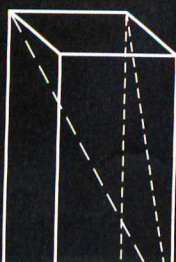


$$5ab+6k$$

$$5ab+6k$$

$$5ab+6k$$



$$AB+B$$

RESPONSÁVEIS

ÉLVIA MUREB SALLUM E

ANTÔNIO DE PÁDUA FRANCO FILHO

ENVIE SUAS SOLUÇÕES PARA RPM — PROBLEMAS

IME/USP — CIDADE UNIVERSITÁRIA

RUA DO MATÃO, 1010, BLOCO B, SALA 105

05508-090 — SÃO PAULO, SP

PROBLEMAS

As soluções dos problemas 391 a 395 serão corrigidas apenas se enviadas até 20 de junho de 2016.

391

Mostre que, para todo inteiro $n \geq 1$, o número $n^2(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ é divisível por 360.

392

Sabendo-se que a, b, c são as medidas dos lados de um triângulo, determine os números reais x, y, z que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} x^2 y^2 + x^2 z^2 = axyz \\ y^2 x^2 + y^2 z^2 = bxyz \\ z^2 x^2 + z^2 y^2 = cxyz \end{cases}$$

393

Seja ABC um triângulo isósceles não equilátero com $AB = AC$. Seja B' o ponto comum entre a mediatriz do lado AC e a reta paralela ao lado AC que passa pelo ponto B . Prove que o perímetro do triângulo $AB'C$ é menor ou igual ao do triângulo ABC . Determine o ângulo $\hat{A}$ para que o triângulo $AB'C$ seja equilátero.

$$5ab+6k$$

$$5ab+6k$$

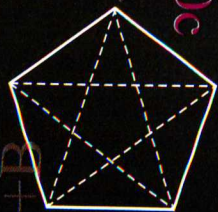
$$CA_1 = A_1 A_2 = A_2 A$$

$$27mn + m^2$$

$$5ab+6k$$

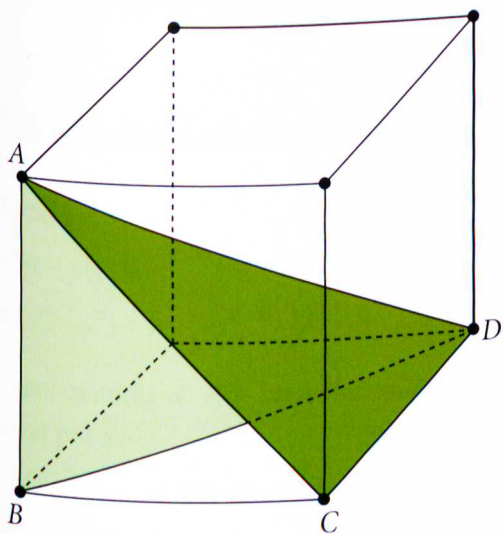
$$3AB+B$$

$$x' = [5 + \sqrt{17}/2] x'' = [5 - \sqrt{17}/2] a$$



394

No cubo da figura, mostrar que o ângulo entre os planos ABD e ACD mede 60° .



395

Seja $p(z) = z^4 - 6z^2 + 25$ um polinômio na variável complexa z . Esboce no plano complexo o seguinte conjunto

$$S = \{z \in \mathbb{C} : p(z) \in \mathbb{R} \text{ e } p(z) < 0\}$$

PROBLEMINHAS

1. Três irmãos vão fazer compras. Elas serão pagas com o cartão do pai, que lhes forneceu a senha, formada por quatro algarismos, oralmente. Na hora de pagar, nenhum deles lembrava a senha: o primeiro lembrou que os dois primeiros algarismos da senha são iguais e o segundo lembrou que os dois últimos algarismos são iguais. O terceiro, que é bom em Matemática, lembrou que a senha formava um número quadrado perfeito. Com essas informações, você pode ajudar os irmãos a recuperar a senha?

2. A primeira expedição a Marte encontrou apenas ruínas de uma civilização. Os exploradores conseguiram decifrar uma equação marciana: $5x^2 - 50x + 125 = 0 \Rightarrow x = 5, x = 8$. Uma matemática estranha. O valor $x = 5$ parece correto, mas $x = 8$ requer alguma explicação. Supondo que os marcianos usavam, como nós, uma base numérica igual ao número de dedos das mãos, quantos dedos você diria que os marcianos tinham?

3. Quatro garotos, André, Bruno, Carlos e Danilo estão apaixonados por quatro garotas, Eva, Flávia, Gina e Helena. Triste dizer que, em nenhum caso, o amor é correspondido. André ama a garota que ama o garoto que ama Eva. Flávia é amada pelo garoto que é amado pela garota amada por Bruno. Carlos ama a garota que ama Danilo. Se Bruno não é amado por Gina, e o garoto que é amado por Helena não ama Gina, quem ama André?

Respostas dos Probleminhas na página 23

SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS PROPOSTOS NA RPM 87

381

Determinar, justificando, o conjunto dos números complexos z tais que

$$|z - 7| + |z - 2| = 5.$$

SOLUÇÃO

Seja $z - 2 = r \cos \theta + i r \sin \theta$, $r \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.

Assim,

$$|z - 7| + |z - 2| = |(r \cos \theta - 5) + i r \sin \theta| + r = 5 \text{ ou}$$

$$(5 - r)^2 = (r \cos \theta - 5)^2 + r^2 \sin^2 \theta$$

$$(5 - r)^2 = r^2 \cos^2 \theta - 10r \cos \theta + 25 + r^2 \sin^2 \theta$$

$$25 - 10r + r^2 = r^2 - 10r \cos \theta + 25.$$

Então, $\cos \theta = 1$, o que implica $\theta = 0$.

Logo, as soluções são os números reais r , $r \geq 0$, tais que $|r - 5| = 5 - r$.