

MAT-6678 - Topics on $\mathcal{C}^\infty$ –Rings

Aula 1

18 de julho de 2019

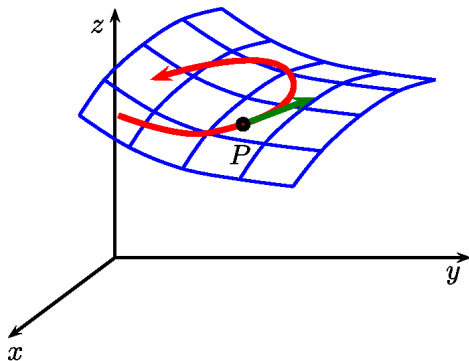


Introdução

Ao imaginar um vetor tangente a uma superfície em um ponto P , os geômetras prontamente o identificam com um pequeno arco de curva contido na superfície, que contém o ponto P ao qual este vetor é tangente.



Introdução

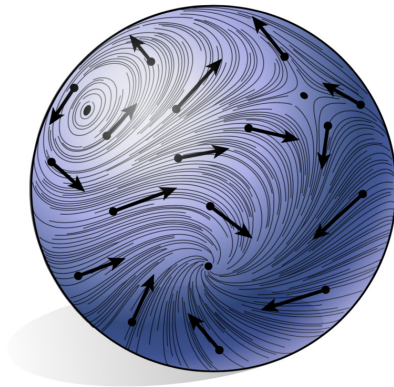


Introdução

Analogamente, ao imaginar um “campo vetorial”, convém muitas vezes imaginá-lo como uma *transformação infinitesimal*, indicando, em cada ponto da superfície, a direção na qual o campo vetorial tende a arrastar uma partícula colocada naquele ponto.



Introdução



Introdução

Estes modos de pensar nos levam a um impasse “pedagógico”:



Introdução

Estes modos de pensar nos levam a um impasse “pedagógico”:

(P1) se atribuirmos importância de menos à “intuição geométrica”, a Geometria Diferencial toma um aspecto muito técnico e “pesado”;



Introdução

Estes modos de pensar nos levam a um impasse “pedagógico”:

(P1) se atribuirmos importância de menos à “intuição geométrica”, a Geometria Diferencial toma um aspecto muito técnico e “pesado”;

(P2) se, por outro lado, enfatizarmos demais a “intuição”, podemos vir a subestimar a necessidade de rigor.



Introdução

A Geometria Diferencial Sintética (GDS) - além de sua importância intrínseca para a Matemática, nos dá uma solução para este impasse aparente:



Introdução

A Geometria Diferencial Sintética (GDS) - além de sua importância intrínseca para a Matemática, nos dá uma solução para este impasse aparente:

Na GDS, elementos infinitesimais são manipulados *explicitamente* como elementos de quadrado nulo, o que acaba por dar um significado preciso à “intuição geométrica”, resolvendo o primeiro problema, (P1).



Introdução

A Geometria Diferencial Sintética (GDS) - além de sua importância intrínseca para a Matemática, nos dá uma solução para este impasse aparente:

Na GDS, elementos infinitesimais são manipulados *explicitamente* como elementos de quadrado nulo, o que acaba por dar um significado preciso à “intuição geométrica”, resolvendo o primeiro problema, (P1).

Conforme veremos, a introdução destes infinitésimos quadrado-nilpotentes não é compatível com a Lógica Clássica, mas com a Lógica Intuicionista. Uma vez que geralmente não estamos familiarizados em esta Lógica, tendemos a ser muito criteriosos com respeito ao rigor, o que resolve o problema (P2).



Geometria Diferencial Sintética

Tradicionalmente há dois métodos de se estudar Geometria:



Geometria Diferencial Sintética

Tradicionalmente há dois métodos de se estudar Geometria:

- ▶ o método analítico - onde, com a introdução de sistemas de coordenadas abordamos problemas geométricos fazendo uso da Análise Matemática e outras ferramentas;



Geometria Diferencial Sintética

Tradicionalmente há dois métodos de se estudar Geometria:

- ▶ o método analítico - onde, com a introdução de sistemas de coordenadas abordamos problemas geométricos fazendo uso da Análise Matemática e outras ferramentas;
- ▶ o método sintético - onde prescindimos de sistemas de coordenadas e abordamos os aspectos geométricos de um modo lógico-dedutivo.



Geometria Diferencial Sintética

A Geometria Diferencial Sintética pode ser desenvolvida dentro de uma certa categoria, suficientemente rica em construções, que contenha um modelo da reta geométrica que seja capaz de acomodar infinitésimos quadrado-nilpotentes.



Geometria Diferencial Sintética

A Geometria Diferencial Sintética pode ser desenvolvida dentro de uma certa categoria, suficientemente rica em construções, que contenha um modelo da reta geométrica que seja capaz de acomodar infinitésimos quadrado-nilpotentes.

Em outras palavras, a categoria na qual vamos estudar Geometria Diferencial Sintética deve conter um objeto anel comutativo com unidade, $(R, +_R, \cdot_R, 1_R)$ que contenha o subobjeto:



Geometria Diferencial Sintética

A Geometria Diferencial Sintética pode ser desenvolvida dentro de uma certa categoria, suficientemente rica em construções, que contenha um modelo da reta geométrica que seja capaz de acomodar infinitésimos quadrado-nilpotentes.

Em outras palavras, a categoria na qual vamos estudar Geometria Diferencial Sintética deve conter um objeto anel comutativo com unidade, $(R, +_R, \cdot_R, 1_R)$ que contenha o subobjeto:

$$D = \llbracket d.R \mid d^2 = 0 \rrbracket \preceq R,$$

que “absorve” a multiplicação por elementos de R e não deve conter somente o elemento neutro, 0 - o que excluiria os infinitésimos nilpotentes do nosso estudo.



Geometria Diferencial Sintética

Tendo este R disponível como modelo da reta geométrica, podemos obter o plano geométrico simplesmente como $R \times R$ (bastando tomar o produto, na categoria em questão, de duas cópias “ortogonais” de R), do espaço tridimensional como $R \times R \times R$ e assim por diante.



Geometria Diferencial Sintética

Tendo este R disponível como modelo da reta geométrica, podemos obter o plano geométrico simplesmente como $R \times R$ (bastando tomar o produto, na categoria em questão, de duas cópias “ortogonais” de R), do espaço tridimensional como $R \times R \times R$ e assim por diante.

Note que a exigência de $D \neq \{0\}$ exclui $\mathbb{R}$ como modelo da reta geométrica, uma vez que $\mathbb{R}$ é corpo.



O Axioma de Kock-Lawvere

Tendo disponível o objeto D , podemos enunciar o:

Axioma (**Kock-Lawvere**)

Sejam $(R, +_R, \cdot_R, 1_R)$ um (objeto) anel não-trivial em uma categoria $\mathcal{C}$, ou seja, tal que $1_R \neq 0_R$ e $D = \llbracket d.R \mid d^2 = 0 \rrbracket \preceq R$.



O Axioma de Kock-Lawvere

Tendo disponível o objeto D , podemos enunciar o:

Axioma (**Kock-Lawvere**)

Sejam $(R, +_R, \cdot_R, 1_R)$ um (objeto) anel não-trivial em uma categoria $\mathcal{C}$, ou seja, tal que $1_R \neq 0_R$ e $D = \llbracket d.R \mid d^2 = 0 \rrbracket \preceq R$. Para toda função $f : D \rightarrow R$



O Axioma de Kock-Lawvere

Tendo disponível o objeto D , podemos enunciar o:

Axioma (**Kock-Lawvere**)

Sejam $(R, +_R, \cdot_R, 1_R)$ um (objeto) anel não-trivial em uma categoria $\mathcal{C}$, ou seja, tal que $1_R \neq 0_R$ e $D = \llbracket d.R \mid d^2 = 0 \rrbracket \preceq R$. Para toda função $f : D \rightarrow R$ existe um único $b \in R$ tal que:



O Axioma de Kock-Lawvere

Tendo disponível o objeto D , podemos enunciar o:

Axioma (**Kock-Lawvere**)

Sejam $(R, +_R, \cdot_R, 1_R)$ um (objeto) anel não-trivial em uma categoria $\mathcal{C}$, ou seja, tal que $1_R \neq 0_R$ e $D = \llbracket d.R \mid d^2 = 0 \rrbracket \preceq R$. Para toda função $f : D \rightarrow R$ existe um único $b \in R$ tal que:

$$(\forall d \in D)(f(d) = f(0) + d \cdot b)$$

Denotamos este único b por $f'(0)$.



O Axioma de Kock-Lawvere

Observação

*Um objeto anel $(R, +_R, \cdot_R, 1_R)$ que, juntamente com seu subobjeto $D = \llbracket d.R \mid d^2 = 0 \rrbracket$, para o qual vale o axioma de Kock-Lawvere é chamado um **anel do tipo linha**.*



O Axioma de Kock-Lawvere

Observação

Um objeto anel $(R, +_R, \cdot_R, 1_R)$ que, juntamente com seu subobjeto $D = \llbracket d.R \mid d^2 = 0 \rrbracket$, para o qual vale o axioma de Kock-Lawvere é chamado um **anel do tipo linha**.

Em suma, um objeto anel R é do tipo linha: isto quer dizer que o morfismo canônico:

$$\begin{array}{rcl} \alpha : R \times R & \rightarrow & R^D \\ (a, b) & \mapsto & \alpha(a, b) : D \rightarrow R \\ & & d \mapsto a + b \cdot d \end{array}$$

é um isomorfismo. Isto equivale a dizer que vale o axioma de Kock-Lawvere.



O Axioma de Kock-Lawvere

O axioma acima nos permite a seguinte:

Definição (**Derivada**)

Sejam $f : R \rightarrow R$ uma função, $a \in R$ e considere:

$$\begin{aligned} g_a : D &\rightarrow R \\ d &\mapsto f(a + d) \end{aligned}$$

Pelo **Axioma de Kock-Lawvere** existe um único $b \in R$ tal que:

$$(\forall d \in D)(g_a(d) = g_a(0) + b \cdot d)$$

ou seja, tal que:

$$(\forall d \in D)(f(a + d) = f(a) + b \cdot d)$$

Denotamos b assim obtido por $f'(a)$.



O Axioma de Kock-Lawvere

Observe que ao impor este axioma sobre o anel R estamos postulando que *toda função* $f : R \rightarrow R$ é diferenciável, uma vez que o processo acima pode ser repetido tantas vezes quanto quisermos.



O Axioma de Kock-Lawvere

Exercício: Mostre, utilizando o **Axioma de Kock-Lawvere**, que para qualquer $\alpha \in R$ e para quaisquer $f, g : R \rightarrow R$ tem-se:



O Axioma de Kock-Lawvere

Exercício: Mostre, utilizando o **Axioma de Kock-Lawvere**, que para qualquer $\alpha \in R$ e para quaisquer $f, g : R \rightarrow R$ tem-se:

- $(f + g)' = f' + g'$;



O Axioma de Kock-Lawvere

Exercício: Mostre, utilizando o **Axioma de Kock-Lawvere**, que para qualquer $\alpha \in R$ e para quaisquer $f, g : R \rightarrow R$ tem-se:

- $(f + g)' = f' + g'$;
- $(\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f'$;



O Axioma de Kock-Lawvere

Exercício: Mostre, utilizando o **Axioma de Kock-Lawvere**, que para qualquer $\alpha \in R$ e para quaisquer $f, g : R \rightarrow R$ tem-se:

- $(f + g)' = f' + g'$;
- $(\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f'$;
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$;



O Axioma de Kock-Lawvere

Exercício: Mostre, utilizando o **Axioma de Kock-Lawvere**, que para qualquer $\alpha \in R$ e para quaisquer $f, g : R \rightarrow R$ tem-se:

- $(f + g)' = f' + g'$;
- $(\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f'$;
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$;
- $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$



Incompatibilidade com a Lógica Clássica

Se usarmos a Lógica Clássica, temos o princípio do terceiro excluído $[(\alpha \vee \neg \alpha)]$ ou, equivalentemente, $(\neg \neg \alpha) \rightarrow \alpha$, de modo que é válido dizer que dado $d \in D$, ou bem $d = 0$ ou bem $d \neq 0$.



Incompatibilidade com a Lógica Clássica

Se usarmos a Lógica Clássica, temos o princípio do terceiro excluído $[(\alpha \vee \neg \alpha)$ ou, equivalentemente, $(\neg \neg \alpha) \rightarrow \alpha]$, de modo que é válido dizer que dado $d \in D$, ou bem $d = 0$ ou bem $d \neq 0$.
Veja a seguinte consequência - deduzida usando o princípio do terceiro excluído - do Axioma de Kock-Lawvere:



Incompatibilidade com a Lógica Clássica

Proposição

Se $(R, +_R, \cdot_R, 1_R)$ satisfaz o axioma de Kock-Lawvere, $R = \{0\}$.



Incompatibilidade com a Lógica Clássica

Proposição

Se $(R, +_R, \cdot_R, 1_R)$ satisfaz o axioma de Kock-Lawvere, $R = \{0\}$.

Demonstração.

- Mostraremos que $D = \{0\}$.



Incompatibilidade com a Lógica Clássica

Proposição

Se $(R, +_R, \cdot_R, 1_R)$ satisfaz o axioma de Kock-Lawvere, $R = \{0\}$.

Demonstração.

- Mostraremos que $D = \{0\}$.

-

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow R \\ d &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{se } d = 0 \\ 1, & \text{se } d \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



Incompatibilidade com a Lógica Clássica

Proposição

Se $(R, +_R, \cdot_R, 1_R)$ satisfaz o axioma de Kock-Lawvere, $R = \{0\}$.

Demonstração.

- Mostraremos que $D = \{0\}$.

-

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow R \\ d &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{se } d = 0 \\ 1, & \text{se } d \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Existe $b \in R$ tal que $(\forall d \in D)(f(d) = b \cdot d)$;



Incompatibilidade com a Lógica Clássica

Proposição

Se $(R, +_R, \cdot_R, 1_R)$ satisfaz o axioma de Kock-Lawvere, $R = \{0\}$.

Demonstração.

- Mostraremos que $D = \{0\}$.

-

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow R \\ d &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{se } d = 0 \\ 1, & \text{se } d \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Existe $b \in R$ tal que $(\forall d \in D)(f(d) = b \cdot d)$;
- Se existe $d \neq 0$, temos $1 = d \cdot b$, de modo que $1 = 1^2 = (d \cdot b)^2 = 0^2 \cdot b^2 = 0$, donde $1 = 0$ e R é o anel trivial.



Formulação Alternativa do Axioma de Kock-Lawvere

Axioma

Se $(R, +_R, \cdot_R, 1_R)$ é um anel comutativo não trivial, então:

$$\begin{array}{rcl} \alpha : R \times R & \rightarrow & R^D \\ (a, b) & \mapsto & \alpha(a, b) : \begin{array}{ccc} D & \rightarrow & R \\ d & \mapsto & a + b \cdot d \end{array} \end{array}$$

é um isomorfismo.



A Relação de Vizinhança

A proposição anterior nos diz, resumidamente, que:

$$\vdash \neg(\forall d \in D)(d = 0 \vee d \neq 0),$$

de modo que não conseguimos *indivduar* os pontos de D , e os pontos da nossa reta geométrica não são *igualmente observáveis*.



A Relação de Vizinhança

A proposição anterior nos diz, resumidamente, que:

$$\vdash \neg(\forall d \in D)(d = 0 \vee d \neq 0),$$

de modo que não conseguimos *indivíduoar* os pontos de D , e os pontos da nossa reta geométrica não são *igualmente observáveis*. Podemos, no entanto, definir precisamente, o que significa dois pontos x, y de R estarem “infinitamente” próximos da seguinte forma: dois pontos x, y em R são **pontos vizinhos** se, e somente se $x - y \in D$, e denotamos por $x \sim y$. Esta relação é reflexiva e simétrica porém não é transitiva (verifique!).



Alguns Objetivos da GDS

Na Geometria Diferencial Sintética queremos descrever axiomáticamente as variedades e as funções de classe $\mathcal{C}^\infty$, que constituem a categoria **Man**.



Alguns Objetivos da GDS

Na Geometria Diferencial Sintética queremos descrever axiomáticamente as variedades e as funções de classe $\mathcal{C}^\infty$, que constituem a categoria **Man**.

A categoria **Man**, no entanto, apresenta certas “deficiências” para um bom tratamento axiomático:



Alguns Objetivos da GDS

Na Geometria Diferencial Sintética queremos descrever axiomáticamente as variedades e as funções de classe $\mathcal{C}^\infty$, que constituem a categoria **Man**.

A categoria **Man**, no entanto, apresenta certas “deficiências” para um bom tratamento axiomático:

- **Man** não tem exponenciais, de modo que o espaço das funções de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre duas variedades de classe $\mathcal{C}^\infty$ não é, em geral, uma variedade de classe $\mathcal{C}^\infty$;



Alguns Objetivos da GDS

Na Geometria Diferencial Sintética queremos descrever axiomáticamente as variedades e as funções de classe $\mathcal{C}^\infty$, que constituem a categoria **Man**.

A categoria **Man**, no entanto, apresenta certas “deficiências” para um bom tratamento axiomático:

- **Man** não tem exponenciais, de modo que o espaço das funções de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre duas variedades de classe $\mathcal{C}^\infty$ não é, em geral, uma variedade de classe $\mathcal{C}^\infty$;
- Não há uma variedade de classe $\mathcal{C}^\infty$ infinitesimalmente pequena D que internalize o fibrado tangente de uma variedade M , ou seja, que nos permita identificar TM com M^D .



Modelos para a GDS

- A ideia de Lawvere para construir tais categorias foi estender a categoria das variedades, **Man**, a uma categoria estruturalmente mais rica, (um topos) **S**, a categoria dos “espaços lisos”, munida de um objeto anel do tipo linha, R , onde estas construções sejam exequíveis e, ao mesmo tempo, adequada a uma descrição axiomática suficientemente simples.



Modelos para a GDS

- A ideia de Lawvere para construir tais categorias foi estender a categoria das variedades, **Man**, a uma categoria estruturalmente mais rica, (um topos) **S**, a categoria dos “espaços lisos”, munida de um objeto anel do tipo linha, R , onde estas construções sejam exequíveis e, ao mesmo tempo, adequada a uma descrição axiomática suficientemente simples.
- Isto significa que **S** é suficientemente semelhante à categoria **Set** em termos de construções. Podemos raciocinar sobre os objetos de **S** *como se fossem* conjuntos, tomando o cuidado de nos restringir a um raciocínio construtivista.



Modelos para a GDS

Uma tal categoria **S** deve ser tal que:



Modelos para a GDS

Uma tal categoria $\mathbf{S}$ deve ser tal que:

- todo objeto tem uma estrutura diferenciável;



Modelos para a GDS

Uma tal categoria $\mathbf{S}$ deve ser tal que:

- todo objeto tem uma estrutura diferenciável;
- todo morfismo de $\mathbf{S}$ tem uma derivada;



Modelos para a GDS

Uma tal categoria $\mathbf{S}$ deve ser tal que:

- todo objeto tem uma estrutura diferenciável;
- todo morfismo de $\mathbf{S}$ tem uma derivada;
- as regras do Cálculo Diferencial são simples cálculos usando infinitésimos nilpotentes.



Definição de Topos

Definição

Um **topos** é uma categoria $\mathcal{E}$ que satisfaz as seguintes propriedades:



Definição de Topos

Definição

Um **topos** é uma categoria $\mathcal{E}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- (I) $\mathcal{E}$ tem objeto terminal, $\mathbf{1}$ e pullbacks; equivalentemente, $\mathcal{E}$ tem todos os limites finitos;



Definição de Topos

Definição

Um **topos** é uma categoria $\mathcal{E}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- (I) $\mathcal{E}$ tem objeto terminal, $\mathbf{1}$ e pullbacks; equivalentemente, $\mathcal{E}$ tem todos os limites finitos;
- (II) $\mathcal{E}$ é cartesianamente fechada, ou seja, para todo objeto X temos um funtor exponencial, $(\cdot)^X : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ que é adjunto à direita do funtor $(\cdot) \times X : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$;



Definição de Topos

Definição

Um **topos** é uma categoria $\mathcal{E}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- (I) $\mathcal{E}$ tem objeto terminal, 1 e pullbacks; equivalentemente, $\mathcal{E}$ tem todos os limites finitos;
- (II) $\mathcal{E}$ é cartesianamente fechada, ou seja, para todo objeto X temos um funtor exponencial, $(\cdot)^X : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ que é adjunto à direita do funtor $(\cdot) \times X : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$;
- (III) $\mathcal{E}$ tem classificador de subobjetos, ou seja, um objeto Ω e um morfismo $1 \xrightarrow{\top} \Omega$ tal que para todo monomorfismo $Y \xrightarrow{\sigma} X$ existe um único morfismo $\chi_\sigma : X \rightarrow \Omega$ tal que o seguinte diagrama é um pullback:



Classificador de Subobjetos

Definição

Para todo monomorfismo $Y \xrightarrow{\sigma} X$ existe um único morfismo $\chi_\sigma : X \rightarrow \Omega$ tal que o seguinte diagrama é um pullback:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \downarrow ! & & \downarrow \chi_\sigma \\ 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array}$$



Toposes de Pré-Feixes e Toposes de Feixes

Exemplo

- Se $\mathcal{C}$ é uma categoria pequena, $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$, a categoria de funtores e transformações naturais é um topos, que denominamos o “topos de pré-feixes sobre $\mathcal{C}$ ”.



Toposes de Pré-Feixes e Toposes de Feixes

Exemplo

- Se $\mathcal{C}$ é uma categoria pequena, $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$, a categoria de funtores e transformações naturais é um topos, que denominamos o “topos de pré-feixes sobre $\mathcal{C}$ ”.
- Se (X, τ) é um espaço topológico, a categoria dos feixes sobre (X, τ) , $\mathbf{Sh}(X, \tau)$, é um topos.



Toposes de Pré-Feixes e Toposes de Feixes

Exemplo

- Se $\mathcal{C}$ é uma categoria pequena, $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$, a categoria de funtores e transformações naturais é um topos, que denominamos o “topos de pré-feixes sobre $\mathcal{C}$ ”.
- Se (X, τ) é um espaço topológico, a categoria dos feixes sobre (X, τ) , $\mathbf{Sh}(X, \tau)$, é um topos.
- Mais geralmente, se $(\mathcal{C}, J_{\text{Cov}})$ é um sítio pequeno, $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J_{\text{Cov}})$ é um topos. Toposes deste tipo são chamados de toposes de Grothendieck.



Modelos para a GDS

Definição

Um **modelo** para a Geometria Diferencial Sintética é um par $(\mathcal{E}, R)$, onde:



Modelos para a GDS

Definição

Um **modelo** para a Geometria Diferencial Sintética é um par $(\mathcal{E}, R)$, onde:

- $\mathcal{E}$ é uma categoria com limites projetivos finitos;



Modelos para a GDS

Definição

Um **modelo** para a Geometria Diferencial Sintética é um par $(\mathcal{E}, R)$, onde:

- $\mathcal{E}$ é uma categoria com limites projetivos finitos;
- R é um objeto anel comutativo do tipo linha em $\mathcal{E}$;



Modelos para a GDS

Definição

Um **modelo** para a Geometria Diferencial Sintética é um par $(\mathcal{E}, R)$, onde:

- $\mathcal{E}$ é uma categoria com limites projetivos finitos;
- R é um objeto anel comutativo do tipo linha em $\mathcal{E}$;
- O subobjeto $D = \llbracket d.R \mid d^2 = 0 \rrbracket$ é exponenciável - ou seja, se para todo objeto $A \in \text{Obj}(\mathcal{E})$ tem-se $A^D \in \text{Obj}(\mathcal{E})$;



Modelos para a GDS

Definição

Um **modelo** para a Geometria Diferencial Sintética é um par $(\mathcal{E}, R)$, onde:

- $\mathcal{E}$ é uma categoria com limites projetivos finitos;
- R é um objeto anel comutativo do tipo linha em $\mathcal{E}$;
- O subobjeto $D = \llbracket d.R \mid d^2 = 0 \rrbracket$ é exponenciável - ou seja, se para todo objeto $A \in \text{Obj}(\mathcal{E})$ tem-se $A^D \in \text{Obj}(\mathcal{E})$;
- O objeto D é “pequeno” no sentido em que o funtor $\text{Hom}(D, \cdot) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ preserva todos os limites indutivos.



Modelo Algébrico

O primeiro exemplo de um topos com um anel do tipo linha, R é um bem simples - e na verdade simples demais - para ser realmente útil em Geometria Diferencial.



Modelo Algébrico

O primeiro exemplo de um topos com um anel do tipo linha, R é um bem simples - e na verdade simples demais - para ser realmente útil em Geometria Diferencial.

Seja $\mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.p.}$ a categoria das $\mathbb{R}$ -álgebras comutativas finitamente apresentadas. Note que esta categoria é *pequena*.



Modelo Algébrico

O primeiro exemplo de um topos com um anel do tipo linha, R é um bem simples - e na verdade simples demais - para ser realmente útil em Geometria Diferencial.

Seja $\mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.p.}$ a categoria das $\mathbb{R}$ -álgebras comutativas finitamente apresentadas. Note que esta categoria é *pequena*.

O topos de pré-feixes $\mathbf{Set}^{\mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.p.}}$ tem, como objeto anel do tipo linha, o funtor esquecimento:

$$R : \mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.p.} \rightarrow \mathbf{Set}$$

Pode-se demonstrar que $R \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.p.}}(\mathbb{R}[X], \cdot)$, ou seja, R é um funtor representável.



Modelo Algébrico

Em $\mathbf{Set}^{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{\text{f.p.}}}$, R^R é isomorfo ao funtor:

$$\begin{array}{ccc} F : \mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{\text{f.p.}} & \rightarrow & \mathbf{Set} \\ A & \mapsto & R(A[X]) \end{array}$$



Álgebras de Weil

Definição

Uma álgebra de Weil é uma $\mathbb{R}$ -álgebra local, $(W, \mathfrak{m})$ (um anel local com uma estrutura de $\mathbb{R}$ -álgebra) que, enquanto $\mathbb{R}$ -espaço vetorial, tem dimensão finita e $W = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{m}$. Um morfismo de álgebras de Weil é simplesmente um morfismo de $\mathbb{R}$ -álgebras que preserva o elemento identidade. A categoria das álgebras de Weil e seus morfismos será denotada por $\mathcal{W}$.



Álgebras de Weil

Exemplo

Como exemplo de álgebra de Weil, temos o anel dos números duais, $\mathbb{R}[\varepsilon] = \{a + b \cdot \varepsilon \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, onde:

$$(a + b \cdot \varepsilon) + (c + d \cdot \varepsilon) = (a + c) + (b + d) \cdot \varepsilon$$

$$(a + b \cdot \varepsilon) \cdot (c + d \cdot \varepsilon) = a \cdot c + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot \varepsilon$$



Modelo Algébrico

Em $\mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.p.}$, funtores representáveis por álgebras de Weil correspondem aos objetos exponenciáveis. Por exemplo,

$$\begin{array}{ccc} D : \mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.p.} & \rightarrow & \mathbf{Set} \\ A & \mapsto & D(A) = \{a \in A \mid a^2 = 0\} \end{array}$$

é exponenciável, e pode-se demonstrar que os objetos R e D em $\mathbf{Set}^{\mathbb{R} - \mathbf{Alg}_{f.p.}}$ satisfazem o axioma de Kock-Lawvere.



Modelos para a GDS

Embora o topos $\mathbf{Set}^{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Alg}_{\text{f.p.}}}$ valide o axioma de Kock-Lawvere, este não é um bom modelo para a GDS. Por exemplo, não temos o objeto $[0, 1]$ disponível - o que nos impede de fazer integração. Mais fundamental ainda é o fato de que este topos contém apenas as variedades algébricas - o que não basta para a GDS.



Modelos para a GDS

Convém definirmos $\mathbb{R}$ –álgebras da seguinte maneira:

Definição

Uma $\mathbb{R}$ –álgebra é um conjunto A munido, para cada $n \in \mathbb{N}$, das operações n –árias dadas pelos polinômios de n variáveis, $p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$:

$$\begin{aligned} A(p) : \quad A^n &\rightarrow A \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto p(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

que satisfaz, enquanto axiomas, todas as igualdades entre composições de polinômios reais. Neste sentido, uma $\mathbb{R}$ –álgebra é um modelo desta teoria dos $\mathbb{R}$ –polinômios.



Modelos para a GDS

Vamos obter um modelo melhor para a GDS substituindo, na definição acima, polinômios por funções de classe $\mathcal{C}^\infty$, por meio da seguinte:



Modelos para a GDS

Vamos obter um modelo melhor para a GDS substituindo, na definição acima, polinômios por funções de classe C^∞ , por meio da seguinte:

Definição (Anel C^∞)

Um anel C^∞ é um conjunto A munido, para cada $n \in \mathbb{N}$, das operações n -árias dadas pelas funções $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} A(f) : \quad A^n &\rightarrow A \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto f(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

que satisfaz, enquanto axiomas, todas as igualdades entre composições de funções de classe C^∞ que são verdadeiras sobre $\mathbb{R}$.



Modelos para a GDS

Vamos obter um modelo melhor para a GDS substituindo, na definição acima, polinômios por funções de classe C^∞ , por meio da seguinte:

Definição (Anel C^∞)

Um anel C^∞ é um conjunto A munido, para cada $n \in \mathbb{N}$, das operações n -árias dadas pelas funções $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} A(f) : \quad A^n &\rightarrow A \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto f(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

que satisfaz, enquanto axiomas, todas as igualdades entre composições de funções de classe C^∞ que são verdadeiras sobre $\mathbb{R}$. Note que todo anel C^∞ tem uma estrutura de anel comutativo com unidade.



Modelos para a GDS

Definição (Morfismo de Anel $\mathcal{C}^\infty$)

Sejam A, B anéis $\mathcal{C}^\infty$ e $\varphi : A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis comutativos com unidade. Dizemos que φ é um **homomorfismo de anéis $\mathcal{C}^\infty$** se, e somente se para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{\varphi^n} & B^n \\ A(f) \downarrow & & \downarrow B(f) \\ A^m & \xrightarrow{\varphi^m} & B^m \end{array}$$

comuta.



Modelos para a GDS

Exemplo

$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ é um anel $\mathcal{C}^\infty$. Dado $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, temos a operação:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^\infty(f): \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})^n &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}) \\ (g_1, \dots, g_n) &\mapsto f \circ (g_1, \dots, g_n)\end{aligned}$$



Modelos para a GDS

Exemplo

- Se M é uma variedade de classe C^∞ , $C^\infty(M, \mathbb{R})$ é um anel C^∞ .



Modelos para a GDS

Exemplo

- Se M é uma variedade de classe C^∞ , $C^\infty(M, \mathbb{R})$ é um anel C^∞ .
- Se $I \subseteq C^\infty(M, \mathbb{R})$ é um ideal (no sentido dado pela Teoria dos Anéis), então $\frac{C^\infty(M, \mathbb{R})}{I}$ é um anel C^∞ .



Modelos para a GDS

Exemplo

- Se M é uma variedade de classe C^∞ , $C^\infty(M, \mathbb{R})$ é um anel C^∞ .
- Se $I \subseteq C^\infty(M, \mathbb{R})$ é um ideal (no sentido dado pela Teoria dos Anéis), então $\frac{C^\infty(M, \mathbb{R})}{I}$ é um anel C^∞ .
- Toda $\mathbb{R}$ -álgebra de séries de potências formais, $\mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]$ é um anel C^∞ .



Modelos para a GDS

Definição

Um anel C^∞ é finitamente apresentado se for isomorfo a um anel C^∞ da forma $\frac{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}{I}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos a categoria dos anéis C^∞ finitamente apresentados, juntamente com os seus morfismos, por $(C^\infty \mathbf{Rng})_{f.p.}$



Modelos para a GDS

Teorema

O funtor:

$$\begin{array}{ccc} m : \mathbf{Man} & \rightarrow & (\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng})_{\text{f.p.}} \\ M & \mapsto & \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \mathcal{C}^\infty(N, \mathbb{R}) \\ \downarrow g & & \downarrow - \circ g \\ N & & \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \end{array}$$

é pleno e fiel, e aplica pullbacks transversais sobre pushouts.



Modelos para a GDS

Considere o seguinte topos:

$$\mathbf{S} = \mathbf{Set}^{(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng})_{f.p.}}$$

Ao considerarmos o funtor de Yoneda contravariante:



Modelos para a GDS

Considere o seguinte topos:

$$\mathbf{S} = \mathbf{Set}^{(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng})_{f.p.}}$$

Ao considerarmos o funtor de Yoneda contravariante:

$$\begin{array}{ccc} Y : (\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng})_{f.p.} & \rightarrow & \mathbf{S} \\ A & \mapsto & \mathrm{Hom}_{(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng})_{f.p.}} (A, \cdot) \end{array}$$



Modelos para a GDS

Considere o seguinte topos:

$$\mathbf{S} = \mathbf{Set}^{(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng})_{f.p.}}$$

Ao considerarmos o funtor de Yoneda contravariante:

$$\begin{array}{ccc} Y : (\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng})_{f.p.} & \rightarrow & \mathbf{S} \\ A & \mapsto & \mathrm{Hom}_{(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng})_{f.p.}}(A, \cdot) \end{array}$$

obtemos um mergulho contravariante pleno, fiel e que preserva pullbacks transversais.



Modelos para a GDS

Pode-se demonstrar que:



Modelos para a GDS

Pode-se demonstrar que:

- Em **S** o funtor esquecimento:

$$\begin{array}{ccc} R : (\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng})_{\text{f.p.}} & \rightarrow & \mathbf{Set} \\ A & \mapsto & \{x \mid x \in A\} \end{array}$$

é representado por $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, ou seja, $R \cong \text{Hom}_{(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng})_{\text{f.p.}}}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \cdot)$



Modelos para a GDS

O funtor:

$$\begin{array}{ccc} D : (\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng})_{\text{f.p.}} & \rightarrow & \mathbf{Set} \\ A & \mapsto & \text{Hom}_{(\mathcal{C}^\infty \mathbf{Rng})_{\text{f.p.}}} \left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{(X^2)}, A \right) \end{array}$$

é, internamente em **S**, simplesmente $\llbracket d.R \mid d^2 = 0 \rrbracket$ e vale o axioma de Kock-Lawvere.



Modelos para a GDS

O topos $\mathbf{S}$, no entanto, é muito “grande” - e tem uma estrutura muito “grosseira”, no sentido em que:



Modelos para a GDS

O topos $\mathbf{S}$, no entanto, é muito “grande” - e tem uma estrutura muito “grosseira”, no sentido em que:

- ▶ O mergulho $m : \mathbf{Man} \rightarrow \mathbf{S}$ não preserva alguns colimites interessantes, como coberturas abertas;



Modelos para a GDS

O topos $\mathbf{S}$, no entanto, é muito “grande” - e tem uma estrutura muito “grosseira”, no sentido em que:

- ▶ O mergulho $m : \mathbf{Man} \rightarrow \mathbf{S}$ não preserva alguns colimites interessantes, como coberturas abertas;
- ▶ O objeto anel do tipo linha, R , não é um anel local;



Modelos para a GDS

O topos $\mathbf{S}$, no entanto, é muito “grande” - e tem uma estrutura muito “grosseira”, no sentido em que:

- ▶ O mergulho $m : \mathbf{Man} \rightarrow \mathbf{S}$ não preserva alguns colimites interessantes, como coberturas abertas;
- ▶ O objeto anel do tipo linha, R , não é um anel local;
- ▶ O objeto anel do tipo linha, R , não é arquimediano.



Modelos para a GDS

Consideramos, assim, uma subcategoria da dos anéis $\mathcal{C}^\infty$ finitamente apresentados:



Modelos para a GDS

Consideramos, assim, uma subcategoria da dos anéis $\mathcal{C}^\infty$ finitamente apresentados:

Definição (anel $\mathcal{C}^\infty$ germe-determinado)

*Seja I um ideal de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que I é um **ideal germe-determinado** se, e somente se para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tivermos:*

$$(\forall x \in Z(I))(f|_{x \in I} \rightarrow f \in I).$$

A categoria dos anéis $\mathcal{C}^\infty$ da forma $\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}$ onde I é um ideal germe-determinado, juntamente com seus morfismos, será denotada por G .



Um bom modelo para a GDS

Se I é um ideal de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, existe um menor ideal germe-determinado, $\widetilde{I}$, que contém I .



Um bom modelo para a GDS

Se I é um ideal de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, existe um menor ideal germe-determinado, $\tilde{I}$, que contém I . Basta tomarmos:

$$\tilde{I} = \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha \mid (f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \text{ é uma família localmente finita de } I \right\}$$



Um bom modelo para a GDS

Deve-se ressaltar que se I é um ideal germe-determinado, $I|_U$ não é necessariamente germe-determinado.



Um bom modelo para a GDS

Vamos munir G^{op} de uma pré-topologia de Grothendieck:



Um bom modelo para a GDS

Vamos munir G^{op} de uma pré-topologia de Grothendieck:
Dado um anel $\mathcal{C}^\infty$ germe-determinado, $A = \frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}$, definimos:



Um bom modelo para a GDS

Vamos munir G^{op} de uma pré-topologia de Grothendieck:
Dado um anel $\mathcal{C}^\infty$ germe-determinado, $A = \frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}$, definimos:

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{I} \right) = \\ = \left\{ \frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{I} \xrightarrow{u_\alpha} \frac{\mathcal{C}^\infty(U_\alpha)}{\widetilde{I \upharpoonright U_\alpha}} \mid \{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \text{ é cobertura aberta de } Z(I) \right\} \end{aligned}$$



Um bom modelo para a GDS

Obtemos, desta forma, um sítio pequeno, $(G^{\text{op}}, J_{\text{Cov}})$, onde J_{Cov} é subcanônica - ou seja, para todo anel $\mathcal{C}^\infty$ germe determinado A , o funtor $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\bullet, A)$ é feixe.



Um bom modelo para a GDS

Obtemos, desta forma, um sítio pequeno, $(G^{\text{op}}, J_{\text{Cov}})$, onde J_{Cov} é subcanônica - ou seja, para todo anel $\mathcal{C}^\infty$ germe determinado A , o funtor $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\bullet, A)$ é feixe.

Consideramos o topos:



Um bom modelo para a GDS

Obtemos, desta forma, um sítio pequeno, $(G^{\text{op}}, J_{\text{Cov}})$, onde J_{Cov} é subcanônica - ou seja, para todo anel $\mathcal{C}^\infty$ germe determinado A , o funtor $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\bullet, A)$ é feixe.

Consideramos o topos:

$$\mathcal{G} = \text{Sh}(G^{\text{op}}, J_{\text{Cov}})$$

que tem as seguintes características:



Um bom modelo para a GDS

- ▶ existe um mergulho covariante pleno e fiel de **Man** em $\mathcal{G}$, que preserva pullbacks transversais e leva coberturas abertas em famílias recobridoras;



Um bom modelo para a GDS

- ▶ existe um mergulho covariante pleno e fiel de **Man** em $\mathcal{G}$, que preserva pullbacks transversais e leva coberturas abertas em famílias recobridoras;
- ▶ $\mathcal{G}$ valida o axioma de Kock-Lawvere e o objeto anel do tipo linha, R , que é representável, é um feixe;



Um bom modelo para a GDS

- ▶ existe um mergulho covariante pleno e fiel de **Man** em $\mathcal{G}$, que preserva pullbacks transversais e leva coberturas abertas em famílias recobridoras;
- ▶ $\mathcal{G}$ valida o axioma de Kock-Lawvere e o objeto anel do tipo linha, R , que é representável, é um feixe;
- ▶ O objeto anel do tipo linha de $\mathcal{G}$ é um objeto anel local;



Um bom modelo para a GDS

- ▶ existe um mergulho covariante pleno e fiel de **Man** em $\mathcal{G}$, que preserva pullbacks transversais e leva coberturas abertas em famílias recobridoras;
- ▶ $\mathcal{G}$ valida o axioma de Kock-Lawvere e o objeto anel do tipo linha, R , que é representável, é um feixe;
- ▶ O objeto anel do tipo linha de $\mathcal{G}$ é um objeto anel local;
- ▶ o objeto anel do tipo linha, R , em $\mathcal{G}$ é arquimediano.



Encerramento

Nas próximas aulas faremos uma apresentação sistemática da teoria dos anéis $\mathcal{C}^\infty$, descrevendo-os de um ponto de vista da Álgebra Universal e descrevendo diversas construções.



Referências

- Ber** Berni, J.C. *Um overview sobre a Geometria Diferencial Sintética*, resumo expandido, II Encontro de Estudantes de Pós-Graduação em Matemática e em Matemática Aplicada do IME-USP, 2014.
- Dub** Dubuc, E. *Sur les modèles de la Géométrie Différentielle Synthétique*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique, tome 20, n. 3 (1979), p. 231-279.
- Lav** Lavendhomme, R. *Basic Concepts of Synthetic Differential Geometry*, Kluwer Texts in Mathematical Sciences, 1996.
- MR** Moerdijk, I. e Reyes, G. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*, Springer Verlag New York Inc, 1991.

