ÁLGEBRAS DE TIPO MESH

Flávio Ulhoa Coelho
Rosana Retsos Signorelli Vargas

Seja Λ uma k-álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado, associativa e com identidade. Denotamos por $mod\Lambda$ a categoria dos Λ-módulos finitamente gerados à direita. Estamos interessados em estudar a teoria de representações de Λ, isto é, descrever a categoria $mod\Lambda$ no caso em que Λ é uma álgebra de tipo mesh. Uma estratégia usada é utilizar técnicas de recobrimento para reduzir o problema para o caso em que a álgebra é simplesmente conexa, então resolvendo o problema neste caso. Esta estratégia tem sido eficiente no caso em que a álgebra é de tipo de representação finito e as álgebras simplesmente conexas de tipo de representação finito são bem conhecidas. Como não se sabe muito sobre técnicas de recobrimento para o caso de tipo de representação infinito, temos que é um problema interessante descrevermos álgebras simplesmente conexas de tipo de representação infinito. Para álgebras de tipo de representação infinito, o conceito de fortemente simplesmente conexa (ver [16]) parece ser mais acessível e ultimamente tem atraído o interesse de muitos pesquisadores ([1], [2], [3], [4]). Com este objetivo, neste trabalho, obtivemos uma descrição das álgebras de tipo mesh (maior parte de tipo de representação infinito) que são fortemente simplesmente conexas.

1 Algumas definições:

Definição 1.1. *Uma **aljava** Δ é dada por dois conjuntos Δ_0 e Δ_1, onde os elementos de Δ_0 são chamados de **vértices** e os elementos de Δ_1 são chamados de **flechas** e duas aplicações*

$$\begin{array}{rcl} s: \Delta_1 & \longrightarrow & \Delta_0 \\ \alpha & \longmapsto & x \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rcl} e: \Delta_1 & \longrightarrow & \Delta_0 \\ \alpha & \longmapsto & y \end{array}$$

que indicam os vértices inicial e final da flecha $\alpha : x \to y$.

Um **caminho** γ na aljava Δ é definido da seguinte forma: $\gamma = \alpha_n \ldots \alpha_1$ onde para cada $1 \leq i \leq n-1$, $e(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$. O número de flechas neste caminho γ $(= n)$ é o **comprimento** de γ e será denotado por $l(\gamma)$. No caso em que γ não é um caminho trivial e $s(\gamma) = e(\gamma)$

dizemos que γ é um **circuito orientado**. Quando $l(\gamma) = 1$ e $s(\gamma) = e(\gamma)$ dizemos que γ é um **laço**. Uma **aljava dirigida** é uma aljava que não possui circuitos orientados.

Definição 1.2. *Uma aljava Δ é dita com* ***translação*** *quando :*

- *Δ for localmente finita (isto é, cada vértice de Δ_0 é o vértice inicial e final de apenas um número finito de flechas);*
- *Δ não tiver laços;*
- *Existir uma aplicação bijetora* $\begin{array}{rccc} \tau : & \widehat{\Delta}_0 & \longrightarrow & \widehat{\widehat{\Delta}}_0 \\ & x & \longmapsto & \tau x \end{array}$ *onde $\widehat{\Delta}_0$ e $\widehat{\widehat{\Delta}}_0$ são subconjuntos de Δ_0, tal que se $x \in \widehat{\Delta}_0$ então para todo $y \in \Delta_0$, o número de flechas de y para x é igual ao número de flechas de τx para y.*

2 Álgebras de tipo mesh

Seja Δ uma aljava com translação. Uma **relação de tipo mesh** de um vértice x em Δ é a combinação linear

$$m_x = \sum_{\{\alpha \in \Delta_1 / e(\alpha) = x\}} \alpha\sigma(\alpha)$$

onde σ é uma semitranslação fixada definida em Δ.

Definição 2.1. *Seja Δ uma aljava finita com translação. A álgebra $\Lambda = \frac{k\Delta}{\mu}$ onde μ é o ideal em $k\Delta$ gerado pelo conjunto das relações de tipo mesh é chamada a* ***álgebra de tipo mesh*** *associada a Δ.*

Como exemplos bem conhecidos de álgebras de tipo mesh temos as álgebras hereditárias (todo submódulo de um módulo projetivo é projetivo) e as álgebras de Auslander. Uma álgebra de Auslander é uma álgebra de endomorfismos $A = End_\Lambda(\bigoplus_{i=1}^{d} M_i)$ onde Λ é uma álgebra de tipo de representação finito e $\{M_1, \ldots, M_d\}$ é um conjunto completo de representantes de classes de isomorfia de Λ-módulos indecomponíveis. As álgebras de Auslander foram introduzidas primeiro em [5] e são caracterizadas pelas suas propriedades homológicas, que são úteis, por exemplo, no desenvolvimento da teoria de recobrimento. Estas álgebras foram a nossa motivação para o estudo da classe das álgebras de tipo mesh.

3 Álgebras de tipo mesh fortemente simplesmente conexas

A noção de álgebras fortemente simplesmente conexas foi introduzida por Skowroński em [16] e desde então tem representado um importante papel no entendimento das álgebras de tipo de representação infinito (ver [15], [17]). A idéia que está por trás desta noção veio da tentativa de estender para álgebras de tipo de representação infinito algumas técnicas usadas para o caso de tipo de representação finito como os recobrimentos de Galois e a noção de simplesmente conexa ([6], [7], [9]).

Nosso objetivo é estudar a classe das álgebras de tipo mesh. Nesta direção obtivemos a seguinte caracterização das álgebras de tipo mesh que são fortemente simplesmente conexas.

Teorema 3.1. *[11] Sejam k corpo algebricamente fechado com característica zero; Δ uma aljava finita, dirigida, sem flechas múltiplas e com translação e $\Lambda = \frac{k\Delta}{\mu}$ a álgebra de tipo mesh associada a Δ. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *Λ é fortemente simplesmente conexa.*

(b) $H^1(\Lambda) = 0$.

(c) *$\bar{O}(\Delta)$ é árvore.*

(d) *$\bar{O}(\Delta')$ é árvore para toda subaljava $\Delta' \subset \Delta$ de tipo $\tilde{A}_n$.*

(e) *Todo ciclo irredutível é um contorno irredutível, e todo contorno irredutível é do tipo*

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[dr] & \\
\tau y \arrow[ur] \arrow[dr] & & y \\
& \bullet \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Observações:

1) Esta caracterização relaciona os conceitos de grupos de cohomologia de Hochschild (item **(b)**, para mais detalhes ver [13]), grafos-órbitas (itens **(c)** e **(d)**) e propriedades sobre a aljava ordinária da álgebra (item **(e)**). Esta propriedade **(e)**, foi baseada em uma formalização adotada por Assem e Liu em [3]. Com isto, temos um critério para reconhecer diretamente a partir de sua aljava quando uma álgebra de tipo mesh é fortemente simplesmente conexa ou

não.

2) Quanto ao conceito de cohomologia de Hochschild, estudamos nesta caracterização o anulamento do primeiro grupo de cohomologia de Hochschild para as álgebras de tipo mesh. Gostaríamos de salientar que para tal estudo é que foi preciso considerarmos o corpo k com característica zero e a aljava Δ sem flechas múltiplas. Nesta direção, estendemos alguns resultados de Happel ([14]) provados no caso das álgebras de Auslander.

Outro fato interessante é que até pouco tempo atrás conjecturava-se que uma álgebra Λ com $H^1(\Lambda) = 0$ não podia ter circuitos orientados em sua aljava ordinária. Recentemente Buchweitz e Liu em [10] exibiram um exemplo mostrando a falsidade desta conjectura. Porém, no caso específico das álgebras de tipo mesh, obtivemos que a conjectura é verdadeira.

Por [8] e [16] segue que as álgebras fortemente simplesmente conexa possuem componente pós-projetiva. A importância de uma álgebra possuir tal componente é que se um módulo X está em uma componente pós-projetiva ele é homologicamente trivial, isto é, $Ext^i_\Lambda(X, X) = 0$ para $i > 0$, $End_\Lambda X = k$ e sua classe de isomorfismo é unicamente determinada por seus fatores de composição. Podemos enunciar o seguinte Corolário:

Corolário 3.2. *Seja Λ uma aljava finita, dirigida e com translação e $\Lambda = \frac{k\Delta}{\mu}$ a álgebra de tipo mesh associada a Δ. Se $\bar{O}(\Delta)$ é árvore então Λ possui componente pós-projetiva.*

Exibimos a seguir um exemplo de álgebra de tipo mesh que possui componente pós-projetiva, mas não satisfaz as propriedades do Teorema acima.

Exemplo 3.3. Vamos considerar a álgebra $\Lambda = \frac{k\Delta}{\mu}$ onde

$$\Delta : \quad \begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dr] & & \\
 & & 2 \arrow[dr] & \\
 & 4 \arrow[dr, "\beta_1"] & & 7 \\
3 \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_2"'] & & 6 \arrow[uu] \arrow[ur] & \\
 & 5 \arrow[ur, "\beta_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

e $\mu = < \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 >$.

Podemos ver facilmente que esta álgebra não satisfaz a propriedade (**e**) do Teorema. Para sabermos que esta álgebra possui componente pós-projetiva usamos o critério de Dräxler e de la Peña (ver [12]).

Referências

[1] I. ASSEM, P.BROWN, *Strongly simply connected Auslander algebras*, Glasgow Math. J. **39** (1997), 21-27.

[2] I. ASSEM, S. LIU, *Strongly simply connected tilted algebras*, Ann. Sci. Math. Quebec **21** (1997), 13-22.

[3] I. ASSEM, S. LIU, *Strongly simply connected algebras*, Journal of algebra **207** (1998), 449-477.

[4] I. ASSEM, S. LIU, J. A. PEÑA, *The strongly simple connectedness of tame tilted algebra* (1998) - preprint.

[5] M. AUSLANDER, *Representation dimension of artin algebras*, Queen Mary College Mathematics Notes(1971), London.

[6] R. BAUTISTA, F. LARRIÓN, L. SALMERÓN, *On Simply connected algebras*, J. London Math. Soc.(2) **27** (1983), 212-220.

[7] K. BONGARTZ, P. GABRIEL, *Covering spaces in representation theory*, Invent. Math., **65** (1982), 331-378.

[8] K. BONGARTZ, *A criterion for finite representation type*, Math. Ann **269** (1984), 1-12.

[9] O.BRETSCHER, P. GABRIEL, *The standart form of a representation-finite algebra*, Bull. Soc. Math. France **111** (1983), 21-40.

[10] R.-O. BUCHWEITZ, S. LIU, *Artin algebras with loops but no outer derivations*-preprint.

[11] F. U. COELHO, R. R. S. VARGAS, *Strongly simply connected mesh algebras* - preprint.

[12] P. DRÄXLER, J. A. DE LA PEÑA, *On the existence of postprojective componentes in the Auslander-Reiten quiver of an algebra*, Tsukuba J. Math., Vol 2, número 2 (1996),457-469.

[13] D.Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras*, Lectures Notes in Math., Vol. 1404, Springer-Verlag, (1989),pp.108-126.

[14] D. Happel, *Hochschild Cohomology of Auslander Algebras*,Topics in Algebra, Banach Center Publications, Vol. 26, Part 1 (1990), 303-310.

[15] J.A. de la Peña, A. Skowroński, *Forbidden subcategories of non-polinomial growth tame simply connected algebras*, Canad. J. Math. **48**,No.5 (1995), 1018-1043.

[16] A. Skowroński, *Simply Connected Algebras and Hochschild Cohomologies*, Proc. ICRA IV (Ottawa, 1992) Can. Math. Soc. Proc., Vol. 14(1993), 431-447.

[17] A. Skowroński, *Tame algebras with simply connected Galois coverings* , preprint,

Flávio Ulhoa Coelho.
Departamento de Matemática - IME
Universidade de São Paulo
CP 66281 São Paulo - SP CEP 05315-970 Brazil
E-mail: fucoelho@ime.usp.br

Rosana Retsos Signorelli Vargas.
Departamento de Matemática - IME
Universidade de São Paulo
CP 66281 São Paulo - SP CEP 05315-970 Brazil
E-mail: rosana@ime.usp.br