Minicurso: Matemática e Finanças

Prof. Cláudio Possani (IME USP)

SEMANA DA LICENCIATURA DO IME USP

de 4 a 8 de outubro de 200

Instituto de Matemática e Estatística da USP

Matemática e Finanças

Prof. Claudio Possani
Departamento de Matemática
Instituto de Matemática e Estatística da USP

MATEMÁTICA E FINANÇAS

Prof Claudio Possani

O objetivo destas notas é servir de introdução ao estudo de Finanças, via modelagem matemática. O texto serve de apoio ao minicurso "Matemática e Finanças" oferecido na Semana da Licenciatura do IME-USP.

O tema destas aulas não deve ser confundido com aquilo que usualmente chamamos de "Matemática Financeira". Embora não haja uma fronteira clara entre um aspecto e outro, podemos dizer que os problemas abordados sob o tema "Matemática Financeira" não envolvem modelagem.

O primeiro de nossos exemplos é uma questão típica de "Matemática Financeira".

Exemplo 1. *Para manter uma ação de caráter social uma ONG necessita de um orçamento anual de R$ 1.000.000,00. Sabe-se que é possível realizar aplicações no mercado financeiro obtendo-se rendimentos de 0.9% de juros ao mês (além da inflação). Que capital a ONG deveria ter para garantir o financiamento da ação sem necessidade de novos aportes financeiros?*

Na resolução deste exercício não há necessidade de se criar modelos ou fazer hipóteses simplificadoras do problema considerado. O problema pode ser perfeitamente traduzido em linguagem matemática e após alguns cálculos chegaremos a uma solução exata. Em resumo, trata-se de um problema exato com uma solução exata.

O papel da modelagem matemática em finanças aparece num contexto bem mais amplo. Não se trata de resolver problemas exatos e não se trata de encontrar soluções exatas para os problemas levantados. Podemos entender melhor esse contexto atentando para os elementos expostos abaixo.

1. Problema Exato ou Real: trata-se de um problema "real" ou "concreto", freqüentemente difícil de ser respondido. Por exemplo, prever o valor de uma ação ou de um ativo financeiro no dia de amanhã ou após um período pré-estabelecido (no mercado de opções ou mercado futuro, esse período chega a ser de vários meses).

2. Solução Aproximada: na verdade estamos interessados em soluções aproximadas, já que muitas vezes é impossível obter a solução exata do problema proposto. Dependendo da questão a ser respondida, conhecer uma resposta com 1% ou 0,5% de margem de erro pode ser bastante satisfatório.

3. Problema Aproximado: como o problema real é muitas vezes complicado demais, fazemos hipóteses simplificadoras que o tornam mais simples e passível de um tratamento matemático. É fundamental ter em mente que as hipóteses adicionais devem simplificar o problema original sem, contudo, descaracterizá-lo.

4. Solução Exata: se o problema aproximado for suficientemente simples e dispusermos do ferramental adequado, podemos eventualmente obter uma solução exata para o problema simplificado.

Uma questão central é determinar em que medida a "solução exata do problema aproximado" é uma boa "solução aproximada do problema exato".

Mas, não é a mesma coisa?

Pausa para reflexão...

...

Nosso próximo exemplo ilustra bem a discussão acima.

Exemplo 2. Modelo de Propagação (ou modelo de Propagação de Boatos). Imaginemos que num certo instante parte de uma população recebe uma informação estratégica. Transcorridas t unidades de tempo, que proporção da população está de posse da informação?

Observe que a questão está colocada de forma um tanto vaga e que a situação descrita é bastante complexa.

Vamos chamar de $p(t)$ *a porcentagem da população que conhece a informação no instante* t. *Então* $p(t)$ *é um número entre 0 e 1; escrever* $p(t_1)=0{,}4$ *significa que 40% da população conhece a informação no instante* t_1.

É razoável supor (hipótese simplificadora) que a taxa de variação de p(t) é proporcional a duas quantidades: $p(t)$ *e* $1-p(t)$ *. Note que a taxa de variação de* $p(t)$ *é a derivada* $p'(t)$, *ou seja, é a "velocidade" da propagação da informação.*

Supor que $p'(t)$ *é proporcional a* $p(t)$ *é supor que "quanto maior for o porcentual da população que conhece a informação, maior será a velocidade de propagação". Supor que* $p'(t)$ *é proporcional a* $1-p(t)$ *é supor que "quanto maior for o porcentual da população que desconhece a informação, maior será a velocidade de propagação". Isso porque se restam poucas pessoas desinformadas, pouco cresce o porcentual da população que recebe a informação (isto é, a velocidade de propagação é lenta).*

Assim simplificado, o problema original pode ser modelado pela equação diferencial

$$\frac{dp}{dt}(t) = Kp(t)(1 - p(t)),$$

cuja solução é

$$p(t) = \frac{1}{1 + a\,e^{-Kt}},$$

com $a = \frac{1}{p(0)} - 1$, *onde* $p(0)$ *é a proporção da população que foi informada inicialmente.*

A velocidade da propagação da informação está expressa pela constante de proporcionalidade, K, *e varia com a população considerada, o tipo de informação, os meios de comunicação disponíveis, etc...*

Exercícios:

1. Calcule $\lim_{t \to \infty} p(t)$.

2. Determine $\frac{dp}{dt}(t)$.

3. Mostre que $\frac{dp}{dt}(t)$ é máxima quando $p(t) = 0{,}5$. A tradução desta última afirmação pode ser "a velocidade de propagação de um boato é máxima quando metade da população está a par e a outra metade desconhece a informação". Compare a afirmação acima com a hipótese que fizemos anteriormente "a taxa de variação de p(t) é proporcional a duas quantidades: $p(t)$ e $1 - p(t)$".

4. Esboce o gráfico de $p(t)$ supondo $a=10, K=0{,}5$ e t medido em horas. Faça uma estimativa gráfica do tempo que será necessário par que 80% da população obtenha a informação.

5. Em Economia, usamos a palavra "marginal" para indicar a taxa de variação de uma grandeza. Assim, se $C(x)$ indica o custo, em reais, na produção de x unidades de um certo produto, então o custo marginal, $\frac{dC}{dx}$, é a taxa de variação do custo em relação ao número de unidades produzidas.

   i. Escreva uma equação que relacione os custos de produção, a receita de vendas e o lucro em função do número de unidades produzidas de um certo produto.
   ii. Demonstre que o lucro é máximo quando a receita marginal e o custo marginal são iguais.
   iii. Suponha que a receita é dada por $R(x)=9x$ e o custo por $C(x)=x^3-6x^2+15x$. Encontre o número de unidades produzidas que maximiza o lucro.

6. O modelo de propagação de boatos do Exemplo 2 também é aplicado no estudo do crescimento de populações. Se $P(t)$ é o total da população de uma espécie no instante t, modelamos a taxa de crescimento da população por

$$\frac{dP}{dt}(t)=K\,P(t)\big(L-P(t)\big),$$

onde L é uma constante que representa a "população de equilíbrio". A equação diferencial acima significa que a taxa de variação da população é proporcional à população atual e à diferença entre a população de equilíbrio e a população atual.

i. Resolva a equação diferencial acima.

ii. Esboce os gráficos de algumas soluções para diferentes valores iniciais.

iii. Calcule $\lim_{t \to \infty} P(t)$.

Exemplo 3. Modelo de Cobb-Douglas para a produção. O modelo que estudaremos agora foi criado em 1928 por Charles Cobb e Paul Douglas que tinham por objetivo modelar a produção global da economia americana. Desde então tem se revelado razoavelmente eficiente para predizer a produção de bens, seja em escala nacional ou em empresas grandes e pequenas.

Vamos indicar por P a produção total de um sistema econômico (que pode ser um país ou ema empresa) e vamos supor que P é função de duas variáveis independentes K e L.

K representa o capital investido (máquinas, equipamentos, instalações, etc...).

L representa o total de trabalho envolvido na produção, medido em horas.

Nosso objetivo é determinar a função $P = P(K, L)$. As hipóteses simplificadoras são:

a. Se $K = 0$ ou $L = 0$ então $P = 0$. Isto é, sem capital ou sem trabalho não há produção.

b. A produção marginal em relação ao trabalho é proporcional à produção por unidade de trabalho. Isto é, fixando a variável K (capital), a taxa de variação da produção em relação ao trabalho, $\frac{\partial P}{\partial L}$, é proporcional à produção por unidade de trabalho, $\frac{P}{L}$. Isto parece razoável já que se $\frac{P}{L}$ é grande, isso significa que poucas horas de trabalho influem muito no total produzido; portanto, variando as horas de trabalho, espera-se uma grande variação no total produzido.

c. A produção marginal em relação ao capital é proporcional à produção por unidade de capital. É a mesma suposição que fizemos no ítem anterior, trocando trabalho por capital.

Denotando por α a constante de proporcionalidade mencionada no item b. e por β a constante de proporcionalidade mencionada no item a., das nossas hipóteses podemos agora construir nosso modelo matemático.

A hipótese b. implica que, mantido $K = K_0$ constante, temos

$$\frac{\partial P}{\partial L}(L, K_0) = \alpha \frac{P(L, K_0)}{L}.$$

Com a resolução dessa equação diferencial (para a qual precisamos da hipótese a.) obtemos

$$P(L, K_0) = C_1(K_0) L^{\alpha}, \qquad (I)$$

onde C_1 é uma função de K.

A hipótese c. implica que, mantido $L = L_0$ constante, temos

$$\frac{\partial P}{\partial K}(L_0, K) = \beta \frac{P(L_0, K)}{K}.$$

Novamente usando a., solucionamos a equação diferencial e obtemos

$$P(L_0, K) = C_2(L_0)K^{\beta}, \qquad \text{(II)}$$

onde C_2 é uma função de L.

Finalmente, considerando (I) e (II), concluímos que

$$P(L, K) = b\,L^{\alpha} K^{\beta}.$$

Uma quarta hipótese simplificadora foi considerada por Cobb e Douglas:

d. *Se houver um incremento no trabalho e no capital de um fator m, também haverá um incremento do mesmo fator m na produção.*

Em termos matemáticos temos então: $P(mL, mK) = mP(L, K)$.

Mas

$$P(mL, mK) = b(mL)^{\alpha}(mK)^{\beta} \text{ e } mP(L, K) = mb\,L^{\alpha} K^{\beta}.$$

Logo, com esta hipótese adicional, concluímos que $m^{\alpha+\beta} = m$, ou seja, $\alpha + \beta = 1$. Nossa função produção assume então a forma:

$$P(L, K) = b\,L^{\alpha} K^{1-\alpha}.$$

Existem adaptações deste modelo para qualquer número de variáveis. Por exemplo, uma empresa produz 5 produtos diferentes e quer estimar o total de sua produção tendo como variáveis o número de artigos produzidos de cada um dos 5 tipos. Usando o modelo de Cobb-Douglas, obteremos uma função produção do tipo

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = b\, x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta}\, x_3^{\gamma}\, x_4^{\delta}\, x_5^{\lambda}$$

com $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \lambda = 1$.

Agora, uma observação de caráter mais geral. Repare que a escolha das hipóteses simplificadoras determinou a função obtida. Como saber que as hipóteses escolhidas estão razoáveis e servirão de fato para a construção de um modelo que "traduza" o problema real? O mais indicado é certamente testar o modelo no maior número de casos possíveis. O artigo de Cobb e Douglas que apresentou esse modelo pela primeira vez mostrava uma tabela com os totais anuais da produção americana nos últimos 20 anos e a mesma produção estimada pela função apresentada acima. A pouca discrepância entre os dois números era a "prova" de que o modelo parecia adequado.

Exercícios:

7. Mostre que a função de Cobb-Douglas, $P(L,K) = bL^{\alpha}K^{\beta}$, satisfaz a equação diferencial

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P \, .$$

8. No seu modelo para a produção total da economia americana, Cobb e Douglas, usaram o método dos mínimos quadrados para estimar os parâmetros b e α, obtendo $b = 1{,}01$ e $\alpha = 0{,}25$. Use estes dados para estimar a produção americana no ano de 1922, sabendo que, neste ano, $K = 431$ e $L = 161$. Compare o número obtido com a produção real que, no ano de 1922 foi de 240. Observamos que os números mencionados são os dados reais após uma padronização que permite um tratamento mais fácil para o problema matemático.

9. Esboce as curvas de nível 100, 180 e 220 para a função de Cobb-Douglas utilizada no exercício anterior.

Exemplo 4. *Modelo de Transporte. Neste exemplo vamos examinar um modelo que se aplica a varias situações conhecidas sob a designação genérica de "transporte": fluxo de veículos, movimentação de elementos numa cadeia de produção, escoamento ou deslocamento de pessoas, etc...*

Uma situação à qual estamos familiarizados é a do fluxo de veículos numa estrada, que poderá ajudar na compreensão da dedução da equação do transporte. Imaginemos então uma estrada retilínea e com tráfego intenso de veículos. Na estrada tomamos um referencial e a cada ponto associamos um número real x que é a distância do ponto ao marco zero. Introduzimos os seguintes conceitos:

- $\varphi(x,t)$: *fluxo de veículos no ponto x, no instante t, medido em número de veículos por hora.*
- $\rho(x,t)$: *densidade de veículos no ponto x, no instante t, medido em veículos por quilômetro.*

- $N(x_1,x_2,t)$: *número de veículos na estrada, no instante t, entre os pontos* x_1 *e* x_2.

Hipóteses simplificadoras para o modelo:

1. *A velocidade de cada veículo é função apenas de sua posição x e do instante t, isto é, a velocidade é dada por uma função* $v(x,t)$.

Observe que esta hipótese implica que não existem ultrapassagens, o que é razoável numa estrada com tráfego intenso. Assim teremos:

$$\varphi(x,t) = \rho(x,t)\, v(x,t).$$

2. *Existe uma relação funcional (simples!) entre a velocidade dos carros e a densidade, isto é,*

$$v = f(\rho).$$

Como conseqüência de 1. e 2. temos

$$\varphi(x,t) = \rho(x,t)\, f(\rho(x,t)). \qquad \textit{(III)}$$

Com os conceitos que já foram definidos e as hipóteses simplificadoras, podemos deduzir a equação do transporte.

Sabemos que $N(x_1,x_2,t)=\int_{x_1}^{x_2}\rho(x,t)dx$ *e, portanto,* $\dfrac{\partial N}{\partial t}(x_1,x_2,t)=\int_{x_1}^{x_2}\dfrac{\partial \rho}{\partial t}(x,t)dx.$

Por outro lado, a variação do número de veículos no trecho entre x_1 *e* x_2 *é igual a quantidade de veículos que entra no trecho em* x_1 *menos os que saem em* x_2
Logo, concluímos que

$$\frac{\partial N}{\partial t}(x_1,x_2,t)=\varphi(x_1,t)-\varphi(x_2,t).$$

Por outro lado, temos também

$$\varphi(x_1,t)-\varphi(x_2,t)=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)dt,$$

e deduzimos que

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right]dx=0.$$

Como a igualdade acima vale para quaisquer x_1 e x_2, segue que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)=0.$$

Finalmente, utilizando a equação (III), obtemos

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t)+\sigma(\rho(x,t))\,\frac{\partial\rho}{\partial x}(x,t)=0,$$

com $\sigma(\rho)=f(\rho)+\rho f'(\rho)$, que é a equação do transporte.

Exercício.

10. Suponha que numa estrada a velocidade de escoamento é inversamente proporcional ao quadrado da densidade de veículos. Determine o fluxo do tráfego, em cada ponto, em cada instante.

Bibliografia

1. J. Stewart , *Calculus - Early Transcendentals* - 4th Ed, Thomson Learning, 1999.

2. G.B.Thomas, *Cálculo,* vol I, 10a ed, Addison Wesley, 2002.

3. I. Stewart, *Does God Play Dices?*, Penguin Books, 1997.

4. E. Faria, *Equações Diferenciais Parciais com Aplicações em Finanças,* notas de aula, 2002.