

A DIMENSÃO DA ÁLGEBRA DE MULTIPLICAÇÕES DE UMA ÁLGEBRA DE BERNSTEIN

R. Costa, L.S. Ikemoto Murakami¹

Resumo

Dada uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$ de tipo $(1 + r, s)$, não é possível determinar a dimensão de $M(A)$ apenas em função de r e s , pois álgebras de mesmo tipo não têm, necessariamente, álgebras de multiplicações com a mesma dimensão. Estabeleceremos, nesta nota, alguns limitantes para a dimensão de $M(A)$ em função dos inteiros r e s .

1. Preliminares. Lembramos que uma álgebra bária sobre um corpo F é um par (A, ω) , onde A é uma álgebra sobre F e $\omega : A \rightarrow F$ é um homomorfismo não nulo; neste caso, dizemos que ω é a função peso de (A, ω) . Temos ainda que $N = \ker \omega$ é um ideal bilateral de codimensão 1. Uma álgebra bária (A, ω) é uma *álgebra de Bernstein* se A é comutativa e $(x^2)^2 = \omega(x)x^2$, para todo $x \in A$. Consideraremos aqui apenas álgebras de Bernstein de dimensão finita sobre corpos de característica diferente de 2. Os resultados sobre álgebras de Bernstein que seguem são bem conhecidos, veja [6], por exemplo. Dada uma álgebra de Bernstein (A, ω) , os elementos x^2 com $\omega(x) = 1$ são todos os idempotentes não nulos de A e, dado um idempotente não nulo e , temos a decomposição de Peirce de A relativa a esse idempotente:

$$A = Fe \oplus U_e \oplus V_e, \quad (1)$$

onde $U_e = \{x \in N : 2xe = x\}$ e $V_e = \{x \in N : xe = 0\}$. A menos que seja necessário, omitiremos o índice e nos subespaços U_e e V_e . Valem as seguintes relações:

$$U^2 \subseteq V, UV \subseteq U, V^2 \subseteq U, UV^2 = 0 \quad (2)$$

e as seguintes identidades para $u \in U$ e $v \in V$:

$$u^3 = 0; u(uv) = 0; uv^2 = 0; u^2(uv) = 0; u^2v^2 = 0; (uv)^2 = 0 \quad (3)$$

Os subespaços U e V em (1) têm dimensões invariantes sob mudança de idempotente. Assim, o par $(1 + \dim U, \dim V)$ está bem determinado e é denominado o *tipo* de A . O subespaço $L = \{u \in U : uU = 0\}$ é um ideal de A que independe do idempotente escolhido. Quando $U^2 = 0$ em (2), dizemos que A é *excepcional* e quando $UV = V^2 = 0$, A é *normal*. Estas condições independem do idempotente escolhido em A . Outras caracterizações destas álgebras podem ser vistas em [6], assim como toda a teoria básica das álgebras de Bernstein.

Dada uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$, sua álgebra de multiplicações $M(A)$ é bária, com função peso $\bar{\omega}$ dada por $\bar{\omega}(L_x) = \omega(x)$, para todo $x \in A$. Temos que $\ker \bar{\omega} = (N :$

¹bolsista de doutorado pela FAPESP, proc. no. 95/2251-0

$A) = \{\sigma \in M(A) : \sigma(A) \subseteq N\}$. O operador $2L_e^2 - L_e$ é um idempotente de peso 1 e, portanto, temos a decomposição

$$M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus (N : A). \quad (4)$$

Além disso, $4L_e - 4L_e^2 \in (N : A)$ é idempotente e todo $\sigma \in M(A)$ se decompõe na forma

$$\sigma = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \beta(4L_e - 4L_e^2) + \theta,$$

com $\theta \in \tilde{N}$ e $\tilde{N}$ é o ideal de $M(A)$ gerado por $\{L_x : x \in N\}$. Observe que $\tilde{N} \subseteq (N : A)$.

Se $A = Fe \oplus U \oplus V$ é uma álgebra de Bernstein então $M(A)$ tem a seguinte decomposição relativa ao idempotente $2L_e^2 - L_e$:

$$M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{V}, \quad (5)$$

com $\tilde{U} = \{\sigma \in (N : A) : \sigma(2L_e^2 - L_e) = \sigma\} = \{\sigma \in (N : A) : \sigma(N) = 0\} = \{\psi_x : x \in U \oplus U^2\}$, onde $\psi_x(e) = x$ e $\psi(N) = 0$ e $\tilde{V} = \{\sigma \in (N : A) : \sigma(2L_e^2 - L_e) = 0\} = \{\sigma \in (N : A) : \sigma(e) = 0\}$. Esses subespaços verificam as seguintes relações:

$$\tilde{U}^2 = 0; \quad \tilde{U}\tilde{V} = 0; \quad \tilde{V}\tilde{U} \subseteq \tilde{U}; \quad \tilde{V}^2 \subseteq \tilde{V}. \quad (6)$$

Podemos refinar a decomposição dada em (5) usando o idempotente $4L_e - 4L_e^2 \in \tilde{V}$. Teremos $\tilde{V} = \tilde{V}_{11} \oplus \tilde{V}_{10} \oplus \tilde{V}_{01} \oplus \tilde{V}_{00}$, onde $\tilde{V}_{ij} = \{\sigma_{ij} \in \tilde{V} : (4L_e - 4L_e^2)\sigma_{ij} = i\sigma_{ij} \text{ e } \sigma_{ij}(4L_e - 4L_e^2) = j\sigma_{ij}\}$. Se $\sigma \in \tilde{V}$ então temos:

$$\sigma \in \tilde{V}_{11} \Leftrightarrow \sigma(U) \subseteq U \text{ e } \sigma(V) = 0 \quad (7)$$

$$\sigma \in \tilde{V}_{11} \cap \tilde{N} \Rightarrow \sigma(U) \subseteq UV + V^2 \subseteq U \text{ e } \sigma(V) = 0 \quad (8)$$

$$\sigma \in \tilde{V}_{10} \Leftrightarrow \sigma(U) = 0 \text{ e } \sigma(V) \subseteq UV + V^2 \subseteq U \quad (9)$$

$$\sigma \in \tilde{V}_{01} \Leftrightarrow \sigma(U) \subseteq U^2 \subseteq V \text{ e } \sigma(V) = 0 \quad (10)$$

$$\sigma \in \tilde{V}_{00} \Leftrightarrow \sigma(U) = 0 \text{ e } \sigma(V) \subseteq U(UV) \subseteq V \quad (11)$$

Se $x = \alpha e + u + v$ é um elemento de A então a decomposição de L_x é

$$L_x = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \frac{1}{2}\psi_u + [L_x]_{11} + [L_x]_{10} + [L_x]_{01} + [L_x]_{00}, \quad (12)$$

onde $[L_x]_{11} = \frac{1}{2}\alpha(4L_e - 4L_e^2) + 2L_v L_e$; $[L_x]_{10} = (2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u) + (L_v - 2L_v L_e)$; $[L_x]_{01} = L_u - 2L_e L_u$ e $[L_x]_{00} = 0$.

Observação 1 Os elementos de $\tilde{N}^k$ têm imagem contida em N^k e se $\sigma \in \tilde{N}^k \cap \tilde{V}$ então $\text{Im } \sigma \subseteq N^{k+1}$, para todo $k \geq 1$.

2. A dimensão de $M(A)$. Observamos inicialmente que, nos casos onde $r = 0$ ou $s = 0$, a dimensão da álgebra de multiplicações está bem determinada, pois existe apenas uma álgebra de Bernstein de cada um desses tipos. Em [1], prova-se que se $r = 0$ então $M(A) \cong F$ e,

assim, $\dim M(A) = 1$. No caso em que $s = 0$, foi provado também em [1] que $M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \{\psi_x : x \in U_e\} \oplus F(4L_e - 4L_e^2)$; portanto, $\dim M(A) = 1 + \dim A$.

Em [2], os autores estimam a dimensão mínima para $M(A)$, quando $r \geq 1$: $\dim M(A) \geq r + 2$ e $\dim M(A) = r + 2$ se e somente se $N^2 = 0$. Neste caso, $M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \{\psi_x : x \in U\} \oplus F(4L_e - 4L_e^2)$. Estudaremos agora, alguns limitantes superiores para a dimensão de $M(A)$.

2.1. A dimensão máxima de $M(A)$ nas álgebras excepcionais. Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein excepcional de tipo $(1+r, s)$. Pelas relações (10) e (11), os subespaços $\tilde{V}_{01}$ e $\tilde{V}_{00}$ da decomposição de Peirce de $M(A)$ são nulos. Assim,

$$M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{V}_{11} \oplus \tilde{V}_{10}.$$

Temos que $\dim \tilde{U} = \dim(U \oplus U^2) = r$ e, pela caracterização dos subespaços $\tilde{V}_{ij}$ dados em (7) e (9), os elementos de $\tilde{V}_{11}$ podem ser identificados como operadores em $\text{End}(U)$ e os de $\tilde{V}_{10}$, como transformações lineares de $\text{Hom}(V, U)$. Dessa maneira, $\dim \tilde{V}_{11} \leq r^2$ e $\dim \tilde{V}_{10} \leq rs$. Obtemos, então, um limitante superior para a dimensão da álgebra de multiplicações de uma álgebra excepcional:

$$\dim M(A) \leq 1 + r + r^2 + rs.$$

Veremos que, para $s \geq 2$, existem álgebras excepcionais cuja dimensão da álgebra de multiplicações atinge esse valor. O mesmo não ocorre para álgebras de tipo $(1+r, 1)$.

Proposição 1 *Se $A = Fe \oplus U \oplus Fv$ é uma álgebra de Bernstein excepcional de tipo $(1+r, 1)$ então $\dim M(A) \leq 3r + 1$.*

DEMONSTRAÇÃO: Levando em conta a decomposição dos operadores L_x , $x \in A$, dada em (12) e a relação $\tilde{V}_{ij}\tilde{V}_{kl} \subseteq \delta_{jk}\tilde{V}_{il}$, concluímos que $\tilde{V}_{11} = F(4L_e - 4L_e^2) + \langle L_v L_e, (L_v L_e)^2, \dots \rangle$. Identificando os elementos de $\tilde{V}_{11}$ como operadores em $\text{End}(U)$, seja $m(x)$ o polinômio minimal de $T = L_v L_e$. Pelo Teorema de Hamilton-Cayley, $m(T) = 0$. Assim, se l é o grau de $m(x)$ então $l \leq r$ e $\{T^l, T^{l-1}, \dots, T, id_U\}$ é linearmente dependente e, para todo $m < l$, $\{T^m, T^{m-1}, \dots, T, id_U\}$ é um conjunto linearmente independente. Observando que id_U está em correspondência com o operador $4L_e - 4L_e^2$, obtemos que $\tilde{V}_{11} = F(4L_e - 4L_e^2) + \langle T, T^2, \dots, T^k, \dots \rangle$ tem dimensão l . Assim, $\dim M(A) \leq 1 + r + l + r \leq 1 + 3r$. $\square$

O próximo exemplo mostra que existem álgebras excepcionais de tipo $(1+r, 1)$, cuja álgebra de multiplicações tem dimensão $1 + 3r$.

Exemplo 1 *Seja $A = Fe \oplus U \oplus Fv$ a álgebra de Bernstein excepcional que, em relação à base $\{u_1, \dots, u_r, v\}$ do núcleo, tem a seguinte tábua de multiplicação:*

	u_1	u_2	$\dots$	u_{r-1}	u_r	v
u_1						u_2
u_2						u_3
$\vdots$						$\vdots$
u_{r-1}						u_r
u_r						u_1
v	u_2	u_3	$\dots$	u_r	u_1	

Temos que $2L_v L_e = L_v$ e $\{L_v, L_v^2, \dots, L_v^r\}$ é linearmente independente e $L_v^r = 4L_e - 4L_e^2$. Assim, $\tilde{V}_{11} = \langle L_v, L_v^2, \dots, L_v^r \rangle$ tem dimensão r . Além disso, $\{2L_e L_{u_1} - \frac{1}{2}\psi_{u_1}, \dots, 2L_e L_{u_r} - \frac{1}{2}\psi_{u_r}\} \subseteq \tilde{V}_{10}$ é um subconjunto linearmente independente. Portanto, $\tilde{V}_{10}$ tem dimensão r . Dessa maneira, $\dim M(A) = 1 + 3r$.

Para estudar o caso em que $s \geq 2$, usaremos o seguinte resultado:

Lema 1 Para todo $n \geq 2$, a subálgebra de $M_n(F)$ gerada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

coincide com $M_n(F)$.

DEMONSTRAÇÃO: Basta observar que a matriz elementar E_{ij} é obtida fazendo $A^{n-i} B A^{j-1}$, para todo $i, j = 1, \dots, n$. Essas matrizes aparecem no artigo [5]. $\square$

Proposição 2 Para todo $r \geq 1$ e $s \geq 2$, existe álgebra de Bernstein excepcional de tipo $(1+r, s)$ com $\dim M(A) = 1 + r + r^2 + rs$.

DEMONSTRAÇÃO: A prova será feita exibindo exemplos para cada tipo.

- (i) Se $r = 1$, considere a álgebra excepcional $A = Fe \oplus Fu \oplus V$, com $\{v_1, \dots, v_s\}$ base de V e a seguinte tábua de multiplicação no núcleo:

	u	v_1	$\dots$	v_s
u				
v_1		u		
$\vdots$			$\ddots$	
v_s				u

Temos que $\tilde{V}_{11} = F(4L_e - 4L_e^2)$ pois $\dim \tilde{V}_{11} \leq r^2 = 1$ e $\{L_{v_1}, \dots, L_{v_s}\}$ é um subconjunto linearmente independente de $\tilde{V}_{10}$. Assim, $\dim M(A) = 1 + r + r^2 + rs = 3 + s$.

- (ii) Se $r \geq 2$, seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ a álgebra de Bernstein excepcional cuja tábua de multiplicação, em relação às bases $\{u_1, \dots, u_r\}$ de U e $\{v_1, \dots, v_s\}$ de V , é:

	u_1	u_2	$\dots$	u_r	v_1	v_2	$\dots$	v_s
u_1					u_r	u_r		
u_2					u_1			
$\vdots$					$\vdots$			
u_r					u_{r-1}			
v_1	u_r	u_1	$\dots$	u_{r-1}	u_1			
v_2	u_r					u_1		
$\vdots$							$\ddots$	
v_s								u_1

Novamente considerando os elementos de $\tilde{V}_{11}$ como operadores de $\text{End}(U)$, temos que as matrizes dos operadores $2L_{v_1}L_e$ e $2L_{v_2}L_e$, em relação à base $\{u_1, \dots, u_r\}$, coincidem, respectivamente, com as matrizes A e B do Lema 1. Assim, a subálgebra de $\tilde{V}_{11}$ gerada por $\{L_{v_1}L_e, L_{v_2}L_e\}$ coincide com $\tilde{V}_{11}$. Portanto, $\dim \tilde{V}_{11} = r^2$.

Para cada $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ e $i \in \{1, \dots, r\}$, como $\tilde{V}_{11} \cong \text{End}(U)$, seja $\sigma \in \tilde{V}_{11}$ tal que $\sigma(u_1) = u_i$ e $\sigma(u_k) = 0$, para todo $k \neq i$. Então $\sigma(L_{v_j} - 2L_{v_j}L_e) \in \tilde{V}_{10}$ e $\sigma(L_{v_j} - 2L_{v_j}L_e)(v_j) = u_i$ e $\sigma(L_{v_j} - 2L_{v_j}L_e)(v_l) = 0$, se $l \neq j$. Dessa maneira, $\text{Hom}(V, U) \subseteq \tilde{V}_{10}$, ou seja, $\tilde{V}_{10} = \text{Hom}(V, U)$ tem dimensão rs . Conseqüentemente, $\dim M(A) = 1 + r + r^2 + rs$. $\square$

2.2. Dimensão máxima de $M(A)$ no caso geral. A questão a ser estudada é a seguinte: “Fixados inteiros positivos r e s , qual é a dimensão máxima que assume $M(A)$ quando A tem tipo $(1 + r, s)$?” Na seção anterior, pudemos responder essa pergunta na subclasse das álgebras excepcionais. A seguir, exibiremos outras circunstâncias nas quais a dimensão máxima de $M(A)$ pode ser dada por uma álgebra excepcional, ou seja, $\dim M(A) \leq 1 + r + r^2 + rs$, onde $(1 + r, s)$ é o tipo de A .

Estudaremos, inicialmente, a classe das álgebras que têm $\tilde{V}_{00} = 0$.

Proposição 3 Se $A = Fe \oplus U \oplus V$ é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ com $r > 1$ e $U(UV) = 0$ então $\dim M(A) \leq 1 + r + r^2 + rs$.

DEMONSTRAÇÃO: Em [1], os autores provam que $U(UV) = 0$ se e somente se $\tilde{V}_{11} = 0$ e, neste caso, a dimensão do subespaço $\tilde{V}_{01}$ é $\dim U - \dim L$. Podemos supor que A é não excepcional, pois para estas álgebras já vale o resultado. De $U(UV) = 0$ resulta que $UV + V^2 \subseteq L$. Assim, se $k = \dim L$, temos que $\dim \tilde{V}_{11} \leq 1 + rk$ e $\dim \tilde{V}_{10} \leq sk$, já que os elementos de $\tilde{V}_{11} \cap \tilde{N}$ e $\tilde{V}_{10}$ têm imagem contida em $UV + V^2$, de acordo com (8) e (9). Portanto, $\dim M(A) = \dim (F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{V}_{11} \oplus \tilde{V}_{10} \oplus \tilde{V}_{01}) \leq 1 + r + s + 1 + rk + sk + r - k = 1 + r + r(k + 1) + s(k + 1) - (k - 1)$.

Se $k \neq 0$ então $\dim M(A) \leq 1 + r + r(k+1) + s(k+1) \leq 1 + r + r^2 + rs$, pois $k < r$. Se $k = 0$ então $\dim M(A) = 1 + r + r + s + 1 < 1 + r + r^2 + rs$, pois $r > 1$. $\square$

Dessa maneira, obtemos a dimensão máxima para álgebras de multiplicações de álgebras de tipo $(1+r, s)$, com $r \leq 3$ ou $s \leq 1$, pois álgebras com estes tipos têm $U(UV) = 0$ e, portanto, $\dim M(A) \leq 1 + r + r^2 + rs$.

Passamos agora a outra classe de álgebras. Para obter a limitação proposta, usaremos um resultado conhecido na teoria das álgebras de Lie.

O Teorema de Lie diz que toda álgebra de Lie de transformações lineares de um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo de característica zero algebricamente fechado que é solúvel pode ter as matrizes de seus elementos tomados simultaneamente triangularizados (veja [4, pág 50]). Com uma demonstração análoga, temos o seguinte resultado:

Lema 2 *Sejam W um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo arbitrário e $A \subseteq \text{End } W$ uma subálgebra nilpotente. Então existe uma base B de W tal que a matriz de todo operador de A , escrita na base B , é triangular inferior. Em particular, $\dim A \leq \frac{1}{2}n(n-1)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja k o índice de nilpotência de A . Temos

$$0 = A^k(W) \subsetneq A^{k-1}(W) \subsetneq \dots \subsetneq A(W) \subsetneq W.$$

Seja $B = B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}$ uma base de W tal que $B_{k-1} \cup \dots \cup B_{k-t}$ é base de $A^{k-t}(W)$, para $1 \leq t \leq k-1$. Então, para todo $\sigma \in A$, $[\sigma]_B$ é uma matriz triangular inferior. $\square$

Com a ajuda desse lema, podemos estabelecer uma nova classe de álgebras de Bernstein cuja dimensão máxima da álgebra de multiplicações pode ser dada por uma álgebra excepcional, para cada tipo fixado.

Proposição 4 *Seja A uma álgebra de Bernstein de tipo $(1+r, s)$ com $r > s$ e núcleo nilpotente. Então $\dim M(A) \leq 1 + r + r^2 + rs$.*

DEMONSTRAÇÃO: Temos que $M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus F(4L_e - 4L_e^2) \oplus \tilde{N}$ e $\tilde{N}$ é nilpotente. Como $\tilde{N} \subseteq \text{End } A$ e $r > s$, temos, pelo lema anterior, $\dim \tilde{N} \leq \frac{1}{2}(1+r+s)(r+s) < r^2 + rs + r$. Portanto, $\dim M(A) < 2 + r + r^2 + rs$, ou seja, $\dim M(A) \leq 1 + r + r^2 + rs$. $\square$

Com este resultado, fica faltando analisar a dimensão máxima das álgebras com $s \geq r$ ou N não nilpotente, com $r \geq 4$ ou $s \geq 2$. Estudaremos agora os casos em que $r = 4$ ou $s = 2$, tratando das álgebras que verificam $\dim U(UV) = 1$. Para isso, descreveremos com mais detalhe alguns subespaços da decomposição de Peirce de $M(A)$, para uma álgebra de Bernstein Jordan.

Lema 3 *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein Jordan. Então*

$$(i) \quad \tilde{V}_{10} = \{2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u : u \in U\} + (\tilde{V}_{10} \cap \tilde{N}^3);$$

$$(ii) \quad \tilde{V}_{01} = \{L_u - 2L_e L_u : u \in U\} + (\tilde{V}_{01} \cap \tilde{N}^3).$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x = \alpha e + u + v \in A$, com $\alpha \in F$, $u \in U$ e $v \in V$. Como A é Bernstein Jordan, as componentes de L_x nos subespaços $\tilde{V}_{ij}$ dadas em 12 ficam $[L_x]_{11} = \frac{1}{2}\alpha(4L_e - 4L_e^2) + 2L_v L_e$, $[L_x]_{10} = 2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u$, $[L_x]_{01} = 2L_u - 2L_e L_u$ e $[L_x]_{00} = 0$. Portanto, $\tilde{V}_{10} = \{2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u : u \in U\} + (\tilde{V}_{10} \cap \tilde{N}^2)$ e $\tilde{V}_{01} = \{L_u - 2L_e L_u : u \in U\} + (\tilde{V}_{01} \cap \tilde{N}^2)$. Lembrando que $\tilde{V}_{ij}\tilde{V}_{kl} \subseteq \delta_{jk}\tilde{V}_{il}$, obtemos $\tilde{V}_{10} = \{2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u : u \in U\} + \{2L_v L_e(2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u) : u \in U, v \in V\} + (\tilde{V}_{10} \cap \tilde{N}^3)$ e $\tilde{V}_{01} = \{L_u - 2L_e L_u : u \in U\} + \{2(L_u - 2L_e L_u)L_v L_e : u \in U, v \in V\} + (\tilde{V}_{01} \cap \tilde{N}^3)$. Observamos ainda que $2L_v L_e(2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u) = 2L_e L_{uv} - \frac{1}{2}\psi_{uv}$ e $2(L_u - 2L_e L_u)L_v L_e = L_{uv} - 2L_e L_{uv}$, para todo $u \in U$ e $v \in V$. Assim, $\tilde{V}_{10} = \{2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u : u \in U\} + (\tilde{V}_{10} \cap \tilde{N}^3)$ e $\tilde{V}_{01} = \{L_u - 2L_e L_u : u \in U\} + (\tilde{V}_{01} \cap \tilde{N}^3)$. $\square$

Observação 2 Em [2] os autores provam que se A é Bernstein e existem $u_1, u_2 \in U$ e $v \in V$ tais que $u_1(u_2 v) \neq 0$ então $\{u_1, u_2, u_1 v, u_2 v\}$ e $\{v, u_1(u_2 v)\}$ são conjuntos linearmente independentes.

Lema 4 *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein tal que $U(UV) = \langle v \rangle$. Então $Uv \subseteq L$.*

DEMONSTRAÇÃO: Se $Uv \not\subseteq L$ então existem $u_1, u_2 \in U$ tais que $u_1(u_2 v) \neq 0$. Como $u_1(u_2 v) \in U(UV) = \langle v \rangle$, existe $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$ tal que $u_1(u_2 v) = \lambda v$, o que é uma contradição com a Observação 2. $\square$

Observação 3 Seja $W \subseteq \text{ann} A$ um subespaço e $V = W \oplus V'$. Então cada $\sigma \in \tilde{V}_{10}$ pode ser considerada como um elemento de $\text{Hom}(V', UV + V^2)$, pois $W \subseteq \ker \sigma$. Do mesmo modo, o subespaço $\tilde{V}_{00}$ está identificado com um subespaço de $\text{Hom}(V', U(UV))$.

Proposição 5 *Seja A uma álgebra de Bernstein de tipo $(1+r, s)$ com $\dim U(UV) = 1$. Então $\dim M(A) \leq 1 + r + r^2 + rs$.*

DEMONSTRAÇÃO: Como $U(UV) \neq 0$, temos que $r \geq 4$ e $s \geq 2$. Vamos considerar inicialmente o caso $L = 0$. Seja $\langle v \rangle = U(UV)$. Pelo Lema 4, $Uv \subseteq L$. Logo, $Uv = 0$. Temos ainda $Vv \subseteq L = 0$. Portanto, $v \in \text{ann} A$. Seja $V = V' \oplus Fv$. Agora, como A é Bernstein Jordan, N é nilpotente. Assim, $U \supsetneq UV \supsetneq (UV)V \supsetneq \dots$ é cadeia estritamente decrescente. Em particular, $\dim((UV)V)V \leq r-3$. Como $U(UV) \subseteq \text{ann} A$, temos que $U(U(UV)) = 0$ e $U^3 V = (U^2 U)V = (UV)U^2 \subseteq U(U(UV)) = 0$. Dessa maneira, $N^4 \cap U = U(U(UV)) + U^3 V + ((UV)V)V = ((UV)V)V$. Pelo Lema 3, $\tilde{V}_{10} = \{2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u : u \in U\} + (\tilde{V}_{10} \cap \tilde{N}^3)$. Os operadores de $\tilde{N}^3 \cap \tilde{V}$ têm imagem contida em N^4 , pela Observação 1. Logo, $\tilde{V}_{10} \cap \tilde{N}^3 \subseteq \text{Hom}(V', ((UV)V)V)$ é um subespaço de dimensão no máximo $(s-1)(r-3)$ e $\{2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u : u \in U\}$ tem dimensão limitada por r . A limitação da dimensão do subespaço $\tilde{V}_{10}$, neste caso, fica $r + sr - r - 3r + 3 = sr - 3r + 3$. Vamos analisar os outros subespaços. Temos que $\tilde{V}_{01} \cap \tilde{N}^2 \subseteq \text{Hom}(U, U(UV))$ e $V_{10} = \{L_u - 2L_e L_u : u \in U\} + (\tilde{V}_{01} \cap \tilde{N}^2)$. Portanto, $\dim \tilde{V}_{01} \leq 2r$. O subespaço $\tilde{V}_{00}$ está identificado com um subespaço de $\text{Hom}(V', U(UV))$, ou seja, $\dim \tilde{V}_{00} \leq s-1$. Usando o Lema 2 e lembrando que $\tilde{N} \cap \tilde{V}_{11}$ é uma subálgebra nilpotente de $\text{End} U$, resulta que $\dim(\tilde{N} \cap \tilde{V}_{11}) \leq \frac{1}{2}r(r-1)$.

Assim, $\dim M(A) = \dim \left(F(2L_e^2 - L_e) \oplus \tilde{U} \oplus F(4L_e - 4L_e^2) \oplus (\tilde{V}_{11} \cap \tilde{N}) \oplus \tilde{V}_{10} \oplus \tilde{V}_{01} \oplus \tilde{V}_{00} \right) \leq 1 + r + s + 1 + \frac{1}{2}r(r-1) + sr - 3s + 3 + 2r + s - 1 = 1 + r + r^2 + rs - \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{3}{2}r + s - 3 \right) \leq 1 + r + r^2 + rs$, pois $s \geq 2$ e $r \geq 4$. Suponha agora que $L \neq 0$ e seja $k = \dim L$. Temos que $\bar{A} = A/L$ é uma álgebra de tipo $(1 + r - k, s)$ satisfazendo $\bar{L} = 0$ e $\bar{U}(\bar{U}\bar{V}) = \langle \bar{v} \rangle$. Assim, pela parte anterior, $\dim M(\bar{A}) \leq 1 + (r - k) + (r - k)^2 + (r - k)s = 1 + r + r^2 + rs - (k + 2rk - k^2 + ks) \leq 1 + r + r^2 + rs - (k + ks - rk)$, pois $k \leq r$ implica $rk - k^2 \geq 0$. Como $(L : A) \subseteq \text{Hom}(A, L)$, resulta que $\dim(L : A) \leq (r + s + 1)k$. Usando o fato que $M(A/L) \cong M(A)/(L : A)$, concluímos que $\dim M(A) = \dim M(A/L) + \dim(L : A) \leq 1 + r + r^2 + rs$. $\square$

Veremos a seguir que, com a Proposição 5, tratamos os casos em que $r = 4$ ou $s = 2$.

Proposição 6 *Se A é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ com $s \leq 2$ então $\dim U(UV) \leq 1$.*

DEMONSTRAÇÃO: Temos que $U(UV) \neq V$, pois se $U(UV) = V \neq 0$ então A é nuclear e, portanto, tem núcleo nilpotente. Além disso, de $V = U^2$ e $V = U(UV)$, resulta que $0 \neq U^2 = U^4$, contrariando a nilpotência de N . Assim, $\dim U(UV) < \dim V$. $\square$

Proposição 7 *Se A é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ com $r \leq 4$ então $\dim U(UV) \leq 1$.*

DEMONSTRAÇÃO: Pela Observação 2, se $r \leq 3$ então $U(UV) = 0$. Suponhamos que $r = 4$ e $U(UV) \neq 0$. Sejam $u_1, u_2 \in U$ e $v \in V$ tais que $u_1(u_2v) \neq 0$. Desse modo, $\{u_1, u_2, u_1v, u_2v\}$ é uma base de U . Além disso, $L = 0$. De fato, seja $u = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_e u_1v + \gamma_4 u_2v \in L$, com $\gamma_1, \dots, \gamma_4 \in F$. Multiplicando por u_1v , obtemos $0 = u(u_1v) = \gamma_2 u_2(u_1v)$, isto é, $\gamma_2 = 0$. De modo similar, usando o elemento u_2v , temos $\gamma_1 = 0$, ou seja, $u = \gamma_3 u_1v + \gamma_4 u_2v$. Multiplicando por u_1 concluímos que $\gamma_4 = 0$ e portanto, também $\gamma_3 = 0$. Assim, $u = 0$. Observando que $u \in \langle u_1v, u_2v \rangle$ implica $Uv \subseteq \langle u_1(u_2v) \rangle$, basta provar que se $w \in V$ então $u_1(u_2w) \in \langle u_1(u_2v) \rangle$. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_4 \in F$ tais que $u_2w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_1v + \alpha_4 u_2v$. Da identidade $(u_2v)(u_2w) = 0$ segue que $\alpha_1 u_1(u_2v) = 0$, ou seja, $\alpha_1 = 0$. Portanto, $u_2w = \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_1v + \alpha_4 u_2v$. De modo análogo, escrevendo $u_1w = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_e u_1v + \beta_4 u_2v$, com $\beta_1, \dots, \beta_4 \in F$, obtemos $\beta_2 = 0$, isto é, $u_1w = \beta_1 u_1 + \beta_3 u_1v + \beta_4 u_2v$. Se $\alpha_2 = 0$ então $u_2w \in \langle u_1v, u_2v \rangle$, o que prova que $u_1(u_2w)$ é um elemento de $\langle u_1(u_2v) \rangle$. Analogamente se $\beta_1 = 0$, observando que $u_1(u_2w) = -u_2(u_1w)$. Consideraremos então que $\alpha_2 \neq 0$ e $\beta_1 \neq 0$. Das identidades $u_2(u_2w) = 0$ e $(u_2w)^2 = 0$, obtemos $\alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_2(u_1v) = 0$ e $\alpha_2^2 u_2^2 + 2\alpha_2 \alpha_3 u_2(u_1v) = 0$. Comparando as duas equações, concluímos que $u_2^2 = -\alpha_2^{-1} \alpha_3 u_2(u_1v) = -2\alpha_2^{-1} \alpha_3 u_2(u_1v)$, ou seja, $u_2^2 = 0$. Da mesma maneira, usando $u_1(u_1w) = 0$ e $(u_1w)^2 = 0$, chegamos que $u_1^2 = 0$. Assim, $u(u_1u_2) = -\frac{1}{2}u_1^2 u_2 = 0$ e $u_2(u_1u_2) = -\frac{1}{2}u_2^2 u_1 = 0$ e, usando também o fato que A é Bernstein Jordan, $(u_1v)(u_1u_2) = -(u_1(u_1u_2))v = 0$ e $(u_2v)(u_1u_2) = -(u_2(u_1u_2))v = 0$. Portanto, $u_1u_2 \in L = 0$. Logo, $U(UV) \subseteq U^2 \subseteq U\langle u_1v, u_2v \rangle \subseteq \langle u_1(u_2v) \rangle$ tem dimensão 1. $\square$

Com os resultados obtidos até o momento, podemos determinar a dimensão máxima de $M(A)$ para todas as álgebras de dimensão menor ou igual a 8 e para as de tipo $(1 + r, s)$, com

$r \leq 4$ ou $s \leq 2$, além daquelas com $r < s$ e núcleo nilpotente. Todas as álgebras estudadas tem dimensão de $M(A)$ limitada por $1 + r + r^2 + rs$. Nosso objetivo futuro é provar que nas outras classes restantes vale a mesma limitação. Observamos que basta mostrar essa conjectura para álgebras com $s \geq r$ que têm $L = 0$, e o caso geral poderia ser demonstrado com um raciocínio semelhante ao da segunda parte da demonstração da Proposição 5.

Referências

- [1] Costa, R. and Suazo, A.: *The multiplication algebra of a Bernstein algebra: basic results*, Comm. Alg. **24** (5), 1809-1821 (1996).
- [2] Costa, R.; Ikemoto, L.S. and Suazo, A.: *On the multiplication algebra of a Bernstein algebra*, Comm. Alg. **26** (11), 3727-3736 (1998).
- [3] Costa, R.; Grishkov, A.N.: *Graphs and nonassociative algebras*, Journal of Math. Science (aceito para publicação)
- [4] Jacobson, N.: *Lie Algebras*, Wiley (Interscience), New York (1962).
- [5] Krupnik, N: *Minimal number of idempotent generators of matrix algebras over arbitrary field*, Comm. Alg. **20** (11), 3251-3257 (1992).
- [6] Lyubich, Yu. I.: *Mathematical Structures in Population Genetics*, Biomathematics **22**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1992).

Roberto Costa
 Departamento de Matemática
 IME-USP
 Caixa Postal 66281 - 05315-970
 São Paulo - SP
 e-mail: rcosta@ime.usp.br

Lucia Satie Ikemoto Murakami
 Departamento de Matemática
 IME-USP
 Caixa Postal 66281 - 05315-970
 São Paulo - SP
 e-mail: ikemoto@ime.usp.br