

Introdução

Estamos no ano 2000 e uma pergunta que tenho ouvido com freqüência é: como será que era determinada coisa (a medicina, o teatro, a literatura, o ensino, ...) no ano 1000?

Vamos tentar dar alguma idéia de como era o ensino de Matemática, que afinal é o que nos interessa, no ano 1000 e pouco antes dele. Obviamente, este artigo não é, nem de longe, um texto completo sobre o ensino de Matemática na Idade Média, tem apenas a intenção de mostrar alguns de seus aspectos interessantes.

I. Rosvita

Vamos começar, talvez por feminismo, apresentando *Rosvita*, uma monja beneditina do convento de Gandersheim, norte de Göttingen, Alemanha, que viveu aproximadamente de 935 a 1002, e é considerada a primeira poetisa da literatura alemã. Ela nasceu, muito provavelmente, em uma família aristocrata e há registros de que seu nome aparece numa gravura esculpida em madeira como *Helena von Rossow*.

Rosvita ingressou muito jovem no convento de Gandersheim, famoso centro de estudos, onde seu extraordinário talento encontrou abrigo e cultivo criterioso. Inicialmente Rosvita foi orientada por um professor e posteriormente ficou sob a supervisão de uma sobrinha de Otto I (monarca da época) de nome Gerberg, considerada a mulher modelo de seu tempo. Gerberg, que foi abadessa do convento entre 959 e 1001, tinha um interesse especial pela obra poética de Rosvita, a qual, segundo a abadessa, “contribuiria para o engrandecimento da glória de Deus”.



A. Dürer, A monja Rosvita apresenta um livro a Oto I. (Kupferstichkabinett, Berlin)

Não cabe aqui, numa revista para professores de Matemática, discorrer com maiores detalhes sobre a extensa obra literária de Rosvita, uma das mais importantes da Idade Média. Focalizaremos uma em especial, a peça *Sabedoria*, que contém uma aula de Matemática para jovens estudantes, que, pelo seu espírito motivador e bem-humorado, serviria de exemplo (quem diria, 1000 anos atrás!) para nós, professores, preocupados com o ensino de Matemática.

Antes de comentar a peça em particular, para melhor ligar Rosvita à Matemática, vamos transcrever um trecho do livro *Cuentos y cuentas de los matematicos*, de Rodriguez Vidal, R. e Rodriguez Rigual, M. C. Editorial Reverte, 1986, pág. 137.

[...]A idade média na Europa não islâmica limita seus conhecimentos de Matemática aos textos comentados de Alexandria e Bizâncio, sem que apareçam indícios de criação original. Desta época são os escritos de Rosvita, monja de um convento alemão, do século X, mais interessantes como literatura e filosofia do que como Matemática. Entretanto demonstram bom conhecimento da Arithmetica de Boécio e aludem a questões relativas a números deficientes e perfeitos, citando o 6, 28, 496 e 8128, que eram os números perfeitos conhecidos na sua época. O número perfeito seguinte é 33 550 336 [...]”

Há divergências entre os historiadores sobre se as peças teatrais escritas por Rosvita eram mesmo encenadas ou se seriam meros textos didáticos, nada tendo a ver com o teatro. Lembrando que o ensino na Idade Média era ministrado quase que exclusivamente nos mosteiros, sem dúvida, encenados ou não, os textos de Rosvita tinham claros propósitos didáticos, como é possível perceber em *Sabedoria*, que passamos a transcrever de [3].

Enredo da peça:

Paixão das santas virgens Fé, Esperança e Caridade. Foram levadas à morte pelos diversos suplícios a que as submeteu o imperador Adriano em presença da sua santa mãe, Sabedoria, que, com seus maternos conselhos, as exortou a suportar os sofrimentos.

Consumado o martírio, sua santa mãe, Sabedoria, tomou de seus corpos e, ungindo-os com bálsamo, deu-lhes sepultura de honra a três milhas de Roma. Ela, por sua vez, no quarto dia, após a oração sacra, enviou também seu espírito ao céu.

Vamos transcrever apenas o trecho da peça que traz a lição de Matemática. Trata-se de um diálogo entre Sabedoria e o imperador Adriano:

Adriano: Dize, que vieste fazer entre nós?

Sabedoria: Nenhuma outra coisa a não ser conhecer a doutrina da verdade para o aprendizado mais pleno da fé que combatéis e para consagrar minhas filhas a Cristo.

Adriano: Dize os nomes delas.

Sabedoria: A primeira se chama Fé; a segunda, Esperança; a terceira, Caridade.

Adriano: Quantos anos têm?

Sabedoria: (sussurrando) Agrada-vos, ó filhas, que perturbe com problema aritmético a este tolo?

Fé: Claro, mamãe. Porque nós também ouviremos de bom grado.

Sabedoria: Ó Imperador, se tu perguntas a idade das meninas: Caridade tem por idade um número deficiente que é parmente par; Esperança, também um número deficiente, mas parmente ímpar; e Fé, um número excedente mas impарmente par.

Adriano: Tal resposta me deixou na mesma: não sei que números são!

Sabedoria: Não admira, pois, tal como respondi, podem ser diversos números e não uma única resposta.

Adriano: Explica de modo mais claro, senão não entendo.

Sabedoria: Caridade já completou 2 olímpiadas; Esperança, 2 lustros; Fé, 3 olímpiadas.

Adriano: E por que o número 8, que é 2 olimpíadas, e o 10, que é 2 lustros, são números deficientes? E por que o 12 que completa 3 olimpíadas se diz número excedente?

Sabedoria: Porque todo número cuja soma de suas partes (isto é, seus divisores) dá menor que esse número chama-se deficiente, como é o caso do 8. Pois os divisores de 8 são: sua metade – 4, sua quarta parte – 2, e sua oitava parte – 1; que somados dão 7. Assim também o 10, cuja metade é 5; sua quinta parte é 2; e sua décima parte, 1. A soma das partes do 10 é, portanto, 8, que é menor que 10. Já o contrário se diz número excedente, como é o caso do 12. Pois sua metade é 6; sua terça parte, 4; a quarta parte, 3; a sexta parte, 2; e a duodécima parte, 1. Somadas as partes dão 16.

Quando porém o número não é maior nem menor que a soma de suas diversas partes, então esse número é chamado número perfeito.

É o caso do 6, cujas partes – 3, 2 e 1 – somadas dão o próprio 6. Do mesmo modo, o 28, 496 e 8128 também são chamados números perfeitos.

Adriano: E quanto aos outros números?

Sabedoria: São todos excedentes ou deficientes.

Adriano: E o que é um número parmente par?

Sabedoria: É o que se pode dividir em duas partes iguais e essas partes em duas iguais, e assim por diante até que não se possa mais dividir por 2 porque se atingiu o 1 indivisível. 8 e 16, por exemplo, e todos que se obtenham a partir da multiplicação por 2 são parmente pares.

Adriano: E o que é parmente ímpar?

Sabedoria: É o que se pode dividir em partes iguais, mas essas partes já não admitem divisão (por 2). É o caso do 10 e de todos os que se obtêm multiplicando um número ímpar por 2. Difere, pois, do tipo de número anterior, porque, naquele caso, o termo menor da divisão é também divisível; neste, só o termo maior é apto para a divisão.

No caso anterior, tanto a denominação como a quantidade são parmente pares; já aqui, se a denominação for par, a quantidade será ímpar; se quantidade for par, a denominação será ímpar.

Adriano: Não sei o que é isto de denominação e quantidade.

Sabedoria: Quando os números estão em “boa ordem”, o primeiro se diz menor e o último, maior. Quando, porém, se trata da divisão, denominação é quantas vezes o número se der. Já o que constitui cada parte, é o que chamamos quantidade.

Adriano: E o que é imparmente par?

Sabedoria: É o que – tal como o parmente par – pode ser dividido não só uma vez, mas duas e, por vezes, até mais. No entanto, atinge a indivisibilidade (por 2) sem chegar ao 1.

Adriano: Oh! Que minuciosa e complicada questão surgiu a partir da idade destas menininhas!

Sabedoria: Nisto deve-se louvar a supereminente sabedoria do Criador e a Ciência admirável do Artífice do mundo: pois não só no princípio criou o mundo do nada, dispondo tudo com número, peso e medida; como também nos deu a capacidade de poder dispor de admirável conhecimento das artes liberais até mesmo sobre o suceder-se do tempo e das idades dos homens.

Observem que os números parmente pares são as nossas potências de 2, os parmente ímpares são aqueles que são o dobro de um ímpar; os imparmente pares são os produtos de um ímpar por um parmente par. Denominação e quantidade são os atuais quociente e divisor.

Uma fala de Sabedoria que também chama atenção é sua afirmativa de que todos os números, além de 6, 28, 496 e 8128, são excedentes ou deficientes. Isso mostra o desconhecimento, por parte dos estudiosos da época da obra os *Elementos* de Euclides, que contém, no livro IX, a demonstração de que qualquer número da forma $2^{n-1}(2^n - 1)$ é perfeito se $2^n - 1$ for primo. Com esse resultado, já para $n = 13$, obtém-se o próximo perfeito que é o número 33 550 336. Essa perda de contato com os ensinamentos de Euclides ficará bastante evidente nos problemas de geometria da seção a seguir.

II. Já existia Educação Matemática no século VIII

Ainda para mostrar que na Idade Média se entendia de ensino de Matemática, voltemos um pouco no tempo mudando o século e os personagens.

É extremamente interessante a seleção de *Problemas para aguçar a inteligência dos jovens*, encontrada em *Patrologiae cursus completus, séries latina*, atribuída a Beda, qualificado de *O Venerável*, que nasceu e viveu na Inglaterra entre 673 e 735, tornando-se um dos maiores professores das escolas religiosas medievais. As soluções apresentadas também estão em *Patrologiae cursus completus, séries latina* (ver [3]) e são algumas atribuídas a Beda e outras a Alcuíno (séculos VIII-IX).

Os enunciados dos problemas traduzem bem a cultura popular da época, com a pouca Matemática que se conhecia apresentada e ensinada de modo atraente e bem-humorado, privilegiando o desenvolvimento da inteligência dos alunos, como pretendemos fazer hoje. Também já contemplavam a idéia hoje muito difundida de usar situações do cotidiano como motivadores do aprendizado.

Vejamos, então, alguns dos problemas da seleção de Beda, encontrados em [3], que certamente surpreenderão muitos dos leitores que acreditam que certos problemas e soluções são de épocas mais recentes.

1. Problema do lobo, da cabra e da couve: Certo homem devia passar, de uma a outra margem de um rio, um lobo, uma cabra e um maço de couves. E não pôde encontrar outra embarcação, a não ser uma que só comportava dois entes de cada vez, e ele tinha recebido ordens de transportar ilesa toda a carga. Diga, quem puder, como fez ele a travessia?

Solução: Não apresentamos a solução por ser bem conhecida, pois esse problema é proposto até hoje em diferentes versões. O surpreendente é que seja tão antigo.

 **2. Problema do boi:** Um boi que está arando todo o dia, quantas pegadas deixa ao fazer o último sulco?

 Solução: Nenhuma em absoluto. Pois o boi precede o arado e o arado segue o boi; e, assim, todas as pegadas que o boi faz na terra trabalhada, o arado as apaga. E, deste modo, não se encontrará no último sulco nenhuma pegada.

Este problema mostra bem o espírito brincalhão da época.

3. Problema da escada de 100 degraus: Numa escada de 100 degraus, no 1º degrau está pousada 1 pomba; no 2º, 2; no 3º, 3; no 4º, 4; no 5º, 5; e assim em todos os degraus até o 100º. Diga, quem puder, quantas pombas há no total?

Solução: Calcule-se assim: tome a pomba do 1º degrau e some-a à 99º do 99º, o que dá 100. Do mesmo modo, as do 2º com as do 98º somam 100. E assim degrau por degrau, juntando sempre um de cima com o correspondente de baixo, e obterá sempre 100. Some-se tudo junto com as 50 do 50º degrau e as 100 do 100º degrau que ficaram de fora, e obter-se-á 5 050.

Reconhecem aqui os leitores a famosa solução de Gauss, aos sete anos de idade, respondendo ao problema de somar $1 + 2 + \dots + 100$?

4. Problema dos dois caminhantes que viram cegonhas: Dois homens andando pelo caminho viram cegonhas e disseram entre si: Quantas são? E, contando-as, disseram: Se fossem outras tantas, e ainda outras tantas; e, se somasse metade de um terço do que deu e ainda se acrescentassem mais duas, seriam 100. Diga,



quem puder, quantas cegonhas foram vistas por eles inicialmente?

Solução: 28. Pois 28 com 28 e 28 dá 84. Metade de um terço, 14, que somado com 84, dá 98, que, acrescido de 2, resulta 100.



5. Problema do comprador: Disse certo negociante: Quero com 100 denários comprar 100 suínos; mas cada porco custa 10 denários, cada leitoa, 5, e cada 2 porquinhos, 1 denário. Diga, quem entendeu, quantos porcos, leitoas e porquinhos devem ser comprados para que o preço seja exatamente 100 denários, nem mais nem menos?

Solução: 9 leitoas e 1 porco custam 55 denários e 80 porquinhos, 40. Já temos 90 suínos por 95 denários. Com os restantes 5 denários compram-se 10 porquinhos.

6. Problema da tela: Tenho uma tela de 100 cíubitos de comprimento e de 80 de largura. Quero daí fazer telinhas de 5 por 4. Diga pois, ó sabido, quantas telinhas podem-se fazer?

Solução: De 400, 5 é a octogésima parte e 4, a centésima parte. Seja 80 multiplicado por 5, ou 100 por 4, sempre encontrará 400.

Problemas como o 4, 5 ou 6 eram resolvidos sem equações, incógnitas, etc., recursos desconhecidos na época, mas por processos de tentativa. É interessante observar que esse procedimento medieval é bastante recomendado pelos educadores de hoje para incentivar o raciocínio e a criatividade dos estudantes.

O problema a seguir mostra que as soluções obtidas por tentativa nem sempre eram completas, deixando de lado alternativas válidas.

7. Certo pai de família tinha 100 dependentes, a quem mandou distribuir 100 medidas de provisões do seguinte modo: que os homens recebessem 3 medidas; as mulheres, 2; e as crianças, meia. Diga, quem for capaz, quantos homens, mulheres e crianças eram?

Solução: 11 vezes 3 dá 33; 15 vezes 2, 30; 74 vezes meio, 37. 11 vezes mais 15 mais 74 é 100; e, do mesmo modo, 33 mais 30 mais 37.

Hoje, usando equações e incógnitas, faríamos:

h : número de homens.

m : número de mulheres.

c : número de crianças

Então,

$$h = 20, m = 0, c = 80$$

$$h = 17, m = 5, c = 78$$

$$h = 14, m = 10, c = 76$$

$$h = 11, m = 15, c = 74$$

$$h + m + c = 100$$

$$3h + 2m + c/2 = 100,$$

$$\text{que implica } 100 = 5h + 3m \text{ que fornece as soluções:}$$

$$h = 8, m = 20, c = 72$$

$$h = 5, m = 25, c = 70$$

$$h = 2, m = 30, c = 68$$



Os problemas 8 e 9 a seguir mostram, em suas soluções incorretas, as deficiências da época em questões de geometria, denunciando o desconhecimento dos resultados da escola grega.

8. Problema do campo triangular: Um campo triangular mede de um lado 30 pérticas, de outro também 30 e de frente 18. Diga, quem puder, quantos aripenos [um aripeno equivale a 144 “pérticas quadradas”] compreende?

Solução: Os dois lados de 30 somados perfazem 60, cuja metade é 30 que multiplicado por 9 (que é a metade de 18) dá 270 (que é o cálculo da área em “pérticas quadradas”). Para expressar a área em aripenos é necessário dividir por 144, etc.

Observem que no cálculo da área do triângulo a medida da altura relativa a um dos lados era substituída erroneamente pela média das medidas dos outros dois lados.

9. Problema do campo circular: Quantos aripenos tem um campo circular de 400 pérticas de circunferência.

Solução: A quarta parte de 400 é 100; 100 multiplicado por 100 dá 10 000, que é a área. Para expressar em aripenos, divide-se por 144, etc.

Aqui a área do círculo seria dada por $\left(\frac{2\pi r}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \pi r^2$, que embute uma aproximação de π por 4, que é bastante grosseira.

Os progressos nos textos geométricos, na Idade Média, só se iniciaram com Gerberto (950-1003) mas ai já é uma outra história...

Referências bibliográficas:

[1] Eves, H. E. *An introduction of the History of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.

[2] Boyer, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgar Blucher, 1996.

[3] Lauand, L. J. *Educação, teatro e Matemática Medievais*. São Paulo: Editora Perspectiva., 1986.

[4] Internet:

- The Catholic Encyclopedia – Hroswitha.
- Roswitha # 2/2 by Julio Gonzalez Cabillon

VOCÊ NOTOU?

02/02/2000 é a primeira data que tem todos os dígitos pares desde 28/08/888. Há mais de 1000 anos!

Qual a próxima data que terá todos os dígitos ímpares?

VOCÊ SABIA?

Que cortando os 6 de $\frac{16}{64}$ obtemos o resultado correto $\frac{1}{4}$?
Há mais casos similares com números menores que 100?

