Use o Fato 3.2 e tome λ_0 e λ_1 as únicas raízes positivas de P e P_1 respectivamente.

O Fato 3.3 mostra que $\lambda_1 > \lambda_0$ e $P_1(\lambda) < 0$ para $\lambda \in]-\lambda_1;\lambda_1[$.

Tome $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda_0 + \varepsilon < \lambda_1$.

Como $\pi \in \mathcal{V}_k$ tem-se que a semi-reta de $\mathcal{P}$ é paralela ao eixo das abscissas e as coordenadas de Q são $(\alpha;k)$.

Então aplicando os Fatos 2.3 e 2.4 a π e $D_r\pi$, juntamente com o fato de λ_0 ser raiz simples de P, conclui-se que:

(A) Existe um $\sigma_0 > 0$ tal que, para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $0 < \sigma < \sigma_0$, o conjunto

$$\Delta_\varepsilon^\sigma = \{(x;y) \in B_\sigma : x > 0,\ -(\lambda_0+\varepsilon)x^\alpha \leq y \leq (\lambda_0+\varepsilon)x^\alpha\} \qquad (*)$$

contém uma componente conexa, U_σ, aderente à origem de $(\pi|_{B_\sigma})^{-1}(]-\infty;0[)$, tal que $\overline{U_\sigma} \setminus \{O\} \subset \Delta_\varepsilon^\sigma$.

(B) Existe um $\sigma_1 > 0$ tal que $D_r\pi(u;v) < 0$, para os pontos $(u;v)$ de

$$\Delta_\varepsilon^{\sigma_1} = \{(x;y) \in B_{\sigma_1} : x > 0,\ -(\lambda_0+\varepsilon)x^\alpha \leq y \leq (\lambda_0+\varepsilon)x^\alpha\}. \qquad (**)$$

Escolhendo em $(**)$, $\sigma_1 < \sigma_0$, pode-se concluir, por $(*)$, que existe uma componente conexa, U_{σ_1}, de $(\pi|_{B_\sigma})^{-1}(]-\infty;0[)$, com $O \in \partial U$ e $\overline{U_{\sigma_1}} \setminus \{O\} \subset \Delta_\varepsilon^{\sigma_1}$.

Logo $D_r\pi(x;y) < 0$, para $(x;y) \in \overline{U_{\sigma_1}} \setminus \{O\}$ e o Teorema de Četaev encerra a prova.■

Capítulo 4
Aplicações & Conclusões

§4.0 - Objetivos: Este Capítulo propõe-se a duas finalidades.

Primeiro (veja o §4.1) aplicar-se-á o Teorema 3.4 para obter a conclusão de que certas hipóteses "mais naturais" do que as daquele resultado garantem a instabilidade da origem de certos sistemas mecânicos Hamiltonianos de dois graus de liberdade com energia potencial π e com uma energia cinética qualquer.

Esse resultado será obtido provando que se π satisfaz as ditas "mais naturais" então $\pi \in \mathcal{V}_k$.

Depois disso (veja o §4.2) será feito um comentário mostrando que, no contexto de sistemas mecânicos conservativos no plano, os resultados aqui apresentados generalizam os de Moauro–Negrine (veja MN-1) de 1990 que, tanto quanto o autor saiba, constituiam um resultado de ponta *quando a energia potencial não é analítica*.

§4.1 - Algumas Aplicações do Teorema 3.4: Seja $\Omega = \mathring{\Omega} \subseteq \mathbf{R}^2$ tal que $O \in \Omega$ e considere uma energia cinética $T: \Omega \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe C^2 e uma energia potencial $\pi: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe C^2 tal que $\pi(O) = \|\nabla\pi(O)\| = 0$. Será também admitido que $\nabla\pi$ teja jato punctual em O de uma ordem conveniente.

Com estes elementos fica definido o sistema mecânico conservativo de dois graus de liberdade e hamiltoniana $\mathcal{H} = T + \pi$, que possui um ponto de equilíbrio em (0;0;0;0).

Neste parágrafo serão apresentadas algumas situações onde se pode garantir a instabilidade segundo Liapunoff desse ponto de equilíbrio.

O primeiro caso em que será provada a instabilidade é aquele em que

$$\pi = \pi_s + \pi_{s+1} + \ldots + \pi_{k-1} + \pi_k + R,$$

onde π_j é um polinômio homogêneo de grau j, que é, para $s \leq j \leq k-1$, semi-definido positivo (ie, $\pi_j(q) \geq 0$) e $j^k\pi$ mostra que π não tem mínimo em O.

Mais precisamente, suponha que π satisfaça à seguinte condição:

(H0): Existem naturais s e k com $2 \leq s < k$ tais que π tem jato punctual de ordem k e:

(H0-i) O primeiro jato não nulo de π é o de ordem s;

(H0-ii) A parte homogênea de grau j de $j^k\pi$, π_j é semi-definida positiva, para $s \leq j \leq k-1$ (veja que pode acontecer de para alguns valores de j ter-se $\pi_j = 0$, mas pelo menos $\pi_s \neq 0$, por (H0-i));

(H0-iii) O jato punctual de ordem k de π em O mostra que π não tem mínimo nesse ponto.

Será mostrado que (H0) acarreta a instabilidade de (0;0;0;0).

Outra situação de instabilidade surge quando π satisfaz a condição explicitada a seguir:

(H1): Suponha que existam naturais $2 \leq s < k$ tais que,

(H1-i) π tem jato punctual de ordem k em O e o primeiro jato não nulo de π é o de ordem s e $j^s\pi$ tem um ponto de mínimo estritamente fraco em O.

(H1-ii) $j^k\pi$ mostra que π não tem mínimo.

(H1-iii) $j^r\pi$ não é k-decidível, para $s \leq r < k-1$.

Observação: Veja que a condição (H1-iii) não pode ser substituída por π ***não é r-decidível, para*** $s \leq r < k-1$, como mostra o seguinte exemplo:

Considere $\pi(x;y) = (y - x^2)^2 - y^4$ e faça $k = 8$.

É fácil ver que $j^8\pi$ mostra que π não tem mínimo (basta, por exemplo, fazer o diagrama de Newton modificado de $j^8\pi$) e que, se $r < 8$ então π não é r–decidível. Porém π não satisfaz (H1-iii) pois $j^4\pi$ é 8–decidível.

A demonstração da instabilidade destas situações seguirá o seguinte plano.

Provar–se–á primeiro que se π satisfaz (H0) então essa função também satisfaz (H1).

Depois mostrar–se–á que se π satisfaz (H1), é de classe C^2 e $\nabla\pi$ possui jato punctual de ordem $k-1$ então existe uma rotação $R: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\pi \circ R \in \mathcal{V}_k$.

Proposição 4.0: *Suponha que $\pi: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica a condição* (H0) *então π também verifica* (H1).

Dem.: É claro que se π satisfaz (H0) então (H1-i) e (H1-ii) estão verificadas.

Quanto a (H1-iii), tome $r \in \{s, \ldots, k-1\}$. Como $j^r\pi = \sum_{j=s}^{r} \pi_j$ vem de (H0-ii) que $j^r\pi(q) \geq 0$.

Por (H0-iii) tem–se $j^k\pi$ não tem mínimo em O, Então vê–se que $j^r\pi$ não é r–decidível. Logo, pelo Fato 1.2, existe uma reta ℓ que passa pela origem na qual $j^r\pi$ se anula. Isto mostra que $j^r\pi$ tem um mínimo estritamente brando em O e portanto, não é k–decidível.

Assim, π satisfaz (H1-iii) e a prova está completa. ∎

Agora será estabelecido um lema técnico acerca de certas propriedades do reticulado de Newton de uma função que verifica (H1).

Fato 4.2: *Sejam π satisfazendo* (H1) *e $\mathcal{P}_{k-1}$ a poligonal de Newton modificada de $j^{k-1}\pi$.*

Considere $Q_0; Q_1; \ldots; Q_p$ os vértices de $\mathcal{P}_{k-1}$, ordenados por ordem crescente de abscissas e cuja ordenada é menor ou igual a k.

Então todas as semi–retas do reticulado de Newton modificado de $j^{k-1}\pi$ incidentes a Q_j, para $j > 1$ tem coeficiente angular par e são positivas.

Dem.: Faça $Q_j = (\alpha_j; \beta_j)$, $j > 1$, portanto $\alpha_j > 1$.

Chame de $\mathcal{R}_{k-1}$ ao reticulado de Newton de $j^{k-1}\pi$.

Suponha por absurdo que alguma semi–reta ℓ de $\mathcal{R}_{k-1}$ que passe por Q_j é negativa e seja $a_{uv}x^u y^v$ o monômio que gera ℓ.

Então $u + v \leq k - 1$ e, tomando a poligonal de Newton modificada de $j^{u+v}\pi$, como $\beta_j \leq k$, vem que $j^{u+v}\pi$ é k–decidível, contrariando o fato de π satisfazer (H1).

Para provar que as semi–retas de $\mathcal{R}_{k-1}$ incidentes a Q_j tem coeficiente angular par, vai se proceder outra vez por redução ao absurdo.

Suponha que ℓ seja incidente a Q_j e tenha coeficiente angular ímpar. Já foi estabelecido que ℓ é positiva.

Considere então $L(x;y) = (x; -y)$ e a função $S = \pi \circ L$. Claramente S satisfaz (H1), para os mesmo k e s que π.

Seja $\mathcal{R}_S$ o reticulado de Newton de $j^{k-1}S$.

É claro que o as semi–retas de $\mathcal{R}_{k-1}$ e $\mathcal{R}_S$ são as mesmas. Também é imediato que a semi–reta ℓ_{ij} tem mesmo sinal nesses dois reticulados se, e só se, seu coeficiente angular é par (afinal esse coeficiente é o expoente de y no monômio gerador de ℓ_{ij}).

Portanto Q_j é um vértice da poligonal de Newton modificada de $j^{k-1}S$ e ℓ é uma semi-reta incidente a Q_j. Mas, como ℓ é uma semi-reta positiva de $\mathcal{R}_{k-1}$ com coeficiente angular ímpar, a observação anterior acarreta que o sinal de ℓ em $\mathcal{R}_S$ é negativa.

Isto contraria a parte já provada deste fato pois S satisfaz (H1). ∎

Proposição 4.2: *Seja $\pi \in C^2$ e admita que $\nabla\pi$ tem jato punctual de ordem $k-1$ em O. Então se π satisfaz* (H1) *existe uma rotação $R: \mathrm{R}^2 \longrightarrow \mathrm{R}^2$ tal que $\pi \circ R \in \mathcal{V}_k$.*

Dem.: Seja $\gamma: [0;\sigma] \longrightarrow \Omega$ uma curva de mínimos de $j^k\pi$. Então $j^k\pi|_\gamma$ tem máximo estrito em O e γ é algébrica e é tangente em $0+$ a uma semi-reta ℓ, cuja origem é O.

Seja $R: \mathrm{R}^2 \longrightarrow \mathrm{R}^2$ a rotação que transforma ℓ no semi-eixo positivo das abscissas.

Como R é linear tem-se que $j^r(\pi \circ R) = (j^k\pi) \circ R = \sum\limits_{j=s}^{r} (\pi_j \circ R)$.

Perceba também que, evidentemente, $\pi \circ R$ também satisfaz (H1) para os mesmos valôres de s e k.

Tome $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_{k-1}$ os reticulados de Newton de $j^k\pi$ e $j^{k-1}\pi$, nessa ordem, e sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_{k-1}$ as poligonais de Newton modificadas de $j^k(\pi \circ R)$ e $j^{k-1}(\pi \circ R)$ respectivamente.

Sejam $Q_0;Q_1;\ldots;Q_p$ os vértices de $\mathcal{P}$ ordenados por ordem crescente de abscissas e cujas ordenadas são estritamente menores do que k. Faça $Q_j = (\alpha_j;\beta_j)$.

Como $\beta_j < k$ vem que Q_j é um vértice de $\mathcal{P}_{k-1}$. Além disso as semi-retas de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_{k-1}$ incidentes a Q_j são as mesmas.

Pelo Fato 4.1 vê-se que todas as semi-retas incidentes de $\mathcal{R}$ incidentes a Q_j são positivas e tem coeficiente angular positivo.

Mas $\tilde{\gamma} = T^{-1} \circ \gamma$ é uma curva de mínimos de $j^k(\pi \circ R)$ tangente ao semi-eixo positivo das abscissas. Como $j^k(\pi \circ R)$ é uma sela k-decidível o Fato 2.6 mostra que existem um vértice $Q = (\alpha;\beta)$ em $\mathcal{P}$, com $\beta \leq k$, e uma semi-reta ℓ de $\mathcal{R}$ incidente a Q que é negativa ou tem coeficiente angular ímpar

Isto e o que anteriormente havia sido estabelecido para Q_j, $0 \leq j \leq p$, mostra que existe pelo menos mais um vértice $Q_{p+1} = (\alpha_{p+1};\beta_{p+1})$ em $\mathcal{P}$ com $\beta_{p+1} = k$.

Sejam $r_1;r_2;\ldots;r_w$ as semi-retas de $\mathcal{R}$ incidentes a Q_{p+1} ordenadas por ordem crescente de coeficiente angular.

Considere agora as semi-retas r_i que estão $\mathcal{R}_{k-1}$. Note que para $i \geq 2$ isto necessariamente tem de ocorrer.

Afirmo que

Se r_i está em $\mathcal{R}_{k-1}$ então r_i é positiva e seu coeficiente angular é par. (∗)

Se há mais do que uma semi-reta nessas condições então Q_{p+1} é vértice de $\mathcal{P}_{k-1}$ e portanto, pelo Fato 4.1, *todas* as r_i de $\mathcal{R}_{k-1}$ são positivas e seus coeficientes angulares são pares.

Se, ao contrário apenas uma r_i está em $\mathcal{R}_{k-1}$ então está terá de ser r_2 e $w = 2$. Portanto r_2 é incidente a Q_{p-1} e outra vez conclui-se (∗).

Então vem que $r_1 \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_{k-1}$. Portanto r_1 é negativa e é gerada por um monômio de grau k e, como $\beta_{p+1} = k$, segue-se que o coeficiente angular de r_1 é 0.

Então pela Proposição 3.1 tem-se que $\pi \circ R \in \mathcal{V}_k$. ∎

Pode-se então estabelecer o

Teorema 4.3: *Seja* $\Omega = \mathring{\Omega} \subseteq \mathbf{R}^2$ *tal que* $O \in \Omega$ *e considere o sistema mecânico conservativo de Hamiltoniana* $\mathcal{H} = T + \pi$, *onde a energia cinética* $T: \Omega \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ *é de classe* C^2 *e a energia potencial* $\pi: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ *tem classe* C^2 *e* $\pi(O) = \|\nabla\pi(O)\| = 0$. *Admita que* $\nabla\pi$ *tem jato punctual de ordem* $k-1$ *em* O *e que* π *satisfaz* (H0) *ou* (H1), *então existe uma trajetória assintótica para o ponto* (0;0;0;0) *no sistema considerado.*

Dem.: Segue-se diretamente das Proposições 4.0, 4.2 e do Teorema 3.4. ∎

Este resultado tem algumas conseqüências interessantes.

Corolário 4.4: *Seja um sistema conservativo com hamiltoniana* $\mathcal{H} = T + \pi$ *onde* T *é como no Teorema 4.3 e* $\pi: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ *tem classe* C^2 *e* $\pi(O) = \|\nabla\pi(O)\| = 0$. *Suponha que* $j^2\pi \neq 0$, *jato* k *de* π *em* O *mostra que* π *não tem mínimo e* $\nabla\pi$ *tem jato* $k-1$ *em* O. *Então existe uma trajetória assintótica para* (0;0;0;0).

Dem.: Se $k = 2$ o resultado é um Teorema famoso de Liapunoff.

Admita então que $k > 2$.

Então $j^2\pi$ não é uma forma quadrática definida positiva, pois caso contrário π teria mínimo em O e não poderia existir k conforme o enunciado.

Assim como $j^2\pi \neq 0$ vem que esse jato é uma forma quadrática, semi-definida positiva de posto 1.

Usando o *splitting-lemma* (veja (B0) pode-se portanto tomar coordenadas convenientes e escrever $\pi(x;y) = x^2 + f(y)$ onde $j^2 f = 0$.

Como $j^k\pi$ mostra que π não tem mínimo e $j^k\pi(x;y) = x^2 + j^k f(y)$, tomando $\bar{k}$ o menor p tal que $j^p f \neq 0$, vê-se que $2 < \bar{k} \leq k$ e π é uma sela $\bar{k}$-decidível.

Assim $j^{\bar{k}}\pi = x^2 + ay^{\bar{k}}$ mostra que π não tem mínimo e portanto $a < 0$ ou $\bar{k}$ é ímpar.

Em ambos os casos é óbvio que π satisfaz (H0). ∎

Agora vai ser exigida uma classe de diferenciabilidade maior para π. Isto por que vai ser usado o resultado de Moauro e Negrine citado no Capítulo 0.

Corolário 4.5: Se T está como nas hipóteses anteriores e $\pi: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ é de classe C^s. Suponha que o primeiro jato não nulo de π seja o de ordem s, que $\nabla\pi$ tem jato s e $j^{s+1}\pi$ mostra que π não tem mínimo então (0;0;0;0) é um ponto de equilíbrio instável segundo Liapunoff do sistema mecânico de hamiltoniana $\mathcal{H} = T + \pi$ para o qual existe uma trajetória assintótica.

Dem.: Seja p o menor k tal que $j^k\pi$ mostra que π não tem mínimo. É óbvio que $p = s$ ou $p = s + 1$.

Se $p = s$ então como $j^s\pi$ é homogêneo o resultado é conseqüência do trabalho de Moauoro & Negrine.

Caso $p = s + 1$ então $j^s\pi$ é homogêneo, não identicamente nulo e $j^s\pi(q) \geq 0$.

Escreva então $\pi = \pi_s + \pi_{s+1} + R$ e veja que π satisfaz (H0), com $k = s + 1$. ∎

Corolário 4.6: Se T está como nas hipóteses anteriores e $\pi: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ é de classe C^5 e $j^5\pi$ mostra que π não tem mínimo então existe uma trjetória assintótica para (0;0;0;0) no sistema $\mathcal{H}$.

Dem.: Seja s a ordem do primeiro jato não nulo de π. É claro que $2 \leq s \leq 5$.

Se $s = 2$ o resultado segue-se do Corolário 4.4.

Caso $s = 3$ ou $s = 5$ então $j^s\pi$ é homogêneo e mostra que π não tem mínimo, pois tem grau ímpar. O resultado segue-se então do Teorema de Moauro & Negrine (veja (MN0)).

Resta a situação em que $s = 4$, mas aqui o resultado segue-se do Corolário 4.5. ■

Referências

(B0) Barone–Netto, A. *Jet-Detectable Extrema* Proceedings of The American Mathematical Society - vol. 92, 1984
(K0) Krasovsky *Stability of Motion* - Stanford Unv. Press - 1963
(G0) Garcia, M. V.P. *Uma Caracterização de Pontos Críticos de Funções de* $\mathbf{R}^2$ *em* $\mathbf{R}$. Relatório Técnico do Departamento de Matemática Aplicada – Março de 1993.
(MN0) Moauro, V. & Negrine, P. *On the inversion of Lagrange–Dirichlet Theorem* - Differential and Integral Equations - 1991.
(P0) Palamodov, V.P. *On instability of motion with several degrees of freedom* – Preprint – 1992
(W0) Walker, J. *Algebraic Curves* Princeton Univ. Press – 1950

RELATÓRIOS TÉCNICOS DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
1992

RT-MAP-9201 - M.S.A.C. Castilla, Vinicio Moauro, Piero Negrini e Waldyr Muniz Oliva
The four Positive Vortices Problem: Regions of Chaotic Behavior and the Non-Integrability
São Paulo - IME-USP - 19 pg.