

# SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DO DISCO ANISOTRÓPICO UTILIZANDO O MÉTODO DO LAGRANGIANO AUMENTADO

**Marcos Vinicius Araújo Geraldes Mariani**

**Lucas Almeida Rocha**

**Adair Roberto Aguiar**

Escola de Engenharia de São Carlos/Universidade de São Paulo

marcosmariani@usp.br

## Objetivos

Aplica-se o Método do Lagrangiano Aumentado em problemas da Elasticidade Linear Clássica. Em especial, deseja-se obter o campo de deslocamento de um disco anisotrópico comprimido radialmente que minimiza a energia potencial total do disco sujeita a uma restrição de injetividade. Visa-se comparar os resultados obtidos pelo Método do Lagrangiano Aumentado com resultados da literatura obtidos pelo Método das Penalidades.

## Métodos e Procedimentos

Considera-se o problema de minimização do potencial de energia da Elasticidade Linear Clássica sujeito à restrição de injetividade, o qual é dado por

$$\min_{\mathcal{H}} \mathcal{E}[u] = \frac{1}{2} \int_B C[E] \cdot E \, dA + \int_{\partial B} u \cdot p \, d\rho$$

onde a região admissível  $\mathcal{H}$  é um espaço de funções que satisfazem a restrição de injetividade  $c(u) = (1 + u')(1 + u/\rho) - \varepsilon \geq 0$ .

Na formulação acima,  $\rho$  é o raio do disco,  $C[E]$  fornece a tensão no disco,  $E$  é o tensor deformação infinitesimal e  $p$  é uma pressão uniforme aplicada no bordo do disco. Além disso,  $u$  representa o campo de deslocamento do disco e  $\varepsilon$  é uma constante pequena maior do que zero.

Empregou-se a formulação do Lagrangiano Aumentado, dada por (NOCEDAL, 2006)

$$L_a(u, \mu, r) = F(u) + \sum \psi(c(u), \mu, r)$$

onde

$$\psi(c(u), \mu, r) = \begin{cases} -\mu c(u) + \frac{r}{2} c(u)^2, & \text{se } c(u) - \frac{\mu}{r} \leq 0 \\ -\frac{1}{2r} \mu^2, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

sendo  $c(u) = (1 + u')(1 + u/\rho) - \varepsilon$  a restrição de injetividade do problema.

Os parâmetros  $\mu$  e  $r$  representam, respectivamente, o vetor de Lagrange e o termo de penalidade. No caso em estudo, adotou-se que cada grau de liberdade da malha gerada apresentava um valor de  $\mu$ , sendo necessário aproximar esse vetor por  $\mu_h$ . Além disso, a função  $F(u)$  representa a função objetivo original do problema, a qual é obtida do potencial de energia após discretização por elementos finitos.

Sendo assim, considerando a Lei de Hooke Generalizada para um material ortotrópico em relação a um sistema de coordenadas cilíndricos e sabendo-se que o deslocamento do disco é radialmente simétrico, construiu-se a seguinte formulação discreta

$$L_{ah}(u_h, \mu_h, r) = \pi \int_0^{\rho_e} \left( \left[ \rho c_{11} u_h'^2 + 2 c_{12} u' u + c_{22} \frac{u^2}{\rho} \right] + 2\rho \psi(u_h, \mu_h, r) \right) d\rho - 2\pi u_h(\rho_e) p \rho_e$$

onde  $\psi(u_h, \mu_h, r)$  foi dado acima. Os termos  $u_h$ ,  $u'_h$  e  $\mu_h$  representam, respectivamente,

aproximações de  $u, u'$  e  $\mu$  obtidas pelo Método dos Elementos Finitos, sendo iguais a

$$u_h = \mathbf{s} \cdot \mathbf{g} ; \quad u'_h = \mathbf{s} \cdot \mathbf{g}' ; \quad \mu_h = \mathbf{w} \cdot \mathbf{g}$$

onde  $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$  é o vetor que contém o valor do deslocamento radial em cada grau de liberdade,  $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_N\}$  o vetor que contém o valor do parâmetro de Lagrange em cada grau de liberdade,  $\mathbf{g} = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$  representa o vetor das funções de forma lineares adotadas e  $\mathbf{g}' = \{\phi'_1, \phi'_2, \dots, \phi'_N\}$  representa o vetor das derivadas dessas funções de forma as quais são constantes por partes.

A busca de uma solução do problema de minimização com restrição consiste em resolver numericamente problemas de minimização sem restrição utilizando o Método de Newton-Raphson. A convergência era verificada se a atualização de  $\mu_h$  fosse pequena o suficiente. Nesse caso, adotava-se  $u_h$  como solução do problema. Se não, atualizava-se o termo de penalidade e o vetor dos parâmetros de Lagrange e resolia-se o problema irrestrito para os parâmetros atualizados.

A formulação discreta foi implementada em um código C++ e utilizou-se a biblioteca de elementos finitos Deal.II (ARNDT et al., 2020) para gerar os resultados numéricos.

## Resultados

Utilizando os valores de  $c_{11} = 10^5, c_{12} = c_{22} = 10^3, \rho_e = 1$  e  $p = -500$  (ROCHA, 2021), obteve-se o gráfico da Figura 1, em que se mostra o deslocamento radial  $u$  na ordenada da esquerda e o determinante do gradiente de deformação  $J$  na ordenada da direita versus o raio  $\rho$  no intervalo  $(0,0.008)$  para malhas de  $N$  elementos finitos.

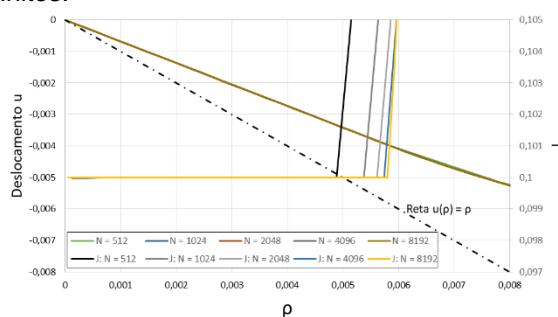


Figura 1: Deslocamento radial  $u$  e determinante  $J$  vs  $\rho \in (0,0.008)$

Comparando o gráfico acima com os valores obtidos por Rocha (2021), observou-se uma

concordância entre os resultados obtidos. É interessante notar que o campo de deslocamento obtido não cruza a reta  $u(\rho) = \rho$  em nenhum ponto, ou seja, a solução encontrada nesse trabalho não apresenta intersecção de material no centro do disco como ocorre na Elasticidade Linear Clássica.

Ademais, obteve-se o gráfico da Figura 2, que mostra o multiplicador de Lagrange  $\mu$  versus o raio  $\rho \in (0,0.008)$ . Conforme esperado teoricamente,  $\mu$  assume valores não nulos somente na região onde a restrição é ativa, ou seja, próximo ao centro. Além disso,  $\mu$  tende ao infinito à medida que  $\rho \rightarrow 0$ .

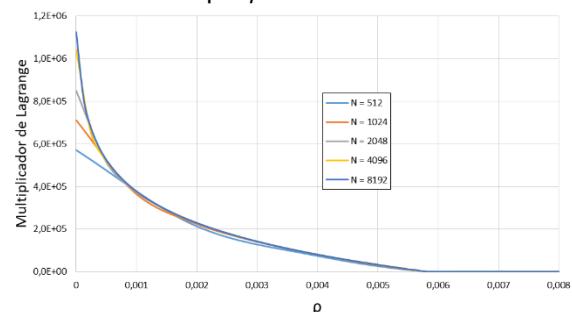


Figura 2: Multiplicador de Lagrange  $\mu$  vs  $\rho \in (0,0.008)$

## Conclusões

O Método do Lagrangiano Aumentado representa uma boa ferramenta na resolução de problemas de minimização da Elasticidade com restrição, apresentando resultados coerentes com valores obtidos por outros métodos, tal como o Método das Penalidades. Sendo assim, esse método apresenta grande potencial para a solução aproximada de problemas mais complexos.

## Referências Bibliográficas

- ARNDT,D et al. **The deal.ii library, version 9.2.** Journal of Numerical Mathematics, 2020.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical optimization.** 2. Ed. Nova York: Springer, 2006, 664 p.
- ROCHA, L.A. **Bifurcating solutions of anisotropic disk problem in a constrained minimization theory of elasticity.** 128 p. Dissertação – Escola de Engenharia de São Carlos, 2021.