AUTOVALORES DO PROBLEMA DE DIRICHLET EM REGIÕES SIMÉTRICAS

Antônio Luiz Pereira
IME-USP

Consideremos o problema de auto-valores:

$$(*) \qquad \begin{cases} \Delta u - \lambda u = 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ no } \partial\Omega,\ \Omega \subset \mathbf{R}^n \text{ aberto limitado de classe } C^3. \end{cases}$$

Seja $G \subset O(n)$ um subgrupo compacto do grupo ortogonal. Diremos que Ω é G-simétrica se $g\Omega = \Omega$ para todo $g \in G$. Seja ainda $\Gamma : G \to L(L^2(\Omega))$ a representação definida por

$$\Gamma_g u = u \circ g^{-1}$$

e G_x o grupo de isotropia de $x \in \mathbf{R}^n$.

TEOREMA 1 - *Suponhamos que existe $x \in \mathbf{R}^n$ tal que $G_x = \{Id\}$ e seja $R : G \to L(\mathbf{R}^n)$ uma representação irredutível de G. Então existem auto-funções $v_1, \dots, v_n$ associados a um mesmo auto-valor λ tais que Γ restrita ao subespaço gerado por $\{v_1 \dots, v_n\}$ é equivalente a R.*

Introduzimos uma topologia no conjunto das regiões Ω de classe C^3, dizendo que Ω está numa ϵ-vizinhança de Ω_0 se existir um difeomorfismo $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ tal que $h(\Omega_0) = \Omega$ e $\|h - Id\|_{C^3} < \epsilon$.

No resultado que segue, "genericamente" significa: para uma interseção enumerável de abertos e densos na topologia induzida pela acima descrita no conjunto das regiões G-simétricas.

TEOREMA 2 - Se G é um grupo comutativo finito então, genericamente, os auto-valores de $(*)$ têm multiplicidade ≤ 2.

Referência:

Henry, D. - *Perturbation of the boundary in boundary value problems of P.D.Es.* (notas não publicadas).