

**Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP**

**Deptº de Engenharia de Estruturas e Fundações**



ISSN 0103-9822

BT/PEF/9614

---

**Gradientes Conjugados  
Pré-Condicionados: Aplicação em  
Problemas Estruturais**

---

**Marcia Cimerman  
Priscila Goldenberg  
Paulo M. Pimenta**

Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP  
Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações

Diretor: Prof. Dr. Célio Taniguchi  
Vice-Diretor: Prof. Dr. Eduardo Camilher Damasceno

Chefe do Departamento: Prof. Dr. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli  
Suplente do Chefe do Departamento: Prof. Dr. Paulo de Mattos Pimenta

#### Conselho Editorial

Dinâmica e Estabilidade das Estruturas	Prof. Dr. C. E. N. Mazzilli
Engenharia de Solos	Prof. Dr. W. Hachich
Estruturas de Concreto, Metálicas, de Madeira	Prof. Dr. P. B. Fusco
Interação Solo-Estrutura	Prof. Dr. C. E. M. Maffei
Mecânica Aplicada	Prof. Dr. P. M. Pimenta
Métodos Numéricos	Prof. Dr. J. C. André
Pontes e Grandes Estruturas	Prof. Dr. D. L. de Zagottis
Teoria das Estruturas	Prof. Dr. V. M. Souza Lima

Coordenador Técnico: Prof. Dr. L. A. C. Diogo

Esta é uma publicação da Escola Politécnica da USP/Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, fruto de pesquisas realizadas por docentes e pesquisadores desta Universidade

**Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP**  
**Deptº de Engenharia de Estruturas e Fundações**

ISSN 0103-9822

**BT/PEF/9614**

---

**Gradientes Conjugados  
Pré-Condicionados: Aplicação em  
Problemas Estruturais**

---

**Marcia Cimerman  
Priscila Goldenberg  
Paulo M. Pimenta**

São Paulo - 1996

Cimerman, Marcia

Gradientes conjugados pré-condicionados : aplicação em problemas estruturais / M. Cimerman, P. Goldenberg, P.M. Pimenta. -- São Paulo : EPUSP, 1966.

2lp. -- (Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, BT/PEF/9614)

1. Estruturas - Análise numérica 2. Equações lineares (Análise numérica) I. Goldenberg, Priscila II. Pimenta, Paulo M. III. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações IV. Título V. Série

ISSN 0103-9822

CDU 624.01:519.6  
519.612

**GRADIENTES CONJUGADOS PRÉ -  
CONDICIONADOS : APLICAÇÃO EM  
PROBLEMAS ESTRUTURAIS**

Eng.<sup>a</sup>. Marcia Cimerman  
Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Priscila Goldenberg  
Prof. Dr. Paulo M. Pimenta

Departamento de Estruturas e Fundações  
Escola Politécnica Universidade de São Paulo

## Resumo

Muitos problemas em Engenharia requerem a resolução de sistemas lineares da forma

$Ax = b$  onde a matriz  $A$  é simétrica definida positiva de grande porte e esparsa.

Com o objetivo de diminuir o tempo computacional e a necessidade de memória envolvidos na resolução destes sistemas foram propostos diversos algoritmos. Dentre os métodos iterativos, o método dos gradientes conjugados tem se destacado muito na literatura, quando acoplado a pré-condicionadores.

No presente trabalho será apresentado um estudo comparativo de dois tipos de pré-condicionadores em problemas estruturais. Mais especificadamente, serão considerados os pré-condicionadores de Cholesky Incompletos e os de Cholesky Incompleto por blocos

## Abstract

Some engineering problems require the solution of a linear system  $Ax = b$  where  $A$  is a large symmetric sparse positive definite matrix.

To diminish the computational costs and memory requirement involved in the solution of these systems, some algorithms were proposed. Among iterative methods developed, the Conjugate Gradient method has been shown up in the literature.

Some Preconditioners were presented to be used along with the Conjugate Gradient method, as Incomplete Cholesky Preconditioners and Incomplete Block Preconditioners., but it is not possible to affirm which is more efficient to solve a system. The objective of the present paper is to do a comparative study of some Preconditioners in structural problems.

# Introdução

Muitos problemas na Engenharia requerem a solução de um sistema de equações lineares da forma

$$A x = b$$

onde  $A$  é uma matriz de grande porte esparsa simétrica definida positiva  $n \times n$ ,  $b$  é um vetor conhecido, de dimensão  $n$  e  $x$  é o vetor das incógnitas. Sistemas de equações com estas características surgem em várias aplicações práticas do Método dos Elementos Finitos, o que envolve a resolução de sistemas cada vez maiores. O aumento na ordem dos mesmos tende a tornar a memória e o tempo necessário para resolvê-los muito grandes.

Os métodos numéricos de resolução de sistemas lineares, são apresentados em duas classes genéricas: diretos e iterativos.

Na classe dos métodos diretos foram desenvolvidas diversas técnicas usando vários tipos de armazenamentos explorando a simetria e a esparsidade da matriz  $A$  dos coeficientes do sistema [1-4]. Relativamente aos métodos iterativos, também foram desenvolvidas diversas técnicas de resolução de sistemas esparsos de grande porte [5-8]. Para matrizes esparsas, que é o caso deste trabalho, a resolução do sistema linear através dos métodos diretos pode apresentar preenchimentos. Mais especificamente, efetuando a fatoração da matriz  $A$  em locu, elementos que eram nulos em  $A$  podem deixar de ser nulos nos fatores, aumentando a necessidade de memória. Por outro lado, os métodos iterativos são atrativos em termo de necessidade de memória de armazenamento, uma vez que sua aplicação normalmente exige apenas o armazenamento de  $A$ ,  $b$ ,  $x$  e talvez mais um ou dois vetores.

Dentre os métodos iterativos desenvolvidos, o Método dos Gradientes Conjugados, tem se destacado muito na literatura. Este método introduzido por Hestenes e Stiefel [9], acoplado a idéias de Pré-Condicionamento [7,8,10], tem se mostrado bastante útil na resolução dos problemas mencionados. Algumas técnicas de Pré-Condicionamento foram apresentadas para serem usadas em conjunto com o Método dos Gradientes Conjugados, entre elas pode-se citar os Pré-Condicionadores baseados na Fatorização de Cholesky Incompleta e Pré-Condicionadores Incompletos de Blocos.

Entretanto, não se pode afirmar qual das técnicas de Pré-Condicionamento é mais eficiente para a resolução de determinado problema. Este fato leva a um estudo comparativo dos diferentes métodos de

Pré-Condicionamento em particular nos problemas que surgem do Método dos Elementos Finitos [11-14].

O presente trabalho tem como objetivo efetuar um estudo comparativo dos dois tipos de Pré-Condicionadores em problemas estruturais.

## Definições e Notações

Um vetor em  $\mathbb{R}^n$  será indicado por

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Um produto escalar em  $\mathbb{R}^n$  é dado por

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Um conjunto de vetores  $\{x_1, \dots, x_p\} \in \mathbb{R}^n$  é ortogonal se :

$$x_i^T x_j = 0 \quad i \neq j.$$

Um conjunto de vetores  $\{x_1, \dots, x_p\} \in \mathbb{R}^n$  é ortonormal se :

$$x_i^T x_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

A norma Euclidiana em  $\mathbb{R}^n$  é dada por:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

Uma matriz em  $\mathbb{R}^{m \times n}$  será indicada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

Seja  $A$  uma matriz. Diz-se que os vetores  $\{x_1, \dots, x_p\}$  em  $\mathbf{R}^n$  são  $A$ -ortogonais se :

$$(Ax_i)^T x_j = 0 \text{ se } i \neq j$$

Seja  $A$  uma matriz. Diz-se que os vetores  $\{x_1, \dots, x_p\}$  em  $\mathbf{R}^n$  são  $A$ -ortonormais se :

$$(Ax_i)^T x_j = \delta_{ij}$$

A norma Euclidiana de matrizes é dada por:

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$$

Para matrizes  $A$  quadradas, o número de condição denotado por  $\kappa(A)$ , é definido como :

$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ . Demonstra-se [14] que  $\kappa(A) \geq 1$ . Uma matriz será dita mal condicionada se o seu número de condição for grande.

Nesta seção será considerado um problema geral  $P$  e  $\hat{x}$  a solução deste problema.

Seja  $x \in \mathbf{R}^n$  uma aproximação de  $\hat{x} \in \mathbf{R}^n$ . Define-se como erro o vetor  $y \in \mathbf{R}^n$  dado por :

$$y = \hat{x} - x$$

Seja  $x \in \mathbf{R}^n$  uma aproximação de  $\hat{x} \in \mathbf{R}^n$ . Para uma dada norma de vetor  $\|\cdot\|$ , diz-se que

$$\mathcal{E}_{\text{abs}} = \|\hat{x} - x\|$$

é o erro absoluto em  $\hat{x}$  para  $x \neq 0$ .

Seja  $x \in \mathbf{R}^n$  uma aproximação de  $\hat{x} \in \mathbf{R}^n$ . Para uma dada norma de vetor  $\|\cdot\|$ , diz-se que

$$\mathcal{E}_{\text{rel}} = \frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|}$$

é o erro relativo em  $\hat{x}$  para  $x \neq 0$ .

Diz-se que uma seqüência  $\{x_k\}$  de vetores de  $\mathbf{R}^n$  converge para  $\hat{x} \in \mathbf{R}^n$  se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - \hat{x}\| = 0.$$

Um algoritmo iterativo para a solução do problema  $P$  gera, a partir de um ponto inicial, uma seqüência de vetores  $\{x_k\}$ . Se a convergência desta seqüência para a solução do problema  $P$  for independente do ponto inicial, diz-se que a seqüência converge globalmente.

Além disso se a sequência  $\{x_k\}$  convergente para  $\hat{x}$  satisfizer a relação :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - \hat{x}\|}{\|x_k - \hat{x}\|} = \rho$$

diz-se que a sequência converge linearmente para  $\hat{x}$  com razão de convergência  $\rho$ .

As funções consideradas são definidas num conjunto  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  e assumem valores reais.

Assumindo que a função  $f(x)$  possui derivadas parciais em relação a todas as variáveis no ponto  $x$ , o seu gradiente será denotado por:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Seja  $\Gamma$  um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Se  $f: \Gamma \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  possuir derivadas parciais segundas contínuas, então a matriz Hessiana denotada por  $H$  é definida como :

$$H = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \end{bmatrix}$$

## Método dos Gradientes Conjugados

O Método dos Gradientes Conjugados, ponto central desta seção, utiliza algumas idéias de direções A-conjugadas [15] e do Método de Maior Decréscimo [16-17].

## Método de maior decréscimo

Seja o sistema linear  $Ax = b$  onde  $A$  é uma matriz simétrica definida positiva e  $x^*$  a solução do sistema acima. Sendo  $y = x^* - x$  o erro e  $r = b - Ax$  o resíduo, para  $x \in \mathbb{R}^n$ , verifica-se facilmente que  $Ay = r$ .

Considera-se o problema de minimização do funcional

$$F(y) = y^T Ay = \|y\|_A^2$$

Este problema é equivalente ao problema de resolver o sistema linear  $Ax = b$ .

A direção definida pelo gradiente de  $F$  é aquela na qual  $F(y) = \|y\|_A^2$  varia o mais rapidamente [12-13] e mais tem-se que  $\nabla F = 2r$ . Portanto é natural considerar um método iterativo onde:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \quad \text{com} \quad p_k = r_k.$$

Demonstra-se [14] que o escalar que minimiza  $F$  é dado por:

$$\alpha_k = \frac{r_k^T p_k}{p_k^T A p_k}.$$

Fatos :

- 1) Demonstra-se [12] que o Método de Maior Decréscimo converge sempre.
- 2) Demonstra-se [17] que a convergência é global e a razão de convergência é

$$\rho = \left( \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n} \right)^2 \quad \text{onde } \lambda_1 \text{ e } \lambda_n \text{ são respectivamente o maior e o menor auto-valor de } A.$$

- 3) Pode-se reescrever a razão de convergência como segue :

$$\rho = \left( \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n} \right)^2 = \left( \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^2 \quad \text{onde } \kappa(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \text{ é o número de condição espectral da matriz } A.$$

Da expressão acima nota-se que dependendo de  $\kappa$  a taxa de convergência pode ser proibitivamente lenta. Este fato justifica a necessidade de procurar novas direções de busca conforme veremos na seção seguinte.

## Descrição do Método dos gradientes conjugados

Para evitar os problemas de convergência lenta que podem ocorrer no Método de Maior Decréscimo, considera-se a seguir o Método das Direções Conjugadas [17], que será obtido por uma escolha diferente dos vetores  $p_k$ .

Considere-se então a sequência  $\{p_k\}$  de vetores dada por:

$$p_{k+1} = -r_{k+1} + \beta_k p_k$$

onde

$$\beta_k = \frac{p_k^T A r_{k+1}}{p_k^T A p_k}$$

**Teorema[14]**

(i)  $\langle r_i, r_j \rangle = 0$  para  $i \neq j$

(ii)  $\langle A p_i, p_j \rangle = 0$  para  $i \neq j$

**Observações:**

1. Se  $r_j \neq 0$  para  $j = 0, \dots, n-1$  então necessariamente  $r_n = 0$ . Daí o processo termina e  $\alpha_k = 0$

e 
$$x_{k+1} = x_k = x^*$$

2. Teoricamente o processo termina após no máximo  $n$  passos. Logo o Método dos Gradientes Conjugados é um método direto. Devido aos erros de arredondamento, tem-se em geral  $r_n \neq 0$ .

Para refinar o processo basta continuá-lo, devido a sua natureza iterativa.

De posse dos fatos acima, o Método dos Gradientes Conjugados pode ser esquematizado como segue.

## ALGORITMO (Gradientes Conjugados) :

**Passo 1** : faça  $k=0$

escolha  $x_0$

calcule  $r_0 = b - A x_0$

faça  $p_0 = -r_0$

escolha  $\varepsilon > 0$

**Passo 2** : Se  $\|r_k\| < \varepsilon \|b\|$  vá para o passo 9, senão vá para o passo 3

**Passo 3** : Calcule  $\alpha_k = -\frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}$

**Passo 4** : Calcule  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$

**Passo 5** : Calcule  $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k$

**Passo 6** : Calcule  $\beta_k = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$

**Passo 7** : Calcule  $p_{k+1} = -r_{k+1} + \beta_k p_k$

**Passo 8** : Se  $\|r_{k+1}\| < \varepsilon \|b\|$  vá para o passo 9, senão faça  $k = k+1$  e vá para o passo 3

**Passo 9** : Fim

Apesar de teoricamente o Método dos Gradientes Conjugados convergir em  $n$  passos, devido aos erros de arredondamento, o término finito não ocorre. Além disso a convergência pode ser lenta [8] em problemas de grande porte esparsos.

Os problemas de velocidade de convergência podem ser reduzidos utilizando o conceito de Pré-Condicionamento que será visto na próxima seção.

## Gradientes Conjugados Pré-Condicionados

O uso de métodos iterativos diretamente em sistemas de equações esparsos é pouco competitivo se comparado com os métodos diretos, devido a baixa taxa de convergência [8].

Para melhorá-la, uma técnica que é freqüentemente usada junto com os métodos iterativos é o pré-condicionamento. No pré-condicionamento, o sistema de equações original é multiplicado por uma matriz adequadamente escolhida tal que a matriz resultante esteja mais próxima da identidade do que a matriz original. Isto implicará numa matriz bem condicionada, pois, a matriz resultante terá número de condição próximo de um.

Segundo [10], o Método dos Gradientes Conjugados funciona bem em matrizes bem condicionadas. Nesta seção será mostrado como pré-condicionar um sistema linear para que a matriz dos coeficientes assuma alguma destas formas.

Conforme já mencionado, em aritmética exata, o Método dos Gradientes Conjugados fornecerá a solução exata em no máximo  $n$  iterações, onde  $n$  é a ordem da matriz  $A$ . Mas na prática, devido aos erros de arredondamento, o término deste algoritmo em  $n$  ou menos iterações não é garantido. O pré-condicionamento é normalmente usado para melhorar a taxa de convergência [8]. A taxa de convergência pode ser melhorada significativamente se o sistema original puder ser substituído por outro equivalente (que será visto logo a seguir), no qual a matriz transformada tenha muitos autovalores unitários. A idéia central do pré-condicionamento é construir uma transformação que tenha este efeito em  $A$ .

Existem diversos tipos de Pré-Condicionamentos na literatura [5-7,10]. No decorrer das seções subsequentes serão apresentados alguns deles. Não se pode afirmar qual deles é o "melhor". Conforme mencionado na introdução, o objetivo deste trabalho é efetuar um estudo comparativo de alguns tipos de Pré-Condicionamentos em sistemas lineares que surgem de problemas de Engenharia de Estruturas.

# Descrição do Método dos gradientes conjugados pré-condicionados

Considere um sistema linear  $Ax = b$  onde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz simétrica definida positiva. A idéia do Método dos Gradientes Conjugados Pré-Condicionados é aplicar o método do Gradiente Conjugado visto na seção anterior, ao sistema transformado :

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$$

onde  $\tilde{A} = C^{-T}AC^{-1}$ ,  $\tilde{x} = Cx$ ,  $\tilde{b} = C^{-T}b$  e  $C$  é uma matriz inversível.

A matriz  $C$  deverá ser escolhida de modo que seja  $\tilde{A}$  bem condicionada e próxima da matriz identidade. Seja então  $\tilde{x}_k = Cx_k$  uma aproximação de  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{r}_k = \tilde{b} - \tilde{A}\tilde{x}_k$ ,  $\tilde{p}_k = C p_k$ . Uma vez obtido  $\tilde{x}$  pode-se obter  $x$  via a equação  $x = C^{-1}\tilde{x}$ .

Definindo-se o Pré-Condicionador  $B$  por  $B=CC^T$  e sendo  $z_k$  a solução do sistema

$Bz_k = r_k$ , obtem-se o Algoritmo a seguir:

# ALGORITMO (Gradientes Conjugados Pré-Condicionados) :

**Passo 1** : faça  $k=0$

escolha  $x_0$

calcule  $r_0 = b - A x_0$

calcule  $p_0 = -z_0 = -B^{-1} r_0$

escolha  $\varepsilon > 0$

**Passo 2** : Calcule  $\alpha_k = -\frac{r_k^T z_k}{p_k^T A p_k}$

**Passo 3** : Calcule  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$

**Passo 4** : Calcule  $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k$

**Passo 5** : Se  $\|r_{k+1}\| < \|b\| \varepsilon$  vá para o passo 10, senão vá para o passo 6

**Passo 6** : resolva  $z_{k+1} = B^{-1} r_{k+1}$

**Passo 7** : Calcule  $\beta_k = \frac{r_{k+1}^T z_{k+1}}{r_k^T z_k}$

**Passo 8** : Calcule  $p_{k+1} = -z_{k+1} + \beta_k p_k$

**Passo 9** : Faça  $k = k + 1$  e vá para o passo 2

**Passo 10** : Fim

Algumas observações importantes devem ser feitas sobre este procedimento :

- se  $B = I$ , obtém-se o método clássico dos Gradientes Conjugados
- se  $B = A$  o método converge imediatamente
- o método requer o armazenamento de apenas cinco vetores :  $r, p, x, z$  e  $b$ .
- para que o Algoritmo seja uma técnica matricial esparsa efetiva, sistemas lineares da forma  $Bz = r$  devem ser de fácil resolução e com rápida convergência. Na prática, o Pré-Condicionador é

usualmente escolhido de modo a se ter alguma estrutura especial tal que a solução seja facilmente determinada.

O Método dos Gradientes Conjugados Pré-Condicionados é uma combinação do método puro do Gradiente Conjugado e de métodos diretos, onde os pré-condicionadores são os fatores que ponderam esta combinação.

Tanto uma boa matriz pré-condicionadora como um bom valor inicial podem acelerar o processo de convergência do Método do Gradiente Conjugado Pré-Condicionado. A escolha de um bom Pré-Condicionador pode ter efeito dramático sobre a convergência do algoritmo.

Usando o Método do Gradiente Conjugado Pré-Condicionado, tem-se uma grande variedade de opções para a solução iterativa do sistema linear.

Na seção seguinte serão apresentados exemplos de Pré-Condicionadores.

## Pré-Condicionadores Incompletos de Cholesky

Uma das mais importantes estratégias de Pré-Condicionamento envolve o cálculo de uma fatorização incompleta de Cholesky da matriz  $A$ . A idéia por detrás desta abordagem é calcular uma matriz triangular inferior  $H$  com a propriedade de ter alguma estrutura de esparsidade tratável e de algum jeito ser próxima do fator de Cholesky exato  $L$  da matriz  $A$ . O Pré-Condicionador é então tomado como sendo  $B = HH^T$  ou seja  $C=H$ .

Assim obtém-se:  $\tilde{A} \approx I$

Um caminho fácil mas efetivo para determinar um  $H$  simples que aproxima  $L$  é "caminhar" pela redução de Cholesky fazendo  $h_{ij} = 0$  se o correspondente  $a_{ij}$  for zero. Tem se então o seguinte algoritmo :

## ALGORITMO ( Cholesky Incompleto)

**Passo 1** : para  $k = 1$

faça  $A(k,k) = \sqrt{A(k,k)}$  e vá para o passo 2

**Passo 2** : para  $i = k+1:n$  se  $A(i,k) = 0$  faça  $A(i,k) = 0$ , senão faça  $A(i,k) = \frac{A(i,k)}{A(k,k)}$

**Passo 3** : para  $j = k+1:n$  e para  $i = j:n$  se  $A(i,j) = 0$  faça  $A(i,j) = 0$ , senão faça

$A(i,j) = A(i,j) - A(i,k) \times A(j,k)$  e vá para o passo 4

**Passo 4** : faça  $k = k+1$  e se  $k \leq n$  vá para o passo 1

O problema com o algoritmo acima é que pode aparecer raiz quadrada de número negativo (problema de pivô negativo) no passo 1, uma vez que a condição de definida positiva não é garantida (devido a imposição de zeros em determinadas posições). Existem na literatura algumas maneiras de tentar amenizar este problema [6,7].

Uma das formas que tentam evitar este problema, é a substituição do pivô negativo por um número positivo escolhido convenientemente. Neste trabalho o valor adotado foi o da diagonal principal imediatamente anterior.

## Pré-Condicionadores Incompletos de Bloco

A idéia de fatorização incompleta resumida na subseção anterior tem uma analogia em bloco. Ilustra-se este fato olhando a fatorização incompleta de bloco de Cholesky para a matriz de bloco simétrica, definida positiva :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_4 \\ A_4 & A_2 \end{bmatrix}$$

O caso da partição em 2 blocos como acima, é bastante genérico e será o caso tratado neste trabalho. Entretanto, convém observar que a matriz pode ser particionada em um número maior de blocos e o tratamento dado neste caso é análogo.

Segundo [1] para matrizes armazenadas segundo o envelope ou de banda, não há preenchimento fora do envelope, ou seja, para a matriz  $A$  acima se houverem blocos nulos eles permanecerão nulos na decomposição de Cholesky completa.

A idéia é zerar os blocos fora da diagonal principal e aplicar o Cholesky completo ou incompleto para a matriz resultante, ou seja, a matriz resultante será :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix}$$

à qual será aplicado o método de Cholesky completo ou incompleto.

Mais especificamente, sendo  $L$  o fator de Cholesky exato da matriz  $A$ , obter-se-á uma matriz

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} L_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_2 \end{bmatrix} \text{ tal que se possa facilmente resolver sistemas que envolvam o Pré-Condicionador}$$

$$B = \tilde{L} \tilde{L}^T .$$

Durante a resolução do sistema  $\tilde{L} \tilde{L}^T z = Bz = r$  deve-se resolver efetivamente dois sistemas

lineares a saber :  $\tilde{L}^T z = w$  e  $\tilde{L}w = r$ . Então para resolver

$$\begin{bmatrix} \tilde{L}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{L}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

basta resolver os seguintes sistemas lineares :  $\tilde{L}_1 w_1 = r_1$  e  $\tilde{L}_2 w_2 = r_2$

## Exemplos

Neste capítulo será efetuado um estudo computacional relativo aos métodos apresentados no decorrer do trabalho. Foram testados diversos exemplos e elaboradas tabelas ilustrando as diversas questões computacionais envolvidas. Para efetuar estes testes foram escritos programas em Fortran 77 (cujos relatórios encontram-se em [13] e [20]) e rodados num PC 486 DX 2 -66 com 4 Mb de memória ram. Basicamente, foram comparados o número de iterações para que a convergência ocorresse (utilizando o critério de parada abaixo indicado). Convém ressaltar que os métodos em questão serão os seguintes

**Método 1 :** Gradientes conjugados com Pré-Condicionador Incompleto de Cholesky

**Método 2 :** Gradientes conjugados com Pré-Condicionador Incompleto de Bloco

**Aproximação Inicial :** Foram realizados diversos testes variando-se a aproximação inicial. Adotou-se 4 tipos de aproximações iniciais que serão indicadas em cada exemplo.

**Cr terio de Parada** : O critério de parada adotado foi  $\|r_k\| < \varepsilon \|b\|$  . O valor de  $\varepsilon$  é de  $10^{-5}$ .

**Estrutura das matrizes e obten o dos exemplos** : Nos exemplos aqui considerados, sempre a matriz  $A$    simétrica definida positiva com estrutura   do tipo skyline. Estes exemplos foram gerados pelo Dr. Sérgio Pinheiro utilizando o programa MIX. Um número bem maior de exemplos pode se encontrado em Cimerman[13].

**Coefficiente de Esparsidade** :Define-se coeficiente de esparsidade de uma matriz  $A$  simétrica por :

$$\frac{\text{número de elementos nulos da parte superior da matriz}}{\text{número de elementos total da parte superior da matriz}}$$

Analogamente, o coeficiente de esparsidade para matrizes skyline é definido por :

$$\frac{\text{número de elementos nulos do envelope}}{\text{número de elementos total do envelope}}$$

### Exemplo 1

Esta estrutura do tipo grelha plana foi extraída do piso térreo do Edifício do Banco Itaú da Estação Conceição. A partir desta estrutura foi gerada uma matriz de rigidez de ordem 900 com estrutura do tipo skyline. O coeficiente de esparsidade da matriz em sua estrutura original é 0,8965. A estrutura está representada pela figura 1.

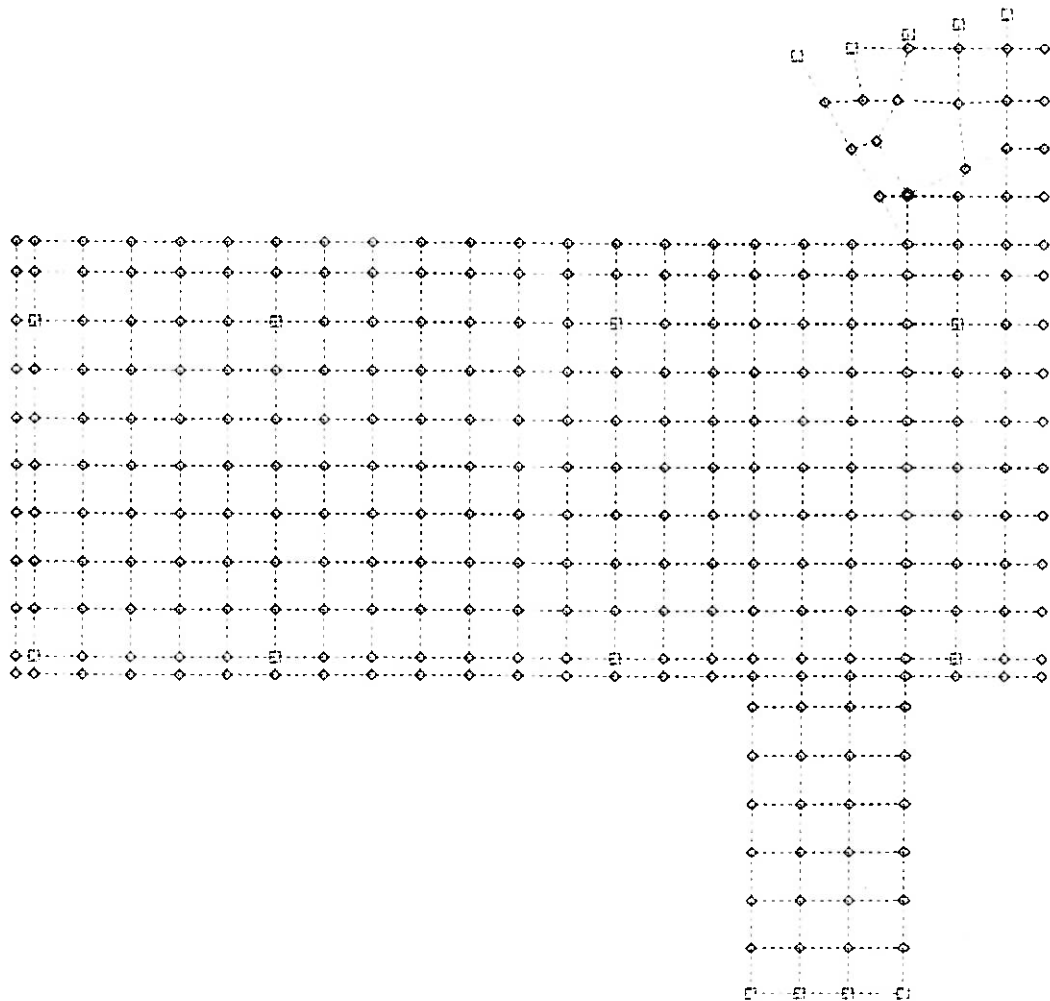
Foram testadas as seguintes aproximações iniciais :

$$x1 = [1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1], \quad x2 = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0],$$

$$x3 = [0 \ 1 \ \dots \ 1 \ 0], \quad x4 = [0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ \dots \dots]$$

Para as diferentes aproximações iniciais o número de iterações variou entre 74 e 105 para Cholesky incompleto e variou entre 84 e 122 iterações para Cholesky incompleto por blocos.

ITAU CONCEICAO (GRAVADO NO MIXL ) PISO METRO SETOR 1 MOD 71 C/ S/C DE 500 EXT. ITAU 900  
ESCALA = 1 : 0



## Exemplo 2

Esta estrutura do tipo grelha plana foi extraída da laje de uma cobertura, com capitéis de 40 cm de altura e lajes de 22 cm e 18 cm de altura. A partir desta estrutura foi gerada uma matriz de rigidez de ordem 750 com estrutura do tipo skyline. O coeficiente de esparsidade da matriz em sua estrutura original é 0,8554.

A estrutura está representada pela figura 2.

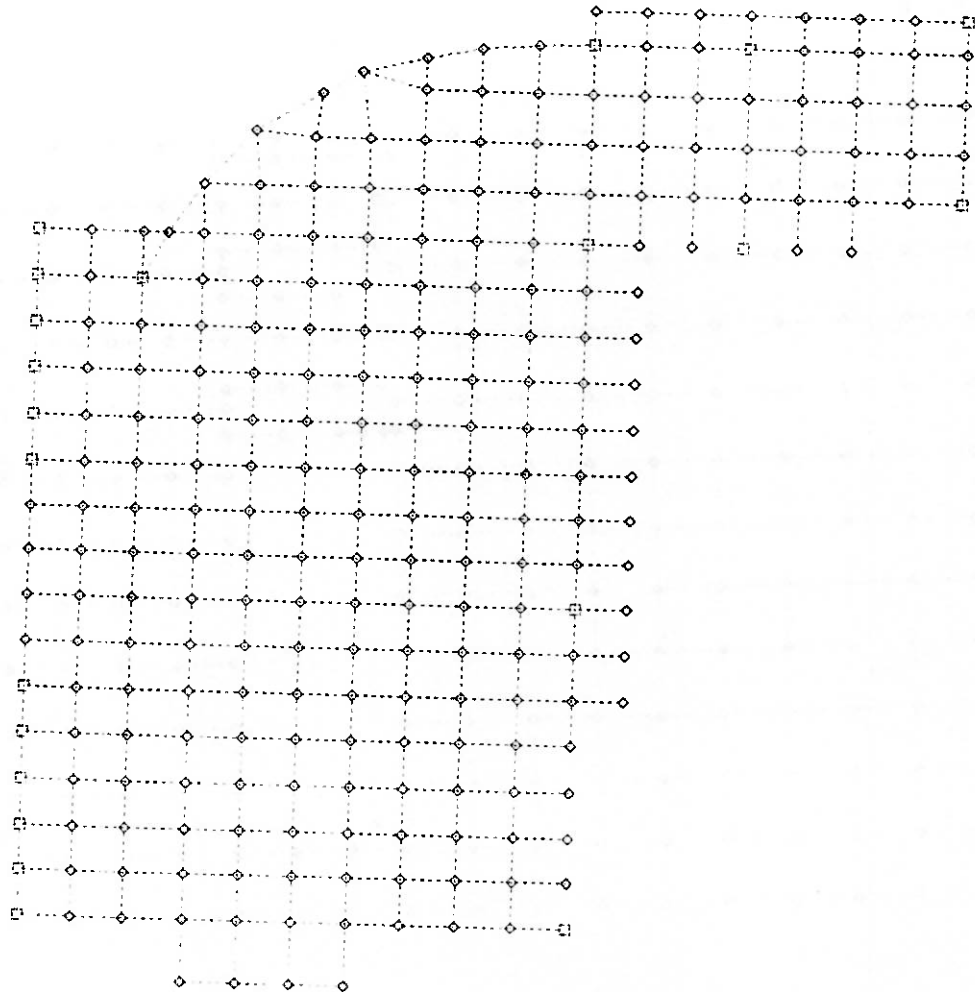
Foram testadas as seguintes aproximações iniciais :

$$x1 = [1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1], \quad x2 = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0],$$

$$x3 = [0 \ 1 \ \dots \ 1 \ 0], \quad x4 = [0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ \dots \ ]$$

Para as diferentes aproximações iniciais o número de iterações variou entre 501 e 511 para Cholesky incompleto e variou entre 551 e 585 iterações para Cholesky incompleto por blocos.

SIFICO - LAJE DA COBERTURA CAPITÉIS H = 40CM E LAJES H = 22 E 18CM  
ESCALA = 1 : 0



### Exemplo 3

Esta estrutura do tipo grelha plana foi extraída do trecho central da laje do piso do Clube Transatlântico. A partir desta estrutura foi gerada uma matriz de rigidez de ordem 850 com estrutura do tipo skyline. O coeficiente de esparsidade da matriz em sua estrutura original é 0,8778. A estrutura está representada pela figura 3.

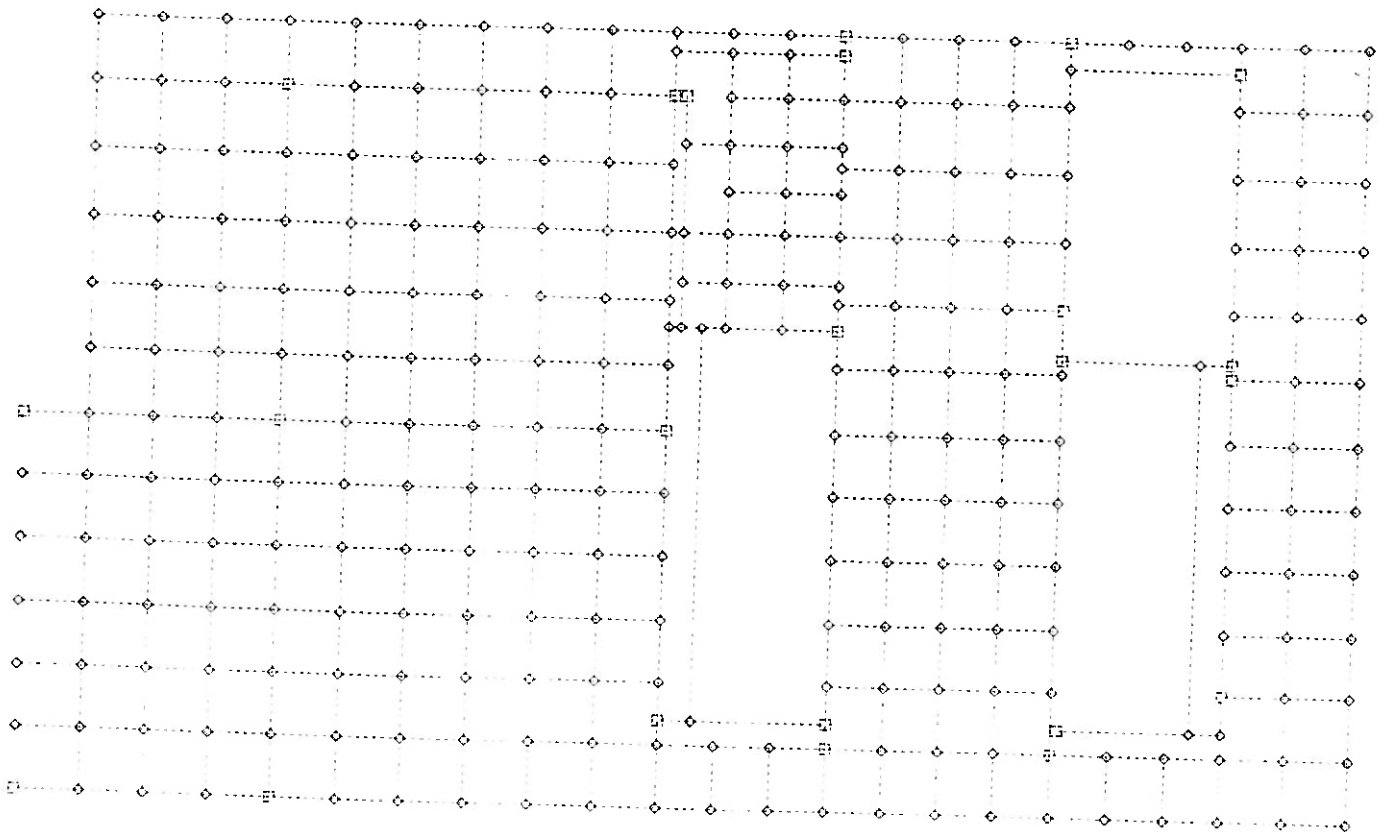
Foram testadas as seguintes aproximações iniciais :

$$x1 = [1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1], \quad x2 = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0],$$

$$x3 = [0 \ 1 \ \dots \ 1 \ 0], \quad x4 = [0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ \dots]$$

Para as diferentes aproximações iniciais o número de iterações variou entre 68 e 103 para Cholesky incompleto e variou entre 77 e 116 iterações para Cholesky incompleto por blocos.

C E TRANSATLANTICO TRECHO B - CENTRAL  
ESCALA = 1 : 0



## Conclusões

Neste trabalho foi efetuado um estudo comparativo de dois tipos de pré-condicionadores em problemas estruturais. Mais especificadamente, foram considerados os pré-condicionadores de Cholesky incompletos e os de Cholesky incompleto por blocos.

O número de iterações foi bastante baixo nos exemplos testados utilizando Cholesky incompleto, entretanto este número aumentou consideravelmente quando foi aplicado Cholesky incompleto por Blocos.

Verificou-se que havendo disponibilidade de memória computacional, é preferível utilizar Cholesky incompleto.

## Bibliografia

- [1] - George A. and Liu J. W. H. , *Computer Solution of Large Positive Definite Systems*, Prentice Hall, NJ, 1981.
- [2] - Medeiros S. R. P., Pimenta P. M. and Goldenberg P. , *A New Algorithm for Profile and Wavefront Reduction of Sparse Matrices with a Symmetric Structure*, *Structural Optimization* 93, The World Congress on Optimal Design of Structural Systems, vol. II, 45-60, 1993.
- [3] - Medeiros S. R. P., Pimenta P. M. and Goldenberg P. , *An Algorithm for Profile and Wavefront Reduction of Sparse Matrices with a Symmetric Structure*, *Engineering Computations*, vol. 10, 257-266, 1993.
- [4] - Sloan S. W. and Ng W. S. A. , *A Direct Comparison of Three Algorithms for Reducing Profile and Wavefront*, *Comput. Struct.*, vol. 33, 411-419, 1989.
- [5] - Pimenta P. M. and Neto M. M. , *Sobre a Solução Iterativa de Sistemas de Equações Lineares em Engenharia Estrutural*, 5<sup>o</sup> Congresso Latino Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, Salvador, Bahia, 1984, apresentado por R. Kochen.
- [6] - Jennings A. and Malik G. M. , *The Solution of Sparse Linear Equations by the Conjugate Gradient Methods*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 12, 1978.
- [7] - Dickinson J. K. and Forsyth P. A. , *Preconditioned Conjugate Gradient Methods for Three-Dimensional Linear Elasticity*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, 2211-2234, 1994.
- [8] - Tan L. H. and Bathe K. , *Studies of Finite Element Procedures - The Conjugate Gradient and GMRES Methods in ADINA and ADINA-F*, *Comput. Struct.*, vol. 40, 441-449, 1991.
- [9] - Hestenes M. R. and Stiefel E. , *Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems*, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, vol. 49, 409-436, 1952.
- [10] - Golub G. H. and Van Loan C. F., *Matrix Computations*, John Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1983.
- [11] - Hughes T. J. , *The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice Hall, NJ, 1987.

- [12] - Fletcher R. , *Practical Methods of Optimization*, Vol. I, Wiley-Interscience Publication, 1985.
- [13] Cimerman M. Gradientes Conjugados pré-condicionados : aplicações em problemas estruturais  
Dissertação de Mestrado a ser apresentada no Departamento de Estruturas e Fundações Escola  
Politécnica USP,1996.
- [14] - Barros I. Q. , *Notas de Aula de Métodos Numéricos de Álgebra Linear*, 1970.
- [15] - Strang G., *Linear Algebra and its Applications*, Academic Press, New York, 1980.
- [16] - Pimenta P. M. and Goldenberg P. , *Programação Matemática aplicada à engenharia das  
Estruturas* , Depto. de Engenharia de Estruturas e Fundações EPUSP, 1994.
- [17] - Luemberger D. G. , *Linear and Nonlinear Programming*, 2<sup>o</sup> ed, Addison-Wesley Publishing  
Company, 1984.
- [18] - Pimenta P. M. and Goldenberg P. , *Apostila do curso de PEF 701 - Métodos Numéricos  
Aplicados à Mecânica das Estruturas* , Depto. de Estruturas e Fundações EPUSP, 1993.
- [19] - Matties H. and Strang G. , *The Solution of Nonlinear Finite Element Equations*, International  
Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 14, 1613-1626, 1979.
- [20] - Pimenta P. M. and Goldenberg P. , *PEFMAT - Relatórios de Subrotinas Matemáticas (I)* ,  
Depto. de Estruturas e Fundações EPUSP, 1989.



BOLETINS PUBLICADOS

- 8501 - "Métodos Variacionais Aplicados à Estabilidade dos Taludes e Fundações" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8502 - "O Processo de Cross Derivado do Método dos Deslocamentos" - JOÃO CYRO ANDRÉ
- 8503 - "Fundações por Bloco" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8504 - "Investigação Experimental sobre o Valor Limite  $W_u$  das Tensões de Cisalhamento no Concreto Estrutural" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 8505 - "Investigação Experimental sobre o Cisalhamento em Lajes de Concreto Armado" - PERICLES BRASILIENSE FUSCO
- 8506 - "Cálculo das Alterações de Tensão, ao Longo do Tempo, nas Peças de Concreto Protendido: Procedimentos Diretos, Simples, Alternativos ao do CIB" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8507 - "Elementos de Cálculo Variacional e suas Aplicações nas Estruturas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8508 - "Spline Cúbico e suas Aplicações" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8509 - "Correlação Paramétrica Deformatória Flexão Composta, Concreto Armado" - PIETRO CANDREVA
- 8510 - "Lugares Geométricos Notáveis na Flexão Composta - Concreto Armado" - PIETRO CANDREA
- 8511 - "Regiões Deformatórias Notáveis Flexão Composta - Concreto Armado" - PIETRO CANDREVA
- 8512 - "Diagramas Momentos - Curvaturas Flexão Composta Normal - Seções Retangulares Armadura Qualquer nas Barras" - PIETRO CANDREVA
- 8601 - "Alterações, ao Longo do Tempo, dos Estados de Tensão nas Seções de Concreto, Armadas para Diferentes Etapas de Carregamento" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8602 - "Peças de Concreto Armadas com Barras Protendidas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8603 - "A Relaxação do Concreto e a Redistribuição das Tensões nas Peças Armadas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8604 - "Análise Não Linear de Treliças Especiais" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8605 - "Variação, no Tempo, do Estado de Tensão nas Seções de Concreto Armado" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8606 - "Evolução ao Longo do Tempo, das Tensões de Cisalhamento nas Vigas de Concreto Protendido" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8607 - "Cômputo de Fluência por Problemas de Estabilidade" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8608 - "Erros Usuais Cometidos nas Determinações das Tensões de Cisalhamento nas Peças de Altura Variável" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8609 - "Contribuição da Fluência do Aço, da Fluência e Retração do Concreto nos Deslocamentos Devidos à Flexão, nas Peças de Concreto Protendido" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8610 - "Sistema VX-IQB para Processamento de Textos Científicos" - IVAN DE QUEIROZ BARROS
- 8611 - "Análise Não Linear de Pórticos Planos" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8612 - "Erros a Serem Evitados no Cálculo de Pórticos, em Particular no dos Edifícios" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8613 - "Mínima Correctio Methodi Inveniendi Lineas Curvas Elasticii" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 8614 - "Nova Técnica para Codificações de Procedimentos Envolvendo Matrizes - Avaliação de Desempenho" - IVAN DE QUEIROZ BARROS
- 8615 - "Casos Especiais de Flambagem de Pórticos de Edifícios Altos" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8616 - "Vigas Protendidas: Alterações das Tensões, das Deformações e dos Deslocamentos ao Longo do Tempo" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8701 - "Consideração sobre Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Reticuladas Planas" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 8702 - "Consideração da Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Laminares Planas" - Parte I - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO

- 8703 - "Consideração da Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Laminadas Planas" - Parte II - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8704 - "Estado Plano de Tensão (Método dos Resíduos Ponderados e Método dos Elementos Finitos)" - VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 8705 - "Aplicação das Equações de diferenças a um Caso Particular de Estrutura" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8706 - "Verificação da Estabilidade dos Pilares de Pontes" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8707 - "Aplicação do Método Variacional ao Cálculo do Empuxo sobre as Paredes de Arrimo" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8708 - "Análise das Chapas em Regime Elasto - Plástico pelo Método dos Elementos Finitos" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8709 - "Análise das Placas em Regime Elasto-Plástico pelo Método dos Elementos Finitos" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8710 - "A Flambagem de Euler e a "Elástica" Revisitadas: Uma Formulação Unificada para os Cinco Casos Clássicos" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 8711 - "Laje Protendida e Perdas de Protensão Resultantes da Retração, Fluência do Concreto e do Aço" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8712 - "O Método dos Elementos Finitos na Solução de Placa, Solicitadas no seu Plano ou Fletidas. Vinculação com o Método de Ritz" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8713 - "Sobre o Conceito de Corpo Material Linearmente Elástico" - PAULO BOULOS
- 8714 - "Rotações Finitas" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8715 - "Efeitos Estruturais de Segunda Ordem nas Treliças" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, YZUMI TAGUTI
- 8716 - "Estudo das Placas: Resíduos Ponderados e Elementos Finitos" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 8717 - "Estacas com Diversos Vínculos de Extremidades Modelo de Winkler. Coeficiente de Reação Lateral do Solo com Distribuição Uniforme" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8718 - "Estacas com Diversos Vínculos de Extremidades - Modelo de Winkler. Coeficiente de Reação Lateral do Solo com Distribuição Triangular" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8719 - "Estacas com Diversos Vínculos de Extremidades - Modelo de Winkler. Coeficiente de Reação Lateral do Solo com Distribuição Trapezoidal" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8720 - "Sobre a Matriz de Rigidez Tangente das Barras de Treliças Planas Sujeitas a Rotações Grandes" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8721 - "Um Método Geral para a Redução da Matriz de Rigidez Tangente de Elementos Finitos" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8722 - "A Matriz de Rigidez Tangente do Elemento de Pórtico Plano - Teoria de Timoshenko" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8801 - "Distribuição Transversal de Carga nas Pontes de Vigas Justapostas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8802 - "O Método de Galerkin no Problema das Placas Fletidas - Teoria de Reissner" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA
- 8803 - "Um Algoritmo para o Cálculo do Tensão Rotação e do Tensão das Deformações Logarítmicas em Problemas Incrementais" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8804 - "Um Algoritmo para a Integração das Tensões na Plasticidade Perfeita" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8805 - "Análise das Cascas Cilíndricas em Regime Elasto Plástico pelo Método dos Elementos Finitos" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8806 - "Consideração do Efeito de Membrana nas Placas pelo Método dos Elementos Finitos" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8807 - "Alteração do Estado de Tensão nas Estruturas Hiperestáticas Devida à Fluência do Aço, do Concreto e Retração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8808 - "O Método dos Mínimos Quadrados no Exame de alguns Casos de Instabilidade, Computada à Fluência do Material" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8809 - "A Matriz de Rigidez Tangente do Elemento de Pórtico Espacial" - PAULO DE MATTOS PIMENTA

- 8810 - "Consideração da Fluência do Material da Determinação da Carga Crítica das Barras Mergulhadas em Meio Elástico" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8811 - "Um Programa para Solução do Problema Generalizado de Autovalores e Autovetores para Matrizes Reais Densas" - PRISCILA GOLDENBERG, REYOLANDO M.L.R.F. BRASIL, MARCIA CIMERMANN
- 8812 - "Pilar de Pontes: Riscos dos Cálculos Correntes" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8813 - "Sugestes à Norma, em Discussão, sobre Projeto de Estrutura de Concreto Protendido" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8814 - "Esforços Resistentes do Concreto" - LAURO MODESTO DOS SANTOS
- 8815 - "Tabelas Momento - Curvatura" - LAURO MODESTO DOS SANTOS
- 8816 - "Análise Não-Linear de Arcos" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8817 - "Estados Limites das Unies Pregadas de Madeira" - PERICLES BRASILIENSE FUSCO, PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA
- 8818 - "O Emprego da Técnica de Aceleração da Convergência para a Resolução de Problemas Estruturais Através do Método dos Elementos Finitos por Algoritmo do Tipo Resíduo das Tensões" - FRANCISCO BRASILIENSE FUSCO JR., RUBENS AKEL
- 8819 - "Um Critério para o Estabelecimento dos Estimadores de Erro para os Elementos Finitos Adaptativos na Modalidade P" - FRANCISCO BRASILIENSE FUSCO JR. JARBAS A. GUEDES
- 8820 - "Non-Linear Finite-Element Formulation in Dynamic" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 8821 - "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" de Newton: 300 Anos - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8822 - "A Estabilidade das Fundações Arenosas Estratificadas, Segundo V. V. Sokolovisky" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8823 - "Flambagem de Estacas Totalmente Enterradas. Solo com Coeficiente de Reação Variável" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8824 - "As Equações de Vlasov e a Estabilidade Espacial das Barras de Seção Delgada" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8825 - "Um Programa para Solução de Sistemas Lineares de Grande Porte - Aplicação à Engenharia de Estruturas" - PRISCILA GOLDENBERG, REYOLANDO M.L.R.F. BRASIL
- 8826 - "Sobre a Aceleração do Centro Instantâneo de Rotação" - NELSON ACHCAR, PAULO BOULOS
- 8827 - "Esforços Resistentes do Concreto" - LAURO MODESTO DOS SANTOS
- 8828 - "Tabelas Momento-Curvatura" - LAURO MODESTO DOS SANTOS
- 8901 - "A Estimativa da Coesão para o Cálculo da Estabilidade de Aterros e Fundações sobre Argilas Moles" - CARLOS DE SOUSA PINTO
- 8902 - "Trelças Espaciais de Madeira em Regime Viscoelástico sob Não-Linearidade Geométrica" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, TAKASHI YOJO
- 8903 - "O Método dos Prismas Equivalentes Aplicado ao Cálculo das Variações de Tensão, ao Longo do Tempo, nas Seções de Concreto" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8904 - "Efeitos de Laje Concretada Posteriormente sobre Viga Protendida" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ, JOSÉ LOURENÇO BRAGA DE ALMEIDA CASTANHO
- 8905 - "O Cálculo das Grelhas de Pontes pelo Método de Courbon: Uma Hipótese por Demonstrar" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8906 - "Erosão - Erosão em Área Urbana - Erosão Associada à Construção de Estradas Vicinais" - VERA MARY NINETA COZZOLINO
- 8907 - "Solos Tropicais - Proposta de Classificação Baseada nas Características de Compactação" - VERA MARY NINETA COZZOLINO
- 8908 - "Método Variacional de Cálculo de Construções Estaiadas sob Cargas Dinâmicas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8909 - "Métodos Aproximados de Determinação de Frequência de Vibração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8910 - "Non-Linear Analysis of Plane Framer I. Quasi-Static Analysis of Plane Framer with Initially Curved Members" - PAULO DE MATTOS PIMENTA

- 8911 - "Non-Linear Analysis of Plane Framers II. Dynamic Analysis of Plane Framers with Initially Curved Members" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8912 - "Derivation of Tangent Stiffness Matrices of Simple Finite Elements 1. Straight Bar Elements" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8913 - "A Stress Integration Algorithm for the Analysis of Elastic-Plastic Solids by the Finite Element Method I. Small Deformation Analysis" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8914 - "A Stress Integration Algorithm For the Analysis of Elastic-Plastic Solids by the Finite Elements Method II. Large Deformation Analysis" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8915 - "Flambagem de Estacas Parcialmente Enterradas Solo com Coeficiente de Recalque Constante" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8916 - "Caracterização da Deformabilidade na Elasticidade Linear" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 8917 - "Um Pacote de Subrotinas Matemáticas para o LMC" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG
- 8918 - "Relatório de Subrotinas Matemáticas (I)" - PRISCILA GOLDENBERG, PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8919 - "Relatório de Subrotinas Matemáticas (II)" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG
- 8920 - "Viga Contínua Mista Aço-Concreto, Conectada Elasticamente, sob a Aço da Fluência e Retração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8921 - "Relatórios de Subrotinas Matemáticas (III)" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG
- 8922 - "O Problema da Flexão Plana na Teoria da Elasticidade dos Corpos Não Homogêneos" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8923 - "Alterações das Tensões de Cisalhamento nas Peças de Concreto Protendido, devidas à Fluência e Retração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9001 - "Os Deslocamentos Devidos a Flexão das Vigas Protendidas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9002 - "Dinâmica das Estruturas Aportricadas Planas e Comportamento Geometricamente Não Linear" - REYOLANDO M. L. R. F. BRASIL, CARLOS E. N. MAZZILLI
- 9003 - "Teoria de Segunda Ordem das Placas - Estudo da Rigidez Secante" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 9004 - "Influência das Tensões de Cisalhamento na Deformação da Viga sob o Regime Elasto-Plástico" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9005 - "Ainda a Estabilidade dos Sistemas Elásticos. Aceno Histórico. O Erro de Euler" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9006 - "A Origem das Funções de Bessel com algumas Aplicações em Problemas Estruturais" - AUGUSTO CARLOS DE VASCONCELOS
- 9007 - "Considerações sobre o Emprego do Teorema dos Trabalhos Virtuais na Resolução de Estruturas Hiperestáticas" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9008 - "Non-linear Finite-element Formulation in Dynamics II" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 9009 - "Fatores de Forma e Fatores de Carga Generalizados" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9010 - "Corpos Hipereelásticos Homogêneos Transversalmente Isotrópicos No Ortotrópicos" - NELSON ACHCAR
- 9011 - "Análise das Cascas de Revolução em Regime Elasto Plástico pelo Método dos Elementos Finitos" - JOSÉ MARQUES FILHO, LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9012 - "O Algoritmo de Mínimo Grau para Reordenação e Solução de Sistemas Lineares Esparsos" - PRISCILA GOLDENBERG, REYOLANDO M. L. R. F. BRASIL, SÉRGIO PINHEIRO
- 9101 - "Consideração da Não-Linearidade Física e da Não-Linearidade Geométrica na Análise das Placas pelo Método dos Elementos Finitos - Parte 1" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9102 - "Introdução ao Estudo dos Pórticos Esbeltos - Matriz de Rigidez Secante" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, ALFONSO PAPPALARDO JR.
- 9103 - "Cálculo de Estruturas Sujeitas a Terremotos" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, SELMA H. SHIMURA
- 9104 - "Análise Não - Linear de Pórticos Espaciais - Parte I: Teoria e Método dos Elementos Finitos" - PAULO M. PIMENTA, TAKASHI YOJO

- 9105 - "Flambagem de Edifícios Altos" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9106 - "Programas de Microcomputador para Análise Dinâmica de Estruturas nos Domínios do Tempo e da Frequência" - REYOLANDO M. L. R. DA F. BRASIL
- 9107 - "Variação nas Peças Protendidas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9108 - "Análise das Placas Sujetas a Grandes Rotações Mediante o Uso do Método dos Elementos Finitos" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9109 - "Consideração Tópica sobre o Código Modelo 1990 do CEB-FIP" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9110 - "Materiais Compatíveis com as Barras Cujas Secções Normais Permanecem Planas" - NELSON ACHCAR
- 9111 - "Dinâmica das Placas: Elementos Finitos via Resíduos Ponderados" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, FLAVIO JOSÉ GARZERI, REYOLANDO M. L. R. FONSECA BRASIL
- 9112 - "Estabilidade do Equilíbrio dos Sistemas no Campo Conservativo de Forças" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9113 - "Sobre a Estabilidade Elástica de Arcos Abatidos" - REYOLANDO M. L. R. FONSECA BRASIL, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 9114 - "Considerações Teóricas sobre o Adensamento Secundário" - HELOISA HELENA SILVA GONÇALVES
- 9115 - "Teoria de Vlassov sobre Barras, Placas e Cascas, de Parede Fina, Protendidas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9201 - "Consideração da Não-Linearidade Física e da Não-Linearidade Geométrica na Análise das Placas pelo Método dos Elementos Finitos - Parte II" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9202 - "Sobre a Interpretação de Provas de Carga em Estacas Considerando as Cargas Residuais de Ponta e a Reversão do Atrito Lateral" - FAIÇAL MASSAD
- 9203 - "Um Programa para Análise Limite de Pórticos Planos em Regime Elasto-Plástico" - REYOLANDO M. L. R. DA FONSECA BRASIL
- 9204 - "Equação Constitutiva das Barras Hiperelásticas Transversalmente Isotrópicas" - NELSON ACHCAR
- 9205 - "Análise Não-Linear de Pórticos Espaciais de Madeira" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, TAKASHI YOJO
- 9206 - "Perda de Estabilidade à Tração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9207 - "Teoria de Segunda Ordem das Placas - Estudo da Rigidez Tangente" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 9208 - "Vibrações Não-Lineares de Placas" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, REYOLANDO M. L. R. DA FONSECA BRASIL, PAULO SHIGUEME IDE
- 9209 - "Variedades Vinculadas Reduzidas" - PAULO BOULOS, NELSON ACHCAR,
- 9210 - "Estudo da Perda de Estabilidade Segundo Critérios Dinâmicos" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9211 - "Programas de Microcomputador para Análise Dinâmica de Estruturas - Parte II - Vários Graus de Liberdade" - REYOLANDO M. L. R. DA FONSECA BRASIL
- 9212 - "Otimização da Deposição de Rejeitos" - LUIZ GUILHERME F. S. DE MELLO
- 9213 - "Andros - a Finite Element Program From Nonlinear Dynamics" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI, REYOLANDO M. L. R. DA FONSECA BRASIL
- 9214 - "Considerações sobre o Cálculo Dinâmico de Estruturas Usando Transformadas de Fourier" - ALFREDO PINTO DA CONCEIÇÃO NETO, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 9215 - "Placas Delgadas" - ALFONSO PAPPALARDO JUNIOR, HENRIQUE DE BRITTO COSTA
- 9216 - "Excitação Paramétrica em Sistemas com um Grau de Liberdade" - MARIO EDUARDO SENATORE SOARES, CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 9301 - "PEFMAT - Relatórios de Subrotinas Matemáticas - Parte IV" - PRISCILA GOLDENBERG, PAULO DE MATTOS PIMENTA, MARCIA CIMERMAN
- 9302 - "Vibrações de Pórticos com Vigas de Rigidez Infinita" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9303 - "Direct Along - Wind Dynamic Analysis of Tall Structures" - MARIO FRANCO
- 9304 - "Comportamento Pós-Crítico de Barra Delgada Protendida" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ

- 9305 - "Os Polinômios Trigonométricos na Solução de Problemas de Vibração Mecânica" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9306 - "Linhas de Influência Dinâmicas para Deslocamentos, Momentos Fletores e Forças Cortantes nas Vigas Simples" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9307 - "O Modelo Clam-Clay Revisto" - JOSÉ JORGE NADER
- 9308 - "Patologia da Concepção Estrutural: Danos por Efeitos de Segunda Ordem em Edifícios Altos, um Exemplo" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9309 - "Vibração de Sistemas Não Lineares: Método de Aproximações Sucessivas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9310 - "Normalização dos Símbolos Gráficos para Projetos de Estruturas de Madeira" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9311 - "Ensaio de Adensamento" - HELOISA HELENA SILVA GONÇALVES
- 9312 - "Comentários sobre a Normalização das Ações e Segurança nas Estruturas" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9313 - "Introdução à Análise Dinâmica de Estruturas por Meio de Elementos Finitos - Parte I - Galerkin e Elementos Finitos" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, SELMA HISSAE SHIMURA
- 9314 - "Vibrações Aleatórias na Dinâmica de Estruturas" - REYOLANDO M. L. R. F. BRASIL
- 9315 - "Determinação da Equação para Cálculo do Momento Crítico à Flambagem Lateral" - VALDIR PIGNATTA E SILVA, LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9316 - "Efeito dos Sismos nas Estruturas Aporticadas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9317 - "As Estruturas Aporticadas com Vigas de Rigidez Infinita, Submetidas ao Sismo" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9318 - "Uma Proposta de Normalização das Resistências da Madeira Estrutural" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9319 - "Resistência dos Materiais Anisotrópicos" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9401 - "Soluções Analíticas para a Deformação do Material Elasto - Plástico Cam - Clay úteis na Interpretação de Ensaio Triaxiais com Diferentes Trajetórias de Tensão" - JOSÉ JORGE NADER
- 9402 - "Introdução à Fotoelasticidade por Reflexão" - PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA, FRANCISCO ROURE FERNANDEZ, FREDERIC MARINON CARVAJAL
- 9403 - "Numerical Conditioning in Structural Solutions: a Proposal for a new Condition Number" - HENRIQUE LINDENBERG NETO
- 9404 - "A Esbeltez Estrutural e sua Influência nas Frequências de Vibrações" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9405 - "Determinação do Momento Crítico à Flambagem Lateral de Viabilizadas de Aço" - VALDIR PIGNATTA E SILVA, LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9406 - "Uma Análise dos Parâmetros de Ensaio Utilizados para Cálculo de Recalques por Adensamento" - HELOISA HELENA SILVA GONÇALVES
- 9407 - "Programação Matemática Aplicada à Análise Limite de Estruturas" I - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG, ERNESTO COUTINHO COLLA
- 9408 - "Programação Matemática Aplicada à Análise Limite de Estruturas II" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG, ERNESTO COUTINHO COLLA
- 9409 - "Formulação de um Elemento Finito de Cabo Incorporando o Efeito do Atrito" - RUY M. PAULETTI, PAULO M. PIMENTA
- 9410 - "A Descrição do Domínio para o Projeto por Elementos Finitos" - JOSÉ ANTONIO LEROSA SIQUEIRA, JOÃO CYRO ANDRÉ
- 9411 - "O Método dos Elementos Finitos Aplicado a uma Formulação Mista da Teoria das Placas" - MYRIAM RENATA DIAS FERREIRA, HENRIQUE DE BRITTO COSTA
- 9412 - "Problemas Envolvendo Ponto, Reta e Plano, Tratados Vetorialmente" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9413 - "Auto - Sincronização de Motores Não - Ideais Apoiados em Estruturas Elásticas" - PETRUS GORGONIO BULHES DA NOBREGA, CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 9501 - "Global and Local Instability of Concrete Tall Buildings" - M. FRANCO
- 9502 - "Um Elemento Finito Giroscópio" - MARCELO GONZALES BERGWEILER, CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI

- 9503 - "Teoria da Segunda Ordem das Placas - Uma Formulação Mista" - SELMA HISSAE SHIMURA, HENRIQUE DE BRITTO COSTA
- 9504 - "Modelagem de Corpos Sólidos: Topologia e Operadores de Euler" - BENEDITO ROQUE DE GUIMARÃES ARANTES JUNIOR, JOÃO CYRO ANDRÉ, JOSÉ ANTONIO LEROSA DE SIQUEIRA
- 9505 - "Investigação Experimental em Laje de Concreto Armado Apoiada em Vigas Flexíveis" - ANTONIO RUBENS PORTUGAL MAZZILLI
- 9506 - "Influência da Flexibilidade das Vigas e das Lajes nos Esforços das Estruturas de Concreto Armado" - ANTONIO RUBENS PORTUGAL MAZZILLI
- 9507 - "A Calibração da Segurança na Nova Norma de Projeto de Estruturas de Madeira" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9508 - "Método de Ensaio de Punção Excêntrica em Placa de Concreto" - FÁBIO ARMANDO BOTELHO CORDOVID, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9509 - "Ensaio de Placas de Concreto Armado - Punção Excêntrica" - FÁBIO ARMANDO BOTELHO CORDOVID, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9510 - "Armadura de Cisalhamento para Punção em Placas de Concreto" - FÁBIO ARMANDO BOTELHO CORDOVID, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9511 - "Aspectos Normativos sobre Punção em Placas de Concreto Armado" - FÁBIO ARMANDO BOTELHO CORDOVID, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9512 - "Alternativas de Representação da Protensão, no Projeto de Estruturas de Concreto" - KALIL J. SKAF, FERNADO R. STUCCHI
- 9513 - "Aplicações do Lagrangeano Aumentado em Otimização Estrutural" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG, REYOLANDO BRASIL
- 9514 - "Análise Linear da Estabilidade de Treliças Utilizando o Método de Lanczos" - CÉLIA REGINA MORETTI MEIRELLES, PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 9515 - "Análise Dinâmica de Pórticos Planos sob Ação de Carregamentos Transientes Considerando Formação de Rótulas Plásticas" - REYOLANDO M. L. R. F. BRASIL, CESAR FERNANDES JUNIOR
- 9516 - "A Engenharia da Fusão Termonuclear Controlada. Sua História e seu Futuro" - RUY MARCELO DE OLIVEIRA PAULETTI, VICTOR MANOEL DE SOUZA LIMA
- 9517 - "Considerações sobre o Emprego do Teorema dos Trabalhos Virtuais na Resolução de Estruturas Hiperestáticas: - Pórticos" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9518 - "Flambagem Lateral de Vigas de Madeira" - VALDIR PIGNATTA E SILVA
- 9519 - "Diagramas Tensão-Deformação dos Aços Estruturais Submetidos a Altas Temperaturas" - VALDIR PIGNATTA E SILVA, PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 9520 - "Uma Aplicação da Teoria Constitutiva dos Materiais Elásticos-Lineares Sujeitos a Vínculos Internos: Dedução Exata da Equação de Lagrange para Placas Finas" - JOÃO MAURÍCIO SAPIENZA, NELSON ACHCAR
- 9521 - "Conceitos Básicos sobre Geração Automática de Malha" - JOSÉ FERNANDO MANTOVANI MICALI, JOÃO CYRO ANDRÉ
- 9522 - "Equações Constitutivas do Concreto Baseadas na Mecânica do Dano Contínuo" - FLÁVIO LUIZ DE S. BUSSAMRA, PAULO DE M. PIMENTA
- 9601 - "Engineering Design of the Central Core of the TBR-E Small Aspect Ratio Tokamak" - R. M. O. PAULETTI, R. M. O. GALVÃO, G. O. LUDWIG, F. T. DEGASPERI, I. C. NASCIMENTO
- 9602 - "Norma de Projeto de Estruturas de Madeira" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO, CARLITO CALIL JÚNIOR, PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA
- 9603 - "Desenho de Estruturas de Madeira" - CARLITO CALIL JÚNIOR, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO, PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA
- 9604 - "Determinação das Propriedades das Madeiras para Projeto de Estruturas" - PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA, CARLITO CALIL JÚNIOR, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9605 - "Determinação de Resistências das Ligações Mecânicas das Estruturas de Madeira" - PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO, CARLITO CALIL JÚNIOR
- 9606 - "Recomendações Sobre a Durabilidade das Madeiras" - CARLITO CALIL JÚNIOR, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO, PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA

9607 - "Valores Médios Usuais de Resistência e Rigidez de Algumas Madeiras Nativas e de Florestamento" - CARLITO CALIL JÚNIOR, ALMIR SALES, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO

9608 - "Isotropia e Ortotropia em Lajes de Concreto Armado, Charneiras Plásticas - Apoios Rígidos" - ANTONIO RUBENS PORTUGAL MAZZILLI

9609 - "Considerações sobre a Resistência da Madeira Serrada Brasileira" - PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA

9610 - "LAOS - Um Pacote Computacional Orientado para Objetos para Manipulação de Matrizes e Vetores" - I. Q. BARROS, T. N. BITTENCOURT, C. WAKAMATSU

9611 - "Computer Simulation of Arbitrary, Cohesive Crack Propagation in Concrete" - T. N. BITTENCOURT, A. R. INGRAFFEA, J. LLORCA

9612 - "Métodos Numéricos para Análise Dinâmica de Estruturas Duplamente Calçadas" - LAU KWAN FU, CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI

9613 - "Análise Não-Linear de Trelças Espaciais: Teoria Exata vs. Teoria de Segunda Ordem" - PAULO M. PIMENTA