

UMA PROVA DO TEOREMA DE WEIERSTRASS

CLEBER BATISTA DE SOUZA

ORIENTADORAS: VERA HELENA GIUSTI DE SOUZA

CARMEN SILVIA CARDASSI

Apresentamos, neste trabalho, a demonstração de Dunham Jackson ([1]) para o teorema de Weierstrass de aproximações polinomiais.

TEOREMA DE WEIERSTRASS

Se f é uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e se ϵ é um número real positivo, então é possível construir um polinômio P tal que $|P(x) - f(x)| < \epsilon$, para $a \leq x \leq b$.

Dem.

Sem perda de generalidade, podemos considerar $0 < a < b < 1$, uma vez que: se $(a, b) \not\subset [0, 1]$, podemos transportar (a, b) para $[0, 1]$ mediante uma transformação linear que preserve as propriedades necessárias de f e do polinômio P .

Por conveniência, vamos estender f a $\mathbb{R}$ do seguinte modo:

$$f(x) = 0, \text{ para } x \leq 0$$

$$f(x) = (x/a)f(a), \text{ para } 0 < x < a$$

$$f(x) = ((1-x)/(1-b))f(b), \text{ para } b < x < 1$$

$$f(x) = 0, \text{ para } x \geq 1.$$

Sejam $J_n = \int_{-1}^1 (1-u^2)^n du$ e $P_n(x) = \frac{1}{J_n} \int_0^1 f(t)[1-(t-x)^2]^n dt$.

Para $0 \leq x \leq 1$, o valor da última integral não se altera se os limites forem substituídos por $-1+x$ e $1+x$, já que f se anula fora do intervalo $(0,1)$, de $-1+x$ a 0 e de 1 a $1+x$; portanto,

$$P_n(x) = \frac{1}{J_n} \int_{-1+x}^{1+x} f(t)[1-(t-x)^2]^n dt.$$

Fazendo $t-x=u$, teremos:

$$P_n(x) = \frac{1}{J_n} \int_{-1}^1 f(x+u)(1-u^2)^n du. \quad (1)$$

Multiplicando os dois membros da igualdade

$$1 = \frac{1}{J_n} \int_{-1}^1 (1-u^2)^n du$$

por $f(x)$, teremos:

$$f(x) = \frac{1}{J_n} \int_{-1}^1 f(x)(1-u^2)^n du, \quad (2)$$

já que f não depende de u . Subtraindo (2) de (1) obtém-se:

$$P_n(x) - f(x) = \frac{1}{J_n} \int_{-1}^1 [f(x+u) - f(x)](1-u^2)^n du. \quad (3)$$

Seja $\epsilon > 0$, arbitrário. Vamos mostrar que esta expressão se aproxima de zero quando n tende a ∞ .

Como f é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$, independente de x , tal que se $|u| \leq \delta$, então $|f(x+u)-f(x)| \leq \epsilon/2$.

Seja M o valor máximo de $|f(x)|$; então $|f(x+u)-f(x)| \leq 2M$, $\forall u$.

Por outro lado, se $|u| \geq \delta > 0$, então $(u/\delta)^2 \geq 1$ e $|f(x+u)-f(x)| < 2Mu^2/\delta^2$, $\forall u$.

Para qualquer valor de u , uma das quantidades $\epsilon/2$ ou $2Mu^2/\delta^2$ é maior ou igual a $|f(x+u)-f(x)|$, e certamente sua soma é maior ou igual a $|f(x+u)-f(x)|$; logo,

$$|f(x+u)-f(x)| \leq (\epsilon/2) + 2Mu^2/\delta^2, \forall u.$$

Consequentemente, para $0 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} |P_n(x)-f(x)| &\leq \frac{1}{J_n} \int_{-1}^1 |f(x+u)-f(x)| (1-u^2)^n du \leq \frac{1}{J_n} \int_{-1}^1 \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{2Mu^2}{\delta^2} \right) (1-u^2)^n du \\ &= \frac{1}{J_n} \int_{-1}^1 \frac{\epsilon}{2} (1-u^2)^n du + \frac{1}{J_n} \int_{-1}^1 \frac{2Mu^2}{\delta^2} (1-u^2)^n du = \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{J_n \delta^2} \left[\frac{-u(1-u^2)^{n+1}}{2(n+1)} \right]_{-1}^1 \\ &\quad + \int_{-1}^1 \frac{(1-u^2)^{n+1}}{2(n+1)} du \Bigg] = \frac{\epsilon}{2} + \frac{J_{n+1}}{J_n} \cdot \frac{M}{\delta^2} \cdot \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Tem-se $(1-u^2)^{n+1} < (1-u^2)^n$, já que $0 < 1-u^2 < 1$ para $u \in (-1,1)$ e portanto

$$\int_{-1}^1 (1-u^2)^{n+1} du < \int_{-1}^1 (1-u^2)^n du, \text{ isto é, } \frac{J_{n+1}}{J_n} < 1, \text{ de}$$

onde se conclui que $|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{M}{\delta^2} \cdot \frac{1}{n+1}$.

Para n suficientemente grande, obtemos $\frac{M}{\delta^2} \cdot \frac{1}{n+1} < \frac{\epsilon}{2}$. Logo, $|P_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, para $0 \leq x \leq 1$ e, em particular, para $a \leq x \leq b$.

Bibliografia

- 1 Jackson, Dunham, "A proof of Weierstrass Theorem", AMM, vol.41, (1934), pp. 309-312.