

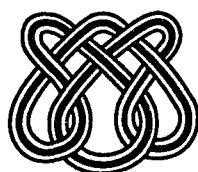
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**ANÉIS DE REPRESENTAÇÃO DOS GRUPOS
CLÁSSICOS**

ANTONIO CONDE

Nº 33

NOTAS DIDÁTICAS



Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

ISSN - 0103-2585

**ANÉIS DE REPRESENTAÇÃO DOS GRUPOS
CLÁSSICOS**

ANTONIO CONDE

Nº 33

NOTAS DIDÁTICAS DO ICMC

**São Carlos
Dez./1998**

Prefácio

Estas notas, que tratam dos anéis de representação dos grupos clássicos, foram feitas com a intenção de servir de referência a quem queira informação rápida e sem demonstrações sobre tais representações e estrutura dos tais anéis. Não desenvolvemos aqui a teoria dos grupos de Lie e seus anéis de representação. Nos extendemos um pouco mais, em detalhes, com os grupos $\text{Spin}(n)$ por serem menos familiares que os outros clássicos. Com isso introduzimos as álgebras de Clifford relevantes onde nos baseamos em [2], conteúdo que havia aparecido em [4],[5]. As referências [1][8][9] nos foram muito úteis e as recomendamos a um leitor que queira mais detalhes. Os leitores mais desembaraçados com álgebra linear e matrizes poderão pular o capítulo zero. Ficam aqui meus agradecimentos à Gisele pelo paciente e bom trabalho de digitação.

São Carlos, 30 de novembro de 1998.

Antonio Conde

Índice

0. Grupos clássicos de matrizes	1
1. Álgebras de Clifford	10
2. O Grupo Spinorial	35
3. Representação dos Grupos Clássicos	44

Anéis de Representações dos Grupos Clássicos

Prof. Antonio Conde 1998

0. Grupos clássicos de matrizes

Nestas exposições queremos chegar às descrições algébricas dos anéis de representações dos grupos que chamamos de clássicos e que estão inseridos na Álgebra Linear, mais precisamente, são grupos de matrizes como $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ e mais o $Spin(n)$. Estes grupos tem muito em comum. Eles são exemplos importantes dos chamados grupos de Lie.

Não pretendemos aqui desenvolver a teoria geral dos grupos de Lie, mas apresentaremos as noções mais relevantes ao nosso objetivo, que é o de estudar os grupos acima. Sempre que estivermos falando de um grupo de Lie, o leitor poderá ter em mente, por exemplo, o grupo das matrizes unitárias $U(n)$.

Vamos inicialmente as definições dos grupos acima, com excessão no momento de $Spin(n)$.

$O(n)$ é o grupo das matrizes X , $n \times n$, reais e ortogonais, isto é, tais que

$$XX^t = \mathbf{1} \equiv \textit{identidade}$$

$SO(n) \subset O(n)$ é o subgrupo daqueles X tais que $\det X = 1$.

$U(n)$ é o grupo das matrizes X , $n \times n$ complexas, tais que

$$XX^* = \mathbf{1} \equiv \textit{identidade}$$

onde $X^* = \bar{X}^t$

$SU(n) \subset U(n)$ é o subgrupo daqueles X tais que

$$\det X = 1$$

Um caso particular, bem simples e muito importante é o $U(1)$, isto é, o grupo dos números complexos z tais que

$$z\bar{z} = 1$$

ou seja os complexos de norma 1, que costumamos a identificar com o círculo unitário e denotá-lo por S^1 .

Fazendo produtos cartesianos obtemos os grupos

$$S^1 \times S^1 = T^2, \text{ toro bidimensional}$$

$S^1 \times \dots \times S^1 = T^n$ com n fatores obtendo o toro n -dimensional. A multiplicação em T^n é de coordenada a coordenada

$$(z_1, \dots, z_n)(u_1, \dots, u_n) = (z_1 u_1, z_2 u_2, \dots, z_n u_n)$$

Os grupos T^n são também grupos de Lie e são compactos e abelianos, já que S^1 o é. Os toros T^n vem munidos de suas projeções canônicas $\pi_i : T^n \rightarrow T^1 = S^1$.

$$\pi_i(z_1, \dots, z_n) = z_i$$

e estas são homomorfismos de grupos.

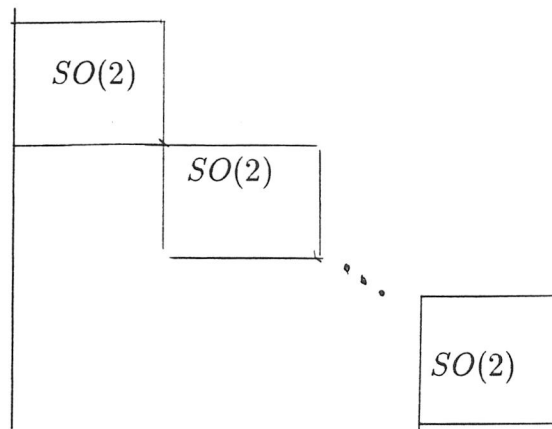
Observemos que os grupos de matrizes acima contém toros como subgrupos. Vejamos: As matrizes D , $n \times n$ complexas diagonais, contidas em $U(n)$, formam um toro T^n .

$$D = \begin{pmatrix} z_1 & & & \\ & z_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & z_n \end{pmatrix}, \quad DD^* = D\bar{D} = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

nos diz que cada z_i ; está em $U(1) = S^1$ e a multiplicação se faz de coordenada a coordenada e portanto tais matrizes se constituem no grupo

$$S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1 = T^n$$

As matrizes B , $2n \times 2n$, reais formadas por blocos 2×2 de $S^0(2)$ na diagonal e nula fora destes blocos e pertencentes a $S^0(2n)$, também se constituem num toro, vejamos



Com isso, se temos B com n blocos 2×2 na diagonal e cada bloco B_j se identifica como número complexo $z_j = \cos\theta_j + i\sin\theta_j$, podemos identificar B com a matriz diagonal D

$$\left| \begin{array}{cc} a & -b \\ b & a \end{array} \right| \equiv \left| \begin{array}{c} a + bi \end{array} \right|$$

Como as operações de multiplicação também se correspondem, temos que tais matrizes B formam um toro T^n em $S0(2n)$.

O mesmo ocorre com $S0(2n+1)$ bastando para tal que adicionemos o número 1 na posição $2n+1$ a B .

$$\left| \begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \\ 1 \end{array} \right|$$

Podemos, de certa forma, então dizer que os toros T^n de $U(n)$ e de $S0(2n)$, $S0(2n+1)$, $0(2n)$ e $0(2n+1)$ são os mesmos, fixada a dimensão n .

Se tomarmos agora $SU(n) \subset U(n)$ que são as matrizes de $U(n)$ com determinante igual a 1, vamos ver que o que era o toro T^n de $U(n)$ vai ser alterado para um toro T^{n-1} de $SU(n)$. Vejamos

$$\begin{pmatrix} z_1 & & & & \\ & z_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & z_{n-1} & \\ & & & & z_n \end{pmatrix} \in SU(n) \implies z_1 z_2 \dots z_{n-1} z_n = 1$$

Desta igualdade tiramos que, por exemplo z_n é função da $(n-1)$ -upla $(z_1, \dots, z_{n-1})$ já que

$$z_n = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \dots \bar{z}_{n-1}$$

o que nos diz que o conjunto das matrizes em $T^n \subset U(n)$ com determinante 1 está em bijeção com as $(n-1)$ -uplas $(z_1, \dots, z_{n-1})$ com cada $z_i \in S^1$, ou seja, em bijeção com T^{n-1} . Como as multiplicações se correspondem podemos dizer que $SU(n)$ tem toro T^{n-1} como subgrupo.

Estamos detalhando algo sobre os grupos toroidais porque estes servirão, ao final, de ambiente de análise para os demais grupos, na teoria das representações.

Cada um dos grupos apresentados são de matrizes reais ou complexas e estes tem estrutura topológica além da algébrica de multiplicação. Vamos agora tratar deste aspecto.

Por razões didáticas vou tratar inicialmente caso de matrizes reais, isto é, objetivo lidar com os grupos $O(n)$ e $SO(n)$. Posteriormente faremos alguns ajustes para cobrir o caso complexo.

Designemos por $\mathcal{M}_n$ o espaço vetorial de matrizes reais $n \times n$.

Por $\mathcal{M}_n^s$ o espaço vetorial das matrizes reais $n \times n$ simétricas e por

$\mathcal{M}_n^a$ das matrizes reais $n \times n$ anti-simétricas. Temos que $\mathcal{M}_n$ é soma direta

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n^s \oplus \mathcal{M}_n^a$$

Fixada uma ordem nos pares (i,j) , $1 \leq i, j \leq n$ temos uma bijeção

$$\mathcal{M}_n \approx \mathbb{R}^{n^2}$$

que é de fato um isomorfismo linear. Cada ordem fixada produz um tal isomorfismo. Em cada $\mathbb{R}^m$ temos o produto interno euclidiano. Pomos em $\mathcal{M}_n$ o seguinte produto interno.

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$$

Verifique que com estes produtos internos em $\mathcal{M}_n$ e (o euclidiano) em $\mathbb{R}^{n^2}$; os isomorfismos acima $\mathcal{M}_n \approx \mathbb{R}^{n^2}$ são todos isometrias, para qualquer ordem fixada nos índices (i, j) das matrizes. Portanto $(\mathcal{M}_n, \langle, \rangle)$ é um modelo de espaço vetorial euclidiano da dimensão n^2 .

Vejamos que a decomposição $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n^s \oplus \mathcal{M}_n^a$ é ortogonal. Sejam então $A \in \mathcal{M}_n^s$ e $H \in \mathcal{M}_n^a$

$$\langle A, H \rangle = \text{tr}(AH^t) = \text{tr}(H^t A) = \text{tr}(-HA^t) = -\text{tr}(HA^t)$$

$$\text{mas } \text{tr}(-HA^t) = -\text{tr}(HA^t) = -\langle H, A \rangle \text{ e}$$

$$\langle A, H \rangle = \langle H, A \rangle = -\langle H, A \rangle \Rightarrow \langle A, H \rangle = 0$$

e A é ortogonal a H , como queríamos.

$\mathcal{M}_n$ agora tem então uma métrica dada por $\langle, \rangle$ e portanto tem uma topologia induzida.

As matrizes de $\mathcal{M}_n$ que são inversíveis (que tem determinantes não nulos) formam um grupo que denotamos por GL_n e chamamos de grupo geral linear real.

$$\det : \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

O determinante é uma função contínua de $\mathcal{M}_n$ em $\mathbb{R}$. Isto nos dá que $\det^{-1}(0) \subset \mathcal{M}_n$ é subconjunto fechado e portanto GL_n é um subconjunto aberto de $\mathcal{M}_n$.

Os grupos $O(n)$ e $SO(n)$ são subgrupos de GL_n .

$$SO(n) \subset O(n) \subset GL_n$$

A topologia de $\mathcal{M}_n$ induz topologias em $0(n)$ e em $S0(n)$.

GL_n tem duas componentes conexas (por caminhos) a de determinante positivo GL_n^+ e a de determinante negativo GL_n^- .

$S0(n)$ e $0(n)$ são fechados como subconjuntos de $\mathcal{M}_n$ (e de GL_n) e $S0(n)$ é fechado em $0(n)$. $S0(n)$ é conexo (por caminhos) e $0(n)$ tem duas componentes conexas (por caminhos), $S0(n)$ que são as de determinante 1 e a outra $S0(n)^-$ de determinante -1 .

A esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ é compacta.

Cada vetor coluna de uma matriz de $0(n)$ tem norma 1, portanto $0(n)$ é subconjunto e subespaço de $S^{n-1} \times \dots \times S^{n-1}$ (n fatores) $\subset \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n^2} = \mathcal{M}_n$.

Como este produto de esfera é compacto e $0(n)$ é fechado nele concluímos que $0(n)$ é compacto e o mesmo para $S0(n)$.

Os toros T^n que exibimos antes, são também espaços topológicos compactos com topologia igual às induzidas pelos grupos que os contém como $U(n)$, $0(2n)$, $0(2n+1)$, $S0(2n)$ e $S0(2n+1)$.

Todos estes são subgrupos de GL_m para algum m e de fato são subgrupos topológicos de GL_m . Na verdade eles tem uma estrutura mais rica, eles são subvariedades de classe C^∞ de GL_m .

Vejamos como provar isto para o caso $0(n)$.

Consideramos a aplicação C^∞

$$\mathcal{M} : GL_n \longrightarrow \mathcal{M}_n^s$$

$$X \longrightarrow XX^t$$

Calculamos sua derivada e provamos que a matriz identidade $\mathbf{1} \in \mathcal{M}_n^s$ é valor regular de μ isto nos dá que $\mu_{-1}(\mathbf{1}) = 0(n)$ é subvariedade C^∞ de GL_n de dimensão

$$\dim 0(n) = \dim GL_n - \dim \mathcal{M}_n^s$$

ou

$$\dim \mathfrak{o}(n) = n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

O mesmo vale para $\mathfrak{so}(n)$ e $\mathfrak{so}(n)^-$ lembrando porém que $\mathfrak{so}(n)^-$ não é subgrupo de $\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n) \cup \mathfrak{so}(n)^-$.

Como a derivada de μ é

$$d\mu(A)(H) = AH^t + HA^t$$

$$\text{para } a = \mathbf{1} \quad d\mu(\mathbf{1})(H) = H^t + H$$

Sabemos que o espaço tangente a $\mu^{-1}(\mathbf{1})$ em $\mathbf{1}$ é o núcleo de $d\mu(\mathbf{1})$ e portanto é o subespaço das matrizes H , $n \times n$ reais tais que $H^t + H = 0$ ou seja $H^t = -H$ que são as anti-simétricas $\mathcal{M}_n^a$.

$$T_1 \mathfrak{o}(n) = \mathcal{M}_n^a$$

$\mathcal{M}_n^a$ é fechado pela operação colchete

$$[A, B] = AB - BA \quad (\text{verifique})$$

O espaço vetorial $T_1 \mathfrak{o}(n) = \mathcal{M}_n^a$, com tal operação colchete recebe o nome de Álgebra de Lie do grupo $\mathfrak{o}(n)$.

Para o caso complexo fazemos alguns ajustes

$\mathcal{CM}_n$ é o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ complexas. Uma matriz complexa A pode ser escrita com suas partes real e imaginária, assim

$$A = A_1 + iA_2$$

onde A_i são matrizes $n \times n$ reais.

Com isso vamos fazer corresponder à matriz complexa A o par de matrizes reais (A_1, A_2) que é o mesmo que identificar $\mathcal{CM}_n$ com a soma direta

$$\mathcal{CM}_n \equiv \mathcal{M}_n \oplus \mathcal{M}_n$$

$$A \equiv \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix}$$

A multiplicação de matrizes complexas representada como pares fica assim

$$(A_1, \oplus A_2)(B_1 \oplus B_2) = (A_1, B_1 - A_2, B_2) \oplus (A_1 B_2 + A_2 B_1)$$

A operação em CM_n que corresponde à transposição, do caso real, é a de adjunta

$$A \in CM_n \implies A^* = \bar{A}^t \in CM_n$$

Na representação com os pares de reais temos que se $A = A_1 \oplus A_2$ $\bar{A} = A_1 \oplus (-A_2)$ e $A^t = A_1^t \oplus A_2^t$. Assim $A^* = A_1^t \oplus (-A_2^t)$.

Introduzimos em CM_n o produto hermitiano

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*) \quad (\text{verifique})$$

$\langle A, B \rangle$ é um número complexo e portanto tem parte real $\Re \langle A, B \rangle$ e parte imaginária

$\text{Im} \langle A, B \rangle$.

Vejamos como são os mesmos quando interpretamos as matrizes complexa como pares de reais.

$$A = A_1 \oplus A_2 \equiv A_i + iA_2$$

$$B = B_1 \oplus B_2 \equiv B_1 + iB_2$$

$$\bar{B} = B_1 \oplus (-B_2) \equiv B_1 - iB_2$$

$$B^* = \bar{B}^t = B_1^t \oplus (-B_2^t)$$

Assim sendo

$$AB^* = (A_1B_1^t + A_2B_2^t) \oplus (-A_1B_2^t + A_2B_1^t)$$

temos então que a parte real de AB^* é dada por $A_1B_1^t + A_2B_2^t$ e a parte imaginária por $A_2B_1^t - A_1B_2^t$.

Portanto

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*) = \text{tr}(A_1B_1^t + A_2B_2^t) + \text{tr}(A_2B_1^t - A_1B_2^t)$$

Mas $\text{tr}(A_1, B_1^t + A_2B_2^t) = \text{tr}(A_1 \oplus A_2)(B_1 \oplus B_2)^t$ onde a multiplicação $(A_1 \oplus A_2)(B_1 \oplus B_2)$ é a usual de matrizes (reais). Concluimos que a parte real do produto hermitiano $\langle A, B \rangle$ é o produto escalar (real) de A e B como pares de matrizes reais.

$$\mathcal{R}_e \langle A, B \rangle = \langle A_1 \oplus A_2, B_1 \oplus B_2 \rangle$$

Para o caso complexo e analogamente ao caso real temos que

$$d\mu(A)(H) = AH^* + HA^*$$

que nos dá

$$d\mu(\mathbf{1})H = H^* + H$$

O núcleo de $d\mu(\mathbf{1})$ é o espaço das matrizes H tais que $H^* = -H$ ou seja é o das matrizes anti-hermitianas.

Examinando-se o núcleo de $d\mu(\mathbf{1})$ e lembrando de que $A \in GL_n(C)$ é inversível e mais que $\mu(A) = AA^* = \mathbf{1}$, chegamos a que a dimensão do núcleo de $d\mu(A)$ para $A \in u(A)$

é a mesma que a do núcleo de $d\mu(\mathbf{1})$ que é $\mathcal{H}_n^a$. Como μ toma valores em $\mathcal{H}_n$ que tem dimensão complementar à de $\mathcal{H}_n^a$ em CM_n , vemos que $d\mu(A)$, para $A \in U(n)$, é sempre sobrejetora e portanto $AA^* = \mathbf{1}$ é valor regular de μ e $U(n) = \mu^{-1}(\mathbf{1})$ é subvariedade C^∞ , de $GL_n(C)$ com álgebra de Lie sendo o núcleo de $d\mu(\mathbf{1})$, isto é $\mathcal{H}_n^a$. A dimensão real de CM_n é $2n^2$. As dimensões de $\mathcal{H}_n^a$ e $\mathcal{H}_n$ são iguais a n^2 . Portanto a dimensão de $U(n)$ como variedade (real) é igual à de sua álgebra de Lie $\mathcal{H}_n^a$ que é $2n^2$.

1 Álgebras de Clifford

1.1. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita n e

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$$

forma quadrática, isto é, existe uma aplicação bilinear simétrica

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que $\varphi(x) = \langle x, x \rangle$. φ determina $\langle, \rangle$ pela relação

$$2 \langle x, y \rangle = \varphi(x + y) - \varphi(x) - \varphi(y).$$

O exemplo mais simples e significativo é $V = \mathbb{R}$ e $\varphi(x) = x^2$. Esta forma quadrática vem da multiplicação de números reais x, y que torna $\mathbb{R}$ uma álgebra com unidade 1. Portanto a forma quadrática em questão é um quadrado nesta álgebra. O mesmo já não ocorrerá se trocarmos a forma quadrática para $\varphi(x) = -x^2$ e pedirmos que 1 continue sendo elemento neutro, isto é, não existe nenhuma multiplicação em $\mathbb{R}$ com unidade 1, digamos $*$ tal que $x*x = -x^2$, pois $1 = 1*1 = -1$ não é compatível. Podemos entretanto verificar se isto seria possível, ampliando V . Como queremos que a forma quadrática seja um quadrado, ela deve tomar valores no próprio espaço. Ampliemos então o espaço $V = \mathbb{R}$ adicionando, como primeiro fator, o corpo $\mathbb{R}$. Temos assim $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Com a identificação $(1, 0) \equiv 1$, o elemento neutro da álgebra procurada, e $(0, 1) = e_1$ a base natural de nosso espaço $V = \mathbb{R}$. Como a multiplicação procurada é necessariamente bilinear, basta saber o que acontece com os elementos da base 1 e e_1 de $\mathbb{R}^2$.

$$1 \cdot 1 = 1 \quad \text{pois é a unidade}$$

$$e_1 e_1 = \varphi(e_1) = -1$$

Portanto dois elementos genéricos $x + ye_1$ e $x' + y'e_1$ se multiplicam como

$$(x + ye_1)(x' + y'e_1) = (xx' - yy') + (xy' + x'y)e_1$$

Esta é exatamente a multiplicação de números complexos que sabemos formam uma álgebra com unidade onde $e_1 = i$.

Então ao tentar representar a forma quadrática $\varphi(x) = -x^2$ definida em $V = \mathbb{R}$ construímos a álgebra dos complexos. Dizemos então que os complexos é a álgebra de Clifford do par $V = \mathbb{R}$, $\varphi(x) = -x^2$.

Vejamos o que acontece se tomarmos $V = \mathbb{R}^2$ e $\varphi(x, y) = -x^2 - y^2$, isto é, o negativo do produto escalar usual. Adicionamos novamente o eixo $\mathbb{R}$ que possui o candidato à unidade 1 como primeiro fator $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$ e vejamos se conseguimos aí uma multiplicação que torne $\mathbb{R}^3$ uma álgebra com unidade 1 e tal que para vetores v de $\mathbb{R}^2$ temos $\varphi(v) = -\langle v, v \rangle$. Novamente, basta saber o que se passa na base natural

$$(1, 0, 0) \equiv 1$$

$$(0, 1, 0) = e_1$$

$$(0, 0, 1) = e_2$$

Temos então que

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$e_1 e_1 = \varphi(e_1) = -1$$

$$e_2 e_2 = \varphi(e_2) = -1$$

e falta saber o que se passa com $e_1 e_2$.

Se $e_1 e_2$ faz sentido em $\mathbb{R}^3$ devemos ter

$$e_1 e_2 = \lambda_0 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$$

multiplicando ambos os membros por e_1 temos

$$-e_2 = \lambda_0 e_1 - \lambda_1 + \lambda_2 e_1 e_2$$

onde $\lambda_2 \neq 0$ por causa da independência linear de $1, e_1, e_2$. Temos então

$$e_1 e_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_0}{\lambda_2} e_1 - \frac{1}{\lambda_2} e_2$$

que comparando com a expressão inicial nos dá

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda_0, \quad -\frac{\lambda_0}{\lambda_2} = \lambda_1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\lambda_2}$$

o que não é possível. Logo, $e_1 e_2$ não pode ser definido como elemento de $\mathbb{R}^3$. Temos então que adicionar um elemento novo

$$e_1 e_2 = e_3$$

isto é, adiciona-se um quarto fator $\mathbb{R}$ e temos agora

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$$

$$(1, 0, 0, 0) \equiv 1$$

$$(0, 1, 0, 0) = e_1$$

$$(0, 0, 1, 0) = e_2$$

$$(0, 0, 0, 1) = e_3$$

com a nova relação

$$e_1 e_2 = e_3.$$

Como no fator $\mathbb{R}^2$ do meio nossa forma tem que ser negativa, temos que

$$\varphi(xe_1 + ye_2) = -x^2 - y^2$$

mas

$$\varphi(xe_1 + ye_2) = (xe_1 + ye_2)^2 = -x^2 - y^2 + xy(e_1 e_2 + e_2 e_1).$$

Daí tiramos que $e_1 e_2 + e_2 e_1 = 0$ ou

$$e_2 e_1 = -e_1 e_2$$

e que $e_3^2 = (e_1 e_2)(e_1 e_2) = -e_1 e_2 e_2 e_1 = -1$.

Mas tal tabela nos dá exatamente a multiplicação quaterniônica com a identificação

$$e_1 e_2 = i \quad e_1 = j \quad e_2 = (e_1 e_2) e_1 = ij = k.$$

Dizemos então que a álgebra dos quatérnios é a álgebra de Clifford do par $V = \mathbb{R}^2$ e $\varphi(v) = -\langle v, v \rangle$.

A multiplicação genérica é dada por

$$\begin{aligned}
1.2. \quad & (x + yi + zj + wk)(x' + y'i + zj + w'k) = (xx' - yy' - zz' - ww') \\
& + (xy' + yx')i + (xz' + zx')j + (xw' + x'w)k + yz'k - yw'j - zy'k \\
& + zw'i + wy'j - wz'i
\end{aligned}$$

ou agrupando

$$\begin{aligned}
& (x + yi + zj + wk)(x' + y'i + z'j + w'k) = (xx' - yy' - zz' - ww') \\
& + (xy' + yx' + zw' - wz')i + (xz' + zx' + wy' - yw')j \\
& + (xw' + x'w + yz' - zy')k
\end{aligned}$$

Podemos ainda por:

$$yi + zj + wk = v \quad \text{e} \quad y'i + z'j + w'k = v'$$

e observar que a multiplicação geral pode ser escrita mais sinteticamente na forma

$$1.3. \quad (x + v)(x' + v') = xx' - \langle v, v' \rangle + xv' + x'v + v \times v'$$

onde $\langle, \rangle$ é o produto escalar euclidiano de $\mathbb{R}^3$ e $v \times v'$ é produto vetorial.

É conveniente destacar que a parte real do produto é precisamente a métrica de Minkowski do $\mathbb{R}^4$, com variável temporal positiva, isto é

$$(x + v, x' + v') = xx' - \langle v, v' \rangle.$$

Lembremos que o produto vetorial no $\mathbb{R}^3$ pode ser calculado em coordenadas, formalmente, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
1.4. \quad & v = (y, z, w) \quad v' = (y', z', w') \\
& v \times v' = \det \begin{bmatrix} y & y' & i \\ z & z' & j \\ w & w' & k \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Denotamos a álgebra dos quatérnios por $\mathbb{H}$. Como espaço vetorial real $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ gerado por

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 0, 0, 0) \equiv 1 \\
e_1 &= (0, 1, 0, 0) \\
e_2 &= (0, 0, 1, 0) \\
e_1 e_2 &= e_3 = (0, 0, 0, 1)
\end{aligned}$$

Como álgebra, $\mathbb{H}$ é gerado então por e_1, e_2 , pois $1 = e_1^0$ e $e_3 = e_1 e_2$. $\mathbb{H}$ se decompõe em soma direta de dois fatores de modo natural

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1$$

onde $\mathbb{H}_0$ é gerado por $(1, e_1 e_2)$

$\mathbb{H}_1$ é gerado por (e_1, e_2) .

O fator $\mathbb{H}_0$ é chamado de fator par e $\mathbb{H}_1$ de fator ímpar por causa do número de elementos nos monômios em e_1, e_2 que geram cada fator. A unidade 1 é considerada como monômio em e_1, e_2 com zero elementos.

Observemos que o fator $\mathbb{H}_0$ é fechado pela multiplicação e é isomorfo ao corpo dos complexos, identificando-se o gerador imaginário com $e_1 e_2$. O fator ímpar não é fechado pela multiplicação, de seus elementos, mas é fechado pela multiplicação externa com elementos de $\mathbb{H}_0$.

Assim sendo, podemos identificar

1.5.

$$\mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1 \equiv \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

$$1 = (1, 0) \equiv (1, 0)$$

$$(e_2 e_3, 0) \equiv (i, 0) = i$$

$$e_1 = (0, e_1) \equiv (0, 1) = j$$

$$e_2 = (0, e_2) \equiv (0, i) = k$$

Os quatérnios $\mathbb{H}$ podem então ser considerados $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ onde a multiplicação quaterniônica, nos elementos da base, se define como:

$$1 = (1, 0) \text{ é o elemento neutro}$$

$$i^2 = (i, 0)^2 = -1 = (e_1 e_2)^2$$

$$j^2 = (0, 1)^2 = -1 = e_1^2$$

$$k^2 = (0, i)^2 = -1 = e_2^2$$

$$ij = -ji = k$$

Com essa notação, um elemento genérico de $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ se escreve como

$$(x + yi) + (zj + wk)$$

onde x, y, z, w são números reais.

Com esta definição da multiplicação em $\mathcal{C} \oplus \mathcal{C}$ este se torna isomorfo a $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$ como álgebra.

É possível, e muito conveniente, interpretarmos a multiplicação quaterniônica como multiplicação usual de matrizes 2×2 complexas. Tomando $\mathcal{H} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{C}$ temos a seguinte correspondência

$$\sigma : (a, b) \longrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}.$$

Denotemos o conjunto de tais matrizes por $\mathcal{M}$. É imediato ver que $\mathcal{M}$ é um espaço vetorial de dimensão 2 sobre $\mathcal{C}$ com multiplicação por escalar a de $\mathcal{C}$ sendo a multiplicação por $\sigma(a, 0)$. Vejamos que a multiplicação introduzida em $\mathcal{H} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{C}$ corresponde, por σ , à multiplicação usual das matrizes de $\mathcal{M}$. Basta verificar para os geradores:

$$1 = (1, 0) \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \sigma(1)$$

$$i = (i, 0) \longrightarrow \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \sigma(i)$$

$$j = (0, 1) \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma(j)$$

$$k = (0, i) \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \sigma(k)$$

$\sigma(1)$ é identidade multiplicativa de $\mathcal{M}$

$$\sigma(i)^2 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma(-1) = \sigma(i^2)$$

$$\sigma(j)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma(-1) = \sigma(j^2)$$

$$\sigma(k)^2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma(-1) = \sigma(k^2)$$

$$\sigma(i)\sigma(j) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \sigma(k) = \sigma(ij)$$

Portanto a multiplicação usual de matrizes em $\mathcal{M}$ corresponde a multiplicação quaterniônica de $\mathcal{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, através de σ . Chamamos σ de representação canônica de $\mathcal{H}$.

A multiplicação genérica em $\mathcal{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ pode ser escrita então, observando-se o que acontece com as matrizes, assim:

$$\sigma(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

$$\sigma(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{bmatrix}$$

$$\sigma((a, b)(x, y)) = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax - b\bar{y} & ay + b\bar{x} \\ -\bar{b}x - \bar{a}\bar{y} & -\bar{b}y + \bar{a}\bar{x} \end{bmatrix}$$

Portanto

$$(a, b) \cdot (x, y) = (ax - b\bar{y}, ay + b\bar{x}).$$

Poderíamos então ter definido os quatérnios como sendo o conjunto de pares de números complexos como espaço vetorial onde introduzimos a multiplicação dada por

$$(a, b)(x, y) = (ax - b\bar{y}, ay + b\bar{x}).$$

Podemos ainda olhar os quatérnios de uma maneira análoga aos complexos, ou seja, na forma

$$a + bj.$$

Para isto basta tomarmos o quatérnio com coeficientes reais

$$x + yi + zj + wk$$

lembramos que $k = ij$ e pormos j em evidência nos dois últimos termos. Temos então

$$x + yi + (z + wi)j$$

e estamos na forma $a + bj$. E a multiplicação fica assim

$$(a + bj) \cdot (x + yj) = (ax - b\bar{y}) + (ay + b\bar{x})j.$$

Veja que a multiplicação nesta forma é análoga a que se introduz nos complexos, com a diferença de que a conjugação aparece nos elementos multiplicados por b .

1.6. Observações

1. Ao representarmos o quatérnio

$$(a, b) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \approx \mathbb{H}$$

pela matriz

$$\sigma(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

o par (a, b) aparece na primeira linha e assim estamos supondo que $\sigma(a, b)$ atua à direita em $\mathbb{C}^2$.

2. A representação $\sigma(x)$ é a matriz (atuando à direita) da aplicação $\mathbb{C}$ -linear de $\mathbb{H}$ em $\mathbb{H}$ obtida por multiplicação quaterniônica à direita por $(x, z) \longrightarrow zx$.
3. Se quisermos que a matriz atue à esquerda devemos compor σ com a transposta obtendo

$$\sigma^t : (a, b) \longrightarrow \begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix}.$$

4. Se definirmos $\bar{\sigma}(x) = \sigma(\bar{x})$, isto é, por (2) $\bar{\sigma}(x)(z) = z\bar{x}$ então teremos $\bar{\sigma}$ como uma representação à esquerda (sobre $\mathbb{H}$) de $\mathbb{H}$ em $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ que é isomorfo a $\mathbb{C}(2)$. A matriz correspondente a $x = (a, b) \in \mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ é $\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -\bar{b} & a \end{bmatrix}$ atuando à esquerda.

1.7. Seja A uma álgebra com unidade sobre $\mathbb{R}$. A complexificação A^c de A é por definição

$$A^c = A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

cuja multiplicação é determinada por

$$(a \otimes z)(b \otimes w) = ab \otimes zw.$$

Podemos passar desta definição para uma descrição mais familiar, observando que A^c tem uma decomposição natural

$$A^c = (A \otimes 1) \oplus (A \otimes i)$$

como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Podemos assim identificá-la com

$$A^c = A \times A$$

pela correspondência

$$a \otimes 1 + b \otimes i \longleftrightarrow (a, b).$$

Vejamos como fica a multiplicação quando assim representamos um elemento genérico de A^c .

$$\begin{aligned} (a, b)(a', b') &\equiv (a \otimes 1 + b \otimes i)(a' \otimes 1 + b' \otimes i) \\ &= (aa' \otimes 1 - bb' \otimes 1) + (ab' \otimes 1 - ba' \otimes 1)i \\ &= (aa' - bb', ab' + ba'). \end{aligned}$$

Portanto, a menos de isomorfismo natural, podemos também definir A^c como

$$A^c = A \times A$$

com a multiplicação dada por

$$(a, b), (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$$

que é exatamente a fórmula que dá passagem dos reais para os complexos.

1.8. Por outro lado, vimos que a passagem dos complexos $\mathbb{C}$ para os quatérnios $\mathbb{H}$ envolve uma fórmula de multiplicação onde aparece a conjugação. Este caso também corresponde a um produto tensorial, só que devemos levar em conta graduação, isto é, a nova multiplicação será definida para álgebras graduadas em $\mathbb{Z}_2$.

Uma álgebra graduada em $\mathbb{Z}_2$, sobre $\mathbb{R}$ é uma álgebra A juntamente com uma decomposição $A = A^0 \oplus A^1$ em subespaços tal que a multiplicação satisfaz

$$A^i \cdot A^j \subset A^{i+j} ; i + j \pmod{2}.$$

Os complexos e os quatérnios são exemplos de álgebras graduadas tomando-se as componentes geradas por monômios de ordem par para A^0 e ímpar para A^1 . Numa álgebra A^0 é sempre subálgebra e A^1 é módulo sobre A^0 .

Se B é outra álgebra graduada $B = B^0 \oplus B^1$ definimos a álgebra produto tensorial graduado de A com B sobre $\mathbb{R}$, assim

$$A \hat{\otimes}_{\mathbb{R}} B = A \otimes_{\mathbb{R}} B$$

onde a multiplicação agora é dada por

$$(a \otimes x^i)(y^j \otimes b) = (-1)^{ij} ay^j \otimes x^i b$$

sendo $x^i \in B^i$ e $y^j \in A^j$.

$A \hat{\otimes}_{\mathbb{R}} B$ tem também uma $\mathbb{Z}_2$ -graduação natural

$$(A \otimes_{\mathbb{R}} B)^0 = (A^0 \otimes_{\mathbb{R}} B^0) \oplus (A^1 \otimes_{\mathbb{R}} B^1)$$

$$(A \otimes_{\mathbb{R}} B)^1 = (A^0 \otimes_{\mathbb{R}} B^1) \oplus (A^1 \otimes_{\mathbb{R}} B^0)$$

Vejamos o que acontece quando tomamos $B = \mathbb{C}$ com a graduação usual

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \text{com} \quad (0, 1) \equiv i.$$

Vamos definir em $A = A^0 \oplus A^1$, uma conjugação

$$a = a^0 + a^1$$

$$\tilde{a} = a^0 - a^1$$

e vamos interpretar a multiplicação graduada em termos desta conjugação .

1.9. Identifiquemos $A \hat{\otimes}_{\mathbb{R}} \mathcal{C}$ com $A \times A$ pela correspondência

$$a \otimes 1 + b \otimes i \longleftrightarrow (a, b)$$

e analisemos a multiplicação , levando em conta a graduação

$$A = A^0 \oplus A^1 .$$

Temos então

$$a = a^0 + a^1 , \quad b = b^0 + b^1$$

$$\text{e} \quad a' = a^{0'} + a^{1'} , \quad b' = b^{0'} + b^{1'}$$

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (a', b') &= (a \otimes 1 + b \otimes i)(a' \otimes 1 + b' \otimes i) \\ &= ((a^0 + a^1) \otimes 1 + (b^0 + b^1) \otimes i)((a^{0'} + a^{1'}) \otimes 1 + (b^{0'} + b^{1'}) \otimes i) \\ &= (a^0 \otimes 1 + a^1 \otimes 1 + b^0 \otimes i + b^1 \otimes i)(a^{0'} \otimes 1 + a^{1'} \otimes 1 + b^{0'} \otimes i + b^{1'} \otimes i) \\ &= a^0 a^{0'} \otimes 1 + a^0 a^{1'} \otimes 1 + a^0 b^{0'} \otimes i + a^0 b^{1'} \otimes i \\ &\quad + a^1 a^{0'} \otimes 1 + a^1 a^{1'} \otimes 1 + a^1 b^{0'} \otimes i + a^1 b^{1'} \otimes i + b^0 a^{0'} \otimes i \\ &\quad - b^0 a^{1'} \otimes i - b^0 b^{0'} \otimes 1 + b^0 b^{1'} \otimes 1 + b^1 a^{0'} \otimes i - b^1 a^{1'} \otimes i \\ &\quad - b^1 b^{0'} \otimes 1 + b^1 b^{1'} \otimes 1 = (aa' \otimes 1 - b\tilde{b}' \otimes 1) \\ &\quad + (ab' + b\tilde{a}') \otimes i \equiv (aa' - b\tilde{b}', ab' + b\tilde{a}') \end{aligned}$$

Portanto a diferença entre $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}$ e $A \hat{\otimes}_{\mathbb{R}} \mathcal{C}$ está apenas na multiplicação e aqui a graduada difere apenas no fato de que os elementos multiplicados por b devem sofrer a ação da conjugação $\sim$.

Podemos dizer então que $\mathcal{H} = \mathcal{C} \hat{\otimes}_{\mathbb{R}} \mathcal{C}$, isto é, os quatérnios são obtidos por complexificação graduada da álgebra $\mathcal{C}$, sobre $\mathbb{R}$.

A complexificação simples de $\mathbb{C}$ nos daria uma álgebra diferente de $\mathbb{H}$ em que existe divisor de zero. Veja por exemplo que em

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \equiv \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

vale $(1, i)(i, 1) = (0, 0) = 0$.

1.10. Vejamos que $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H} = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ é isomorfo, como álgebra a $\mathbb{C}(2)$.

Temos a representação usual σ dos quatérnios

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{C}(2) \\ \sigma(a, b) &= \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde $(a, b) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \approx \mathbb{H}$.

Para obtermos uma representação de $\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$ basta tomarmos a extensão complexa de σ ,

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{H} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{C}(2) \\ \psi((a, b), (x, y)) &= \sigma(a, b) + \sigma(x, y)i \\ \psi((a, b), (x, y)) &= \begin{bmatrix} a + xi & b + yi \\ -\bar{b} - \bar{y}i & \bar{a} + \bar{x}i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ψ é linear sobre $\mathbb{R}$ e comuta com i , vejamos este último

$$\begin{aligned} \psi([(a, b), (x, y)]i) &= \psi((-x, -y), (a, b)) \\ &= \begin{bmatrix} -x + ai & -y + bi \\ \bar{y} - \bar{b}i & -\bar{x} + \bar{a}i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + xi & b + yi \\ -\bar{b} - \bar{y}i & \bar{a} + \bar{x}i \end{bmatrix} i = \psi((a, b), (x, y))i. \end{aligned}$$

Portanto ψ é linear sobre $\mathbb{C}$.

Para concluirmos que ψ é representação da álgebra $\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$ basta verificarmos que preserva multiplicação.

$$\begin{aligned} \psi((a', b'), (x', y')) &= \sigma(a', b') + \sigma(x', y')i \\ \psi((a, b), (x, y))\psi((a', b'), (x', y')) &= (\sigma(a, b) + \sigma(x, y)i)(\sigma(a', b') + \sigma(x', y')i) \\ &= \sigma(a, b)\sigma(a', b') - \sigma(x', y')\sigma(x, y)i \\ &+ (\sigma(a, b)\sigma(x', y') + \sigma(x, y)\sigma(a', b'))i \end{aligned}$$

Como σ é representação da álgebra $\mathbb{H}$ temos

$$\begin{aligned} &= \sigma((a, b)(a', b') - (x, y)(x', y')) \\ &+ \sigma((a, b)(x', y') + (x, y)(a', b'))i \\ &= \psi \{[(a, b), (x, y)][(a', b')(x', y')]\} \end{aligned}$$

e portanto ψ preserva a multiplicação .

Vejamos seu núcleo

$$\begin{aligned} a + xi = 0 &\implies \bar{a} - \bar{x}i = 0 \\ \psi((a, b), (x, y)) = 0 &\iff \bar{a} + \bar{x}i = 0 \implies a = 0 \quad \therefore a = 0 \quad \therefore x = 0 \\ b + yi = 0 &\implies \bar{b} - \bar{y}i = 0 \\ \bar{b} + \bar{y}i = 0 &\implies \bar{b} = 0 \quad \therefore b = 0 \quad \therefore y = 0 \end{aligned}$$

ψ é então injetora. Como a dimensão de $\mathbb{H} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{C}$ e $\mathbb{C}(2)$ são iguais a 4.

Temos que ψ é um isomorfismo. Chamaremos

$$\psi : \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} = \mathbb{H} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}(2)$$

de representação usual de $\mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$.

1.11. Vimos então que dado um espaço vetorial V de dimensão finita n sobre um corpo K e $\varphi : V \times V \rightarrow K$ forma quadrática, queremos saber se podemos expressar tal forma como um quadrado segundo uma multiplicação interna. O que se deve procurar de início é a solução universal para tal problema. A solução é natural e baseada no caso mais geral de multiplicação associativa, que é o produto tensorial, isto é, tomamos a álgebra tensorial $\otimes(V)$ de V e quocientamos convenientemente

$$\begin{aligned} \otimes(V) &= \sum_{i=0}^{\infty} \otimes^i(V) && \text{soma direta} \\ \otimes^0(V) &= K && \otimes^1(V) = V \end{aligned}$$

Seja I o ideal de $\otimes(V)$ gerado pelos elementos do tipo $(x \otimes x - \varphi(x)1)$.

1.12. Definição

A álgebra de Clifford do par (V, φ) é

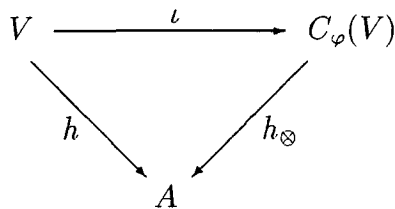
$$C_{\varphi}(V) = \otimes V / I .$$

1.13. Propriedades Básicas

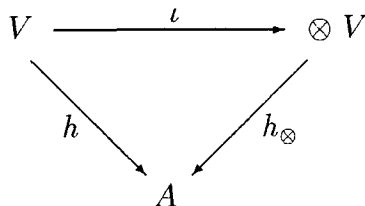
1. A aplicação $\iota : V \rightarrow C_\varphi(V)$, induzida pela inclusão $V \rightarrow \otimes(V)$, injeta V naturalmente, como subespaço vetorial de $C_\varphi(V)$. De fato, como $V \rightarrow \otimes(V) \rightarrow C_\varphi(V)$ são homomorfismos temos que $\iota(V)$ é subespaço vetorial. A injetividade vem de que os elementos não nulos de I envolvem fatores de grau $(\otimes^i)$ $i \geq 2$, enquanto os elementos de V têm grau 1.

Podemos então ver $V \subset C_\varphi(V)$ como uma extensão de V .

2. Dado qualquer homomorfismo $h : V \rightarrow A$ onde A é uma álgebra com unidade 1, tal que $h(x)^2 = \varphi(x)1$, então existe um único homomorfismo $h_\varphi : C_\varphi(V) \rightarrow A$ tal que $h_\varphi \circ \iota = h$



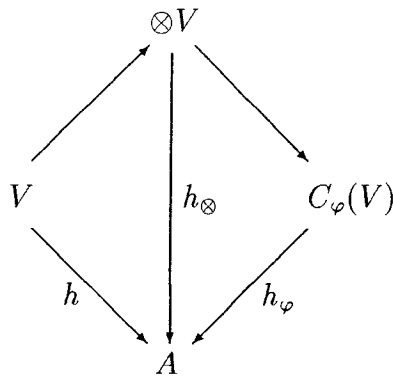
Tomamos a extensão $h_\otimes$ de h à álgebra tensorial



Como $h(x)^2 - \varphi(x)1 = 0$ temos $\ker h_\otimes \supset I$ pois

$$h_\otimes(x \otimes x - \varphi(x)1) = h_\otimes(x)^2 - \varphi(x)1 = h(x)^2 - \varphi(x)1 = 0.$$

Logo, para todo $x \in V$, $(x \otimes x - \varphi(x)1)$ está no ideal I donde $h_\otimes$ se fatora por $C_\varphi(V)$ dando h_φ



Como V gera $C_\varphi(V)$ como álgebra, h_φ tem que ser a única extensão de h .

3. $\dim C_\varphi(V) = 2^{\dim V}$ pois se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de V o conjunto dos monômios $e_{i_1} \dots e_{i_r}$ com $i_1 < \dots < i_r$ formam uma base de $C_\varphi(V)$.
4. $C_\varphi(V)$ tem uma filtração natural que provém daquela de $\otimes V$, a saber:

$$F^k(V) = \text{gerado vetorialmente por produtos de até } k \text{ elementos de } V$$

$$F^0(V) = \mathbb{R}$$

$$F^1(V) = \mathbb{R} \oplus V.$$

Não podemos entretanto “graduar” $C_\varphi(V)$ segundo “comprimento” de monômios.

Vejamos: se $u = \lambda v$, uv que deveria ter grau 2 satisfaz $uv = \lambda vv = \lambda \varphi(v, v) \in \mathbb{R}$ e poderia portanto ser um elemento não nulo de “grau” zero.

Suponhamos agora e_1, e_2 em V , linearmente independentes e

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$$

$$u = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$$

também linearmente independentes. Se atribuirmos a $e_1 e_2$ o grau 2 deveríamos fazer o mesmo com uv , porém veja:

$$\begin{aligned}
 uv &= (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2) = \lambda_1 \xi_1 e_1^2 + \lambda_2 \xi_2 e_2^2 \\
 &+ \lambda_1 \xi_2 e_1 e_2 + \lambda_2 \xi_1 e_2 e_1
 \end{aligned}$$

e uv teria envolvido fator de grau zero.

Tal grau estará bem definido quando temos a forma quadrática $\varphi \equiv 0$ quando a álgebra de Clifford é exatamente a álgebra exterior $\Lambda(V)$.

Os naturais $\mathbb{N}$ nos permite entretanto definir a filtração

$$\begin{aligned} \{F^k(V)\} \quad \text{de} \quad C_\varphi(V) \\ C_\varphi(V) = \bigcup_{i=0}^{\dim V} F^i(V) \quad \text{e} \\ F^i F^j \subset F^{i+j} \end{aligned}$$

mas não a graduação naturalmente desejável.

A álgebra graduada associada a tal filtração é porém naturalmente isomorfa à álgebra exterior de V , isto é,

$$F^k(V) / F^{k-1}(V) \sim \Lambda^k(V).$$

Obtemos um isomorfismo fixando uma base de $V \{e_1, \dots, e_n\}$.

5. Podemos entretanto atribuir a $C_\varphi(V)$ uma graduação $\mathbb{Z}_2$, isto é, grau par e grau ímpar.

$$\begin{aligned} \text{Pomos} \quad C_\varphi^0(V) &= \text{imagem de} \quad \sum_{i \geq 0} \otimes^{2i} V \quad \text{e} \\ C_\varphi^1(V) &= \text{imagem de} \quad \sum_{i \geq 0} \otimes^{2i+1} V \end{aligned}$$

Esta possibilidade vem do fato do ideal I também se decompor em soma direta]

$$I = \left(I \cap \left(\sum \otimes^{2i} V \right) \right) \oplus \left(I \cap \sum \otimes^{2i+1} V \right)$$

o que faz com que o quociente se decomponha em soma direta.

Temos assim que

$$\begin{aligned} C_\varphi(V) &= C_\varphi^0(V) \oplus C_\varphi^1(V) \quad \text{e} \\ x_i y_j &\in C^k \quad k \equiv i + j \quad \text{com} \\ x_i &\in C_\varphi^i(V), \quad x_j \in C_\varphi^j(V). \end{aligned}$$

Esta $\mathbb{Z}_2$ -graduação é bastante relevante como mostra a seguinte

1.14. Proposição A

Suponhamos que $V = V_1 \oplus V_2$ é uma decomposição ortogonal de V segundo a forma quadrática φ e seja φ_i a restrição de φ a V_i . Então existe um isomorfismo

$$\psi : C_\varphi(V) \approx C_{\varphi_1}(V_1) \hat{\otimes} C_{\varphi_2}(V_2)$$

onde $\hat{\otimes}$ indica produto tensorial graduado.

O produto tensorial graduado de duas álgebras graduadas $A = A^1 \oplus A^2$ e $B = B^1 \oplus B^2$ é a álgebra graduada

$$(A \hat{\otimes} B)^k = \sum_{i+j \equiv k(2)} A^i \otimes B^j$$

com a multiplicação dada por:

$$(u \otimes x^i)(y^j \otimes v) = (-1)^{ij} u y^j \otimes x^i v \quad x^i \in B^i \quad y^j \in A^j.$$

Demonstração : Temos a injeção natural compatível com a decomposição

$$\psi : V \rightarrow C_{\varphi_1}(V_1) \hat{\otimes} C_{\varphi_2}(V_2)$$

dada por $\psi(e) = e_1 \otimes 1 + 1 \otimes e_2$ onde e_i é a projeção ortogonal de e em V_i .

Daí, então, pela multiplicação graduada vale

$$\psi(e)^2 = (e_1 \otimes 1 + 1 \otimes e_2)^2 = (\varphi_1(e_1) + \varphi_2(e_2))1 \otimes 1 = \varphi(e_1 + e_2)1 \otimes 1,$$

uma vez que e_1, e_2 são ortogonais segundo φ . Temos então a extensão universal

$$\psi : C_\varphi(V) \rightarrow C_{\varphi_1}(V_1) \hat{\otimes} C_{\varphi_2}(V_2).$$

Uma verificação com os elementos de uma base de V mostra que se trata de bijeção .

■

1.15. A álgebra tensorial $\otimes V$ possui um anti-automorfismo natural dado por

$$x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_k \xrightarrow{()}^t x_k \otimes x_{k-1} \otimes \dots \otimes x_1$$

(é como se observássemos as operações num espelho).

Esta transformação preserva o ideal I gerado pelos elementos do tipo $x \otimes x - \varphi(x)1$ pois

$$(x \otimes x - \varphi(x)1)^t = x \otimes x - \varphi(x)1.$$

Portanto $(\)^t$ induz um anti-automorfismo em $C_\varphi(V)$ que denotamos também por $(\)^t$

$$\begin{aligned} C_\varphi(V) &\rightarrow C_\varphi(V) \\ x &\rightarrow x^t \end{aligned}$$

e o chamamos de transposta. Esta é a identidade em V .

Consideramos também o automorfismo α de $C_\varphi(V)$ induzido pela aplicação antípoda de V . Mais precisamente

$$\alpha : V \rightarrow C_\varphi(V)$$

dada por $\alpha(x) = -x$, satisfaz $\alpha(x)^2 = x^2 = \varphi(x)$ e portanto se estende a um homomorfismo

$$\alpha : C_\varphi(V) \rightarrow C_\varphi(V)$$

e como $\alpha \circ \alpha = id$, é automorfismo. Este automorfismo deixa invariante os elementos “pares”, isto é, de $C_\varphi^0(V)$ e tem ação antípoda nos “ímpares”, isto é, de $C_\varphi^1(V)$. Esta é uma conjugação do tipo que utilizamos antes, quando tratamos do produto tensorial graduado.

Denotaremos com barra $\overline{(\)}$ a composição de α com a transposta e que é um anti-automorfismo

$$\overline{x} = \alpha(x^t) = \alpha(x)^t.$$

A segunda igualdade vem do fato de ambos coincidirem quando restritos a V .

1.16. As álgebras $C_k = C_\varphi(\mathbb{R}^k)$

onde φ é o negativo da forma euclidiana

$$\varphi(x_1, \dots, x_k) = - \sum_{i=1}^k x_i^2 = - \langle x, x \rangle.$$

Vimos que para $k = 1$ a álgebra obtida é a dos complexos

$$C_1 = \mathbb{C}$$

e para $k = 2$ temos a dos quatérnios

$$C_2 = \mathbb{H}.$$

Há ainda uma inclusão natural $C_1 \subset C_2$, como subálgebra, identificando os elementos de C_1 com os elementos “pares” de C_2 , ou seja, se C_2 é gerado por $1, e_1, e_2, e_1e_2$; tomamos $1, e_1e_2$, como os geradores de C_1 .

Este é uma fato geral

$$C_k \subset C_{k+1}$$

de modo natural. Como vimos antes, o automorfismo $\alpha : C_{k+1} \rightarrow C_{k+1}$, que restrito a $\mathbb{R}^k$ é o antípoda, deixa fixo exatamente cada elemento par que forma a subálgebra isomorfa a C_k . O fator C_k^0 está naturalmente contida em C_{k+1}^0 . O fator C_k^1 é injetado em C_{k+1}^0 por $C_k^1 e_{k+1}$.

Pela proposição A (1.14) temos que:

$$(B) \quad C_{p+q} \approx C_p \hat{\otimes} C_q.$$

Bastando para tal, considerar $\mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ ou ainda por repetidas aplicações da mesma, temos

$$(C) \quad C_k \approx \mathbb{C} \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} \mathbb{C} \quad (k \text{ fatores}).$$

1.17. As álgebras $C'_k = C'_\varphi(\mathbb{R}^k)$

onde φ é a forma euclideana

$$\varphi(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^k x_i^2.$$

Vejamos como é C'_1 .

Temos então $\mathbb{R}$ como espaço vetorial com a forma $\varphi(x) = x^2$ e queremos a álgebra de Clifford $C_\varphi(\mathbb{R})$. Introduzimos o fator escalar que conterà a unidade $\mathbb{R}$ obtendo

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$

com a unidade sendo $1 \equiv (1, 0)$ e o gerador $e = (0, 1)$ com a propriedade $\varphi(e) = e^2 = 1$.

Vamos tentar uma representação matricial 2×2

$$1 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Estas matrizes têm as propriedades desejadas

$$I \text{ é a unidade, } e^2 = I.$$

O espaço vetorial gerado por estas duas matrizes é formado por

$$x1 + ye \equiv \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}.$$

1.18. O conjunto de tais matrizes é fechado por multiplicação matricial formando uma álgebra. Com a solução do problema de realizarmos a forma φ como quadrado quando identificamos o espaço vetorial $\mathbb{R}$ com o segundo fator de $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, isto é, pondo $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}e$. A multiplicação em $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ tem portanto a forma

$$(x, y)(x', y') = (xx' + yy', xy' + x'y)$$

o que é o mesmo que

$$(x1 + ye)(x'1 + y'e) = xx'1 + yy'e^2 + xy'e + yx'e = (xx' + yy)1 + (xy' + x'y)e.$$

Identificamos evidentemente os escalares $\mathbb{R}$ como primeiro fator de $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}1$.

Analisemos agora C'_2 . Temos aqui o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e a forma $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Como sempre, adicionamos o fator dos escalares que contém a unidade multiplicativa obtendo de início $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$.

Temos assim

$$\begin{aligned} 1 &\equiv (1, 0, 0) \\ e_1 &\equiv (0, 1, 0) \\ e_2 &\equiv (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Queremos uma multiplicação em que 1 seja a unidade $e_1^2 = \varphi(e_1) = 1$, $e_2^2 = \varphi(e_2) = 1$ e mais geralmente que

$$\varphi(xe_1 + ye_2) = x^2 + y^2 = (xe_1 + ye_2)^2$$

o que nos leva a

$$(xe_1 + ye_2)^2 = x^2e_1^2 + y^2e_2^2 + xye_1e_2 + yxe_2e_1 = x^2 + y^2 + xy(e_1e_2 + e_2e_1)$$

e portanto devemos ter que

$$e_1e_2 + e_2e_1 = 0 \quad \text{ou}$$

$$e_1e_2 = -e_2e_1$$

Tentemos uma representação matricial novamente. Pomos

$$1 \equiv I \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e_1 \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Estes elementos satisfazem as relações acima $e_1^2 = 1$, $e_1e_2 = -e_2e_1$. A álgebra gerada por tais matrizes é a solução procurada uma vez que $\mathbb{R}^2$ é injetado como combinações lineares das matrizes e_1, e_2 . Observemos porém que:

$$e_1e_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

não está no espaço vetorial gerado por I, e_1, e_2 ; isto é, para termos a estrutura multiplicativa desejada precisamos adicionar mais um eixo a $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$ obtendo

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$$

onde o último fator $\mathbb{R}$ corresponde ao gerador $e_1e_2 \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Vejamos então como fica a matriz genérica que representa C'_2 . Tomamos a combinação linear de $1, e_1, e_2, e_1e_2$ e obtemos

$$xI + ye_1 + ze_2 + we_1e_2 = \begin{bmatrix} x+z & y-w \\ y+w & x-z \end{bmatrix}.$$

Mas esta é uma matriz genérica real 2×2 . Portanto obtivemos que como álgebras.

1.19. $C'_2 \approx \mathbb{R}(2)$

Novamente, pela Proposição A (1.14) temos que

$$(B') \quad C'_{p+q} \approx C'_p \hat{\otimes} C'_q$$

Bastando para tal considerar $\mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, ou ainda, por repetidas aplicações da mesma vale que:

$$(C') \quad C'_k \approx C'_1 \hat{\otimes} C'_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} C'_1, \quad k \text{ fatores.}$$

1.20. Observação

Em termos da base canônica de $\mathbb{R}^k$, $\{e_i\}$, C'_k é determinado pelas relações $e_i^2 = 1$ e $e_i e_j = -e_j e_i$, pois

$$\left(\sum_{i=1}^k x_i e_i \right)^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 e_i^2 + \sum_{i \neq j} x_i x_j (e_i e_j + e_j e_i).$$

1.21. Proposição D

Existem isomorfismos

$$C_k \otimes_{\mathbb{R}} C'_2 \approx C'_{k+2}$$

$$C'_k \otimes_{\mathbb{R}} C_2 \approx C_{k+2}$$

Demonstração : Usaremos a observação acima e a propriedade básica 2 da solução universal.

Vamos dar em $C_k \otimes_{\mathbb{R}} C'_2$ representantes para os geradores de C'_{k+2} . Denotemos E^k a imagem de $\mathbb{R}^k$ em C'_k e $\{\varepsilon_i\}$ sua base canônica. Consideramos a seguinte aplicação linear

$$f : E^{k+2} \rightarrow C_k \otimes_{\mathbb{R}} C'_2$$

dada por:

$$f(\varepsilon_1) = 1 \otimes \varepsilon_1$$

$$f(\varepsilon_2) = 1 \otimes \varepsilon_2$$

$$f(\varepsilon_i) = e_{i-2} \otimes \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

Vejamos que f verifica a propriedade 2, levando em conta a observação anterior

$$f(\varepsilon_i^2) = (1 \otimes \varepsilon_i)^2 = 1 \otimes \varepsilon_i^2 = 1 \otimes 1 \quad \text{unidade}$$

$$f(\varepsilon_i)^2 = (e_{i-2} \otimes \varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 = e_{i-2}^2 \otimes \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1 \otimes (-1) \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 = 1 \otimes 1 \quad \text{unidade}$$

Analogamente se verifica que

$$f(\varepsilon_i)f(\varepsilon_j) = -f(\varepsilon_j)f(\varepsilon_i).$$

Portanto existe extensão única de f a C'_{k+2} .

$$f : C'_{k+2} \rightarrow C_k \otimes C'_2$$

homomorfismo de álgebra. Como f leva base em base trata-se de um isomorfismo.

O outro isomorfismo é obtido trocando e_i por ε_j e E^{k+2} por $\mathbb{R}^{k+2}$ na definição de f .

1.22. As álgebras C_k e C'_k não são isomorfas em geral, mas suas complexificações são :

Com as notações anteriores, vamos realizar C_1 em $C'_1 \otimes \mathbb{C}$ com a representação

$$C_1 \xrightarrow{\sigma} C'_1 \otimes \mathbb{C}$$

$$\sigma(1) = 1 \otimes 1$$

$$\sigma(e_1) = \varepsilon_1 \otimes i$$

σ injeta C_1 em $C'_1 \otimes \mathbb{C}$, $\sigma(1)$ é a identidade e $\sigma(e_1)^2 = (\varepsilon_1 \otimes 1)^2 = \varepsilon_1^2 \otimes i^2 = -1 \otimes 1$. A extensão complexa de σ nos dá o isomorfismo

$$\hat{\sigma} : C_1 \otimes \mathbb{C} \rightarrow C'_1 \otimes \mathbb{C}$$

$$\hat{\sigma}(e_1 \otimes i) = \sigma(e_1)i = (\varepsilon_1 \otimes i)i = -\varepsilon_1 \otimes 1$$

$$\hat{\sigma}(1 \otimes i) = \sigma(1)i = 1 \otimes i.$$

Como $\hat{\sigma}$ é injetiva e leva base em base temos o isomorfismo.

De modo geral, representamos C_k em $C'_k \otimes \mathbb{C}$ assim

$$\sigma : C_k \rightarrow C'_k \otimes \mathbb{C}$$

$$\sigma(1) = 1, \quad \sigma(e_j) = \varepsilon_j \otimes i$$

e tomamos a extensão complexa.

1.23.

De posse das Proposições A, D e que $C_1 = \mathbb{C}$, $C_2 \approx \mathbb{H}$, $C'_1 \approx \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $C'_2 = \mathbb{R}(2)$ e mais $\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} F \approx F(n)$, $\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(m) = \mathbb{R}(nm)$, $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}(2)$, $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = \mathbb{R}(4)$, construímos a seguinte Tabela I:

k	C_k I	C'_k II	$C_k \otimes_{\mathbb{R}} C = C'_k \otimes_{\mathbb{R}} C$ III
1	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$
2	$\mathbb{H}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$
3	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$
5	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$
6	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$
7	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$
8	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$

1.24.

- 2-III – $C'_2 \otimes \mathbb{C} = \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}(2)$
- 3-I – $C_3 = \mathbb{C}_2 \hat{\otimes} \mathbb{C} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$
- 3-II – $C'_3 = \mathbb{C}_1 \otimes C'_2 = \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2) = \mathbb{C}(2)$
- 3-III – complexificação de C'_2
- 4-I – $C_4 = C'_2 \otimes C_2 = \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{H} = \mathbb{H}(2)$
- 4-II – $C'_4 = C'_2 \otimes C_2 = \mathbb{H}(2)$
- 4-III – $C'_2 \otimes C_2 \otimes \mathbb{C} = \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}(4)$

- 5-I – $C'_3 \otimes C_2 = \mathbb{C}(2) \otimes C_2 = \mathbb{R}(2) \otimes (\mathbb{C} \otimes C_2) = \mathbb{C}(4)$
- 5-II – $C_3 \otimes C'_2 = (\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}) \otimes \mathbb{R}(2) = \mathbb{H}(2) \otimes \mathbb{H}(2)$
- 6-I – $C_6 = C'_4 \otimes C_2 = C'_2 \otimes C_2 \otimes C_2 = \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{R}(4) = \mathbb{R}(8)$
- 6-II – $C'_6 = C_4 \otimes_{\mathbb{R}} C'_2 = \mathbb{H}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(4) = \mathbb{H}(4)$
- 6-III – $C_6 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{R}(8) \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}(8)$
- 7-I – $C_7 = C_6 \hat{\otimes}_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{R}(8) \hat{\otimes}_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$
- 7-II – $C'_7 = C_5 \otimes_{\mathbb{R}} C'_2 = \mathbb{C}(4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) = \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(8) = \mathbb{C}(8)$
- 7-III – $\mathbb{C}(8) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$
- 8-I – $C_8 = C'_6 \otimes_{\mathbb{R}} C_2 = \mathbb{H}(4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = \mathbb{R}(4) \otimes \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = \mathbb{R}(4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(4) = \mathbb{R}(16)$
- 8-II – $C'_8 = C_6 \otimes_{\mathbb{R}} C'_2 = \mathbb{R}(8) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) = \mathbb{R}(16)$
- 8-III – $\mathbb{R}(16) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}(16)$

1.25. Usamos em (8-I) o seguinte isomorfismo $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \approx \mathbb{R}(4)$. Consideremos as representações de $\mathbb{H}$ dadas por $\sigma(x)(z) = xz$ e $\bar{\sigma}(x)(z) = zx$.

Como $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ e $\bar{\sigma}(x)$ é $\mathbb{C}$ -linear temos $\bar{\sigma}(x) \in \mathbb{C}(2) \subset \mathbb{R}(4)$. Como matriz complexa atuando à esquerda temos que para $x = (a, b)$ em $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = \mathbb{H}$

$$\bar{\sigma}(x) = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Considerando-a como matriz real 4×4 temos

$$\bar{\sigma} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}(4)$$

numa representação de álgebra injetiva.

Podemos estendê-la por σ a

$$\begin{aligned} \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} &\xrightarrow{\sigma \otimes \bar{\sigma}} \mathbb{R}(4) \\ (\sigma \otimes \bar{\sigma})(p \otimes q) &= \sigma(p)\bar{\sigma}(q) \quad \text{ou} \\ (\sigma \otimes \bar{\sigma})(p \otimes q)(z) &= \sigma(p)z\bar{\sigma}(q). \end{aligned}$$

Injetividade mais igualdade das dimensões nos dá que

$$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \approx \mathbb{R}(4).$$

As demais álgebras são obtidas desta tabela levando-se em conta que:

$$C_4 \approx C'_2 \otimes C_2 \approx C'_4 \quad \therefore \quad C_{k+4} \approx C_k \otimes C'_2 \otimes C_2 = C_k \otimes C_4$$

$$C_{k+8} \approx C_k \otimes C_4 \otimes C_4 = C_k \otimes C_8. \text{ Como } C_8 \cong \mathbb{R}(16) \text{ se } C_k \approx F(m) \text{ então } C_{k+8} \approx F(16m).$$

2 O Grupo Spinorial

Continuando com a mesma notação, C_k designa a álgebra de Clifford do par $(\mathbb{R}^k, \varphi)$ onde

$$\varphi(x) = - \langle x, x \rangle.$$

2.1. Definição

Chamamos de Grupo de Clifford de C_k ao subgrupo Γ_k dos elementos inversíveis s de C_k que satisfazem

$$\alpha(s)x s^{-1} \in \mathbb{R}^k \quad \forall x \in \mathbb{R}^k.$$

É imediato ver que Γ_k é um grupo e sua definição traz consigo uma representação, pois cada elemento s de Γ_k atua em $\mathbb{R}^k$ como automorfismo linear.

2.2. Definição

Chamamos de representação adjunta torcida de Γ_k a

$$\begin{aligned} \rho : \Gamma_k &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^4) \\ \rho(s)(x) &= \alpha(s)x s^{-1}. \end{aligned}$$

2.3. Proposição

O automorfismo α de C_k e o anti-automorfismo transposição $x \rightarrow x^t$ de C_k preservam Γ_k e portanto a conjugação $x \rightarrow \bar{x}$ também preserva como anti-automorfismo.

Demonstração :

$$x \in \mathbb{R}^k \Rightarrow \alpha(s)x s^{-1} \in \mathbb{R}^k \text{ para } s \in \Gamma_k \therefore$$

$$- \alpha(\alpha(s)x s^{-1}) = -s \alpha(x) \alpha(s)^{-1} = s x \alpha(s)^{-1} = \alpha(\alpha(s))x \alpha(s)^{-1} \therefore \alpha(s) \in \Gamma_k .$$

Para a transposição temos

$$\alpha(s)x s^{-1} = y$$

$$(\alpha(s)x s^{-1})^t = y^t = y \text{ pois } y \in \mathbb{R}^k \therefore (s^{-1})^t x \alpha(s)^t = \alpha(s)x s^{-1}$$

aplicando α e sabendo que $\alpha(y) = -y$ e $\alpha(x) = -x$ temos

$$-\alpha(s^{-1})^t x s^t = -y \therefore x = \alpha(s^t)y(s^t)^{-1} .$$

Portanto temos que $s^t \in \Gamma_k$ e $\bar{s} \in \Gamma_k$ já que $\bar{s} = \alpha(s^t)$. ■

Observação

1. O automorfismo α é uma “conjugação ” segundo a decomposição

$$C_k = C_k^0 \oplus C_k^1$$

isto é,

$$\alpha(v^0 + v^1) = v^0 - v^1 .$$

2. Esta é a conjugação que permite escrever a multiplicação do produto tensorial graduado, como multiplicação quaterniônica. Ela sozinha não generaliza a conjugação usual dos complexos $\mathbb{C}$, já que $\alpha(x)x$ não é necessariamente, um escalar. Isto vem do fato da multiplicação de Clifford não ser comutativa. Precisamos então do anti-automorfismo transposição $()^t$ para conseguirmos a generalização que embora parcial é adequada. Temos assim, com a notação acima, que

$$(\overline{v^0 + v^1}) = v^{0t} - v^{1t} .$$

Uma vez que a definição do grupo de Clifford é dada envolvendo uma representação

$$\rho : \Gamma_k \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^k),$$

vamos procurar conhecê-lo, assim como alguns de seus subgrupos de maior interesse, através desta representação .

2.4. Proposição

O núcleo da representação ρ (acima) é o grupo multiplicativo dos reais não nulos $\mathbb{R}^$.*

Demonstração : Temos $\rho(s)(x) = \alpha(s)x s^{-1}$.

Se s é real não nulo vale $\alpha(s) = s$ e o mesmo comuta com qualquer x portanto $\rho(s)(x) = x$; o que nos dá

$$\mathbb{R}^* \subset \ker \rho .$$

Tomemos agora s em Γ_k e tal que

$$\rho(s)(x) = x$$

para todo x de $\mathbb{R}^k$. Escrevamos

$$s = s^0 + s^1$$

onde $s^0 \in C_k^0$ e $s^1 \in C_k^1$, são as componentes par e ímpar, respectivamente de s

$$\rho(s)(x) = (s^0 - s^1)x(s^0 + s^1)^{-1} = x$$

donde

$$(s^0 - s^1)x = x(s^0 + s^1)$$

ou

$$s^0x - s^1x = xs^0 + xs^1 .$$

Levando em conta a paridade, devemos ter

$$\text{i) } s^0x = xs^0$$

$$\text{ii) } xs^1 = -s^1x$$

Seja (e_i) a base canônica de $\mathbb{R}^k$ e vamos escrever s^0 da seguinte forma em termos desta base

$$s^0 = a^0 + e_i b^1$$

onde a^0 é par, b^1 é ímpar e ambos não envolvem e_i . Tomando agora $x = e_i$ temos que

$$s^0 e_i = a^0 e_i + e_i b^1 e_i = a^0 e_i - e_i^2 b^1 = a^0 e_i + b^1$$

$$e_i s^0 = e_i a^0 + e_i^2 b^1 = e_i a^0 - b^1$$

logo, de (i) e da igualdade $e_i a^0 = a^0 e_i$, (já que a^0 é par), concluímos que b^1 é nulo. O elemento s^0 não pode ter em sua expressão nenhum e_i e portanto é real. Analogamente para s^1 e usando (ii) concluímos que s^1 não pode ter em sua expressão nenhum e_i , mas sendo ímpar tem então de ser nulo. Concluimos assim que se s está no núcleo de ρ então s é real. Como s tem que ser inversível temos $s \neq 0$ e

$$\ker \rho = \mathbb{R}^*.$$

■

2.5. Definição

Levando em conta a conjugação definida em (2.18) $\bar{x} = \alpha(x)^t$, temos

$$N : C_k \rightarrow C_k$$

$$N(x) = x \bar{x}$$

Observação

Para x em $\mathbb{R}^k$ $N(x) = |x|^2$.

2.6. Proposição

Para x em Γ_k , $N(x)$ é um número real não nulo.

Demonstração : Pela proposição anterior basta mostrar que $N(x)$ está no núcleo da representação ρ .

Para y em $\mathbb{R}^k$, $y' = \alpha(x)y x^{-1}$ em $\mathbb{R}^k$.

Aplicando a transposição temos

$$(x^{-1})^t y \alpha(x)^t = y'^t = y' = \alpha(x)y x^{-1}$$

como $(x^{-1})^t = (x^t)^{-1}$ e $\alpha(x)^t = \alpha(x^t)$ obtemos

$$y \alpha(x^t)x = x^t \alpha(x)y$$

ou

$$y = \alpha(\bar{x}x)y(\bar{x}x)^{-1}$$

$$y = \alpha N(x)y N(x)^{-1}$$

para cada y de $\mathbb{R}^k$, portanto

$$N(x) \in \ker \rho = \mathbb{R}^*.$$

■

2.7. Proposição

$N : \Gamma_k \rightarrow \mathbb{R}^*$ é homomorfismo e $N(\alpha(x)) = \alpha(N(x))$.

Demonstração : Sendo $N(y)$ real, está no centro, logo

$$N(xy) = xy(\overline{xy}) = xy\bar{y}\bar{x} = xN(y)\bar{x} = N(x)N(y)$$

$$N(\alpha(x)) = \alpha(x)\overline{\alpha(x)} = \alpha(x)\alpha(\alpha(x))^t = \alpha(x)x^t = \alpha(x\alpha(x^t)) = \alpha(x\bar{x}) = \alpha N(x).$$

■

2.8. Proposição

Para cada x de Γ_k , $\rho(x)$ é uma isometria de $\mathbb{R}^k$.

Demonstração : Para y em $\mathbb{R}^k$ temos $\rho(x)y$ em $\mathbb{R}^k$ e

$$\begin{aligned} |\rho(x)y|^2 &= N(\rho(x)y) = N(\alpha(x)y x^{-1}) = N(\alpha x) N(y) N(x^{-1}) = \\ &= \alpha(N(x)) N(x^{-1}) N(y) = N(x) N(x^{-1}) N(y) = N(y) = |y|^2. \end{aligned}$$

■

2.9. Definição

O grupo pinorial de $\mathbb{R}^k$ que denotamos por $\text{Pin}(k)$ é o núcleo do homomorfismo N

$$\text{Pin}(k) \subset \Gamma_k \xrightarrow{N} \mathbb{R}^*$$

isto é

$$\text{Pin}(k) = \{x \in \Gamma_k \mid N(x) = 1\}.$$

Este é portanto um subgrupo normal de Γ_k .

2.10. Proposição

A representação adjunta torcida ρ restrita a $\text{Pin}(k)$ é um homomorfismo sobre o grupo ortogonal $O(k)$ de $\mathbb{R}^k$ com núcleo $\mathbb{Z}_2$ gerado pelo -1 de Γ_k .

Demonstração : Como $xy + yx$ é bilinear simétrica em C_k e

$$x^2 + x^2 = 2x^2 = -2 \langle x, x \rangle$$

então

$$xy + yx = -2 \langle x, y \rangle.$$

Daí temos que se x é ortogonal a y eles anticomutam

$$xy = -yx.$$

Se x é colinear com y então eles comutam, pois

$$x = \lambda y, \quad xy = xy = \lambda y y = y \lambda y = yx.$$

Que ρ é homomorfismo já sabemos, assim como toma valores em $O(k)$ (2.8). Vejamos então que é sobre. Uma vez que os elementos de $O(k)$ são composições de reflexões em hiperplanos de $\mathbb{R}^k$, basta mostrar que a imagem de ρ contém todas as reflexões.

Uma reflexão qualquer de $\mathbb{R}^k$ fica caracterizada por um vetor unitário u ou pelo hiperplano H perpendicular a u . Verifiquemos que a reflexão determinada por u é exatamente $\rho(u)$.

$$\rho(u)x = \alpha(u)x u^{-1} = -u x \bar{u} = -u x (-u) = u x u.$$

Esta transformação em x de $\mathbb{R}^k$ é uma isometria que para x em H

$$u x u = -x u u = -x(-1) = x$$

portanto H fica invariante e vetor u é levado em seu oposto

$$u u u = -u.$$

Esta isometria é então a reflexão segundo o hiperplano H e tem a forma

$$\rho(u)x = x - 2 \langle x, u \rangle u.$$

A representação

$$\rho : \text{Pin}(k) \rightarrow O(k)$$

e então sobre. Seu núcleo consiste de reais múltiplos λ de 1 de Γ_k com $N(\lambda) = 1$, donde $\lambda^2 = 1$, logo é $\mathbb{Z}_2$. ■

2.11. Definição

Chamamos de $\text{Spin}(k)$ ao subgrupo de $\text{Pin}(k)$, imagem inversa de $SO(k)$ por ρ .

Como $\text{Pin}(k)$ vai sobre $O(k)$ via ρ então $\text{Spin}(k)$ é levado sobre $SO(k)$.

2.12. Proposição

O grupo $\text{Pin}(k)$ é gerado pelos elementos da esfera unitária S^{k-1} de $\mathbb{R}^k$ e o $\text{Spin}(k)$ é o subgrupo dos elementos de ordem par.

Demonstração : Inicialmente, vejamos que $S^{k-1} \subset \text{Pin}(k)$.

Se v é unitário, como na demonstração de (2.25), temos que $\rho(v)$ é a reflexão em $\mathbb{R}^k$ segundo o hiperplano ortogonal a v

$$\rho(v)x = x - 2 \langle x, v \rangle v.$$

Como $N(v) = v \bar{v} = -v^2 = 1$ temos v em $\text{Pin}(k)$.

Dado agora um elemento genérico x de $\text{Pin}(k)$, sabemos que $\rho(x)$ é de $0(k)$ que, por uma vez, é composição de um certo número de reflexões em hiperplanos determinados por vetores unitários $x_1, \dots, x_t$. Como

$$\rho(x_1 \dots x_t) = \rho(x_1) \dots \rho(x_t)$$

e

$$N(x_1 \dots x_t) = N(x_1) \dots N(x_t) = 1$$

temos que $x_1 \dots x_t = x$ ou $-x_1 \dots x_t = x$, donde $S^{k-1} \subset \text{Pin}(k)$. Para $SO(k)$ precisamos de um número par de reflexões, portanto t acima deve ser par ■

2.13. Observação

- i) Como C_k é espaço vetorial de dimensão finita 2^k , ele tem uma única topologia Hausdorff compatível com as operações e que provêem da métrica euclidiana de $\mathbb{R}^k$ mais a base determinada pela base canônica. Nesta topologia Γ_k é aberto, $\text{Pin}(k)$ e $\text{Spin}(k)$ são subvariedades compactas e portanto grupos de Lie.
- ii) Considerando (i), $\rho : \text{Pin}(k) \rightarrow 0(k)$ e $\rho : \text{Spin}(k) \rightarrow SO(k)$ são recobrimentos duplos e não triviais, pois podemos ligar os dois elementos do núcleo ± 1 por um arco c em $\text{Spin}(k)$

$$c(t) = \cos t + \sin t e_1 e_2, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

- iii) Para $k \geq 2$, $\text{Spin}(k)$ é conexo e para $k \geq 3$ o mesmo é simplesmente conexo. Isto decorre do fato de $SO(k)$ ser conexo para $k \geq 2$ e ter grupo fundamental $\mathbb{Z}_2$ para $k \geq 3$.
- iv) $\text{Spin}(2k) \subset C_{2k}^0$ e cada círculo $\lambda + \mu e_{2j-1} e_{2j}$, $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ está em $\text{Spin}(2k)$. O subgrupo gerado por estes é um toro maximal $\tilde{T}$ de $\text{Spin}(2k)$. Chamemos $\zeta_j = \lambda + \mu e_{2j-1} e_{2j}$, então $\bar{\zeta}_j = \lambda - \mu e_{2j-1} \cdot e_{2j}$ e $\zeta_j \bar{\zeta}_j = 1$, donde $\bar{\zeta}_j = \zeta_j^{-1}$. A ação de ζ_j no fator de $\mathbb{R}^{2k}$ gerado por e_{2j-1}, e_{2j} é dada pela matriz

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 - \mu^2 & -2\lambda\mu \\ 2\lambda\mu & \lambda^2 - \mu^2 \end{bmatrix}$$

Se identificarmos $SO(2)$ com $U(1)$, tal ação corresponde à multiplicação por z_j^2 onde $z_j = \lambda + \mu i$. Portanto um elemento genérico de $\tilde{T}$ é da forma $\zeta_1 \dots \zeta_k$, cuja ação em $\mathbb{R}^{2k}$ dá a matriz

$$\begin{bmatrix} z_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_k^2 \end{bmatrix}$$

com a identificação acima. Embora possamos escolher $\pm\zeta_i$, os sinais se compõem de modo a dar somente duas possibilidades para o elemento genérico $\pm\zeta_1 \dots \zeta_k$, portanto o toro maximal $\tilde{T}$ de $\text{Spin}(2k)$ cobre duas vezes o toro maximal T de $SO(2k)$ como deve.

- v) O que fizemos com estes grupos para o caso real estende-se naturalmente para o caso complexo, tomando-se

$$\begin{aligned} C_k \otimes \mathbb{C} \\ \alpha(x \otimes z) &= \alpha(x) \otimes z \\ (x \otimes z)^t &= x^t \otimes \bar{z} \end{aligned}$$

e Γ_k^c como sendo os inversíveis x de $C_k \otimes \mathbb{C}$, $\rho^c(x)\mathbb{R}^k = \alpha(x)\mathbb{R}^k x^{-1} = \mathbb{R}^k$. Com $N(x) = x \bar{x}$ obtemos $\text{Pin}^c(k)$ e núcleo

$$U(1) \subset \text{Pin}^c(k) \rightarrow 0(k)$$

onde $U(1)$ é o subgrupo dos elementos $1 \otimes z$ de $C_k \otimes \mathbb{C}$ com $|z| = 1$.

Há um isomorfismo natural

$$\text{Pin}(k) \times_{\mathbb{Z}_2} U(1) \sim \text{Pin}^c(k)$$

onde $\mathbb{Z}_2$ atua em $\text{Spin}(k)$ e $U(1)$ como ± 1 . Definimos $\text{Spin}^c(k)$ como sendo a imagem Inversa de $SO(k)$ por ρ^c . Assim temos também o isomorfismo

$$\begin{array}{ccccc}
U(1) & \subset & \overset{c}{\text{Pin}}(k) & \supset & \overset{c}{\text{Spin}}(k) \\
& & \downarrow \rho_c & & \downarrow \rho_c \\
& & O(k) & \supset & SO(k)
\end{array}$$

$$\overset{c}{\text{Spin}}(k) \times_{\mathbb{Z}_2} U(1) \sim \text{Spin}^c(k)$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{Spin}(k) \times U(1) & \longrightarrow & \text{Spin}(k) \times_{\mathbb{Z}_2} U(1) \\
& \searrow & \swarrow \\
& SO(k) &
\end{array}$$

§ 3 Representação dos Grupos Clássicos

As referências básicas aqui são [1] [2] [7] [8] e [9]. As demonstrações omitidas encontram-se nas referências acima.

Os grupos clássicos $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $\text{Spin}(n)$ são grupos de Lie compactos. Estes são os objetos principais de estudo aqui. Apresentaremos a parte geral para um grupo de Lie compacto G .

Definição 3.1

Sejam G grupo de Lie compacto, $GL(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$ os grupos lineares reais e complexos, respectivamente. Chamamos a um homomorfismo contínuo $\ell : G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ de uma representação real ou complexa de G , respectivamente.

Definição 3.2

Duas representações ℓ e r de G num grupo linear G' são isomorfas se existir um elemento u de G' tal que, $\ell = uru^{-1}$, isto é $\ell(g) = u \circ r(g) \circ u^{-1}$, ou seja, se existir um automorfismo interno de G' que leva uma na outra.

Definição 3.3

Dada a compacidade de G , é possível se fatorar qualquer representação de G pelo grupo das isometrias, a menos de isomorfismo.

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & GL(n, \mathbb{C}) \\ & \searrow & \cup \\ & & U(n) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & GL(n, \mathbb{R}) \\ & \searrow & \cup \\ & & O(n) \end{array}$$

Observe que se G é conexo r se fatora pelo grupo $S0(n)$, dada a continuidade de r e o fato de ser este grupo a componente conexa de $O(n)$ contendo a matriz identidade.

Há uma outra maneira de se encarar as representações; ambas são convenientes.

Definição 3.4

Designemos por k os corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e seja V um espaço vetorial sobre k de dimensão finita de dimensão n . Dizemos que V é uma representação de G , ou um G -módulo de dimensão n se for fixada uma ação contínua de G em V através de k -isomorfismo de V .

Definição 3.5

Duas representações V e W de G são isomorfas se existir um isomorfismo de k -espaço vetorial $u : V \rightarrow W$, tal que as ações de G em V e W comutem com u , isto é,

$$u(gx) = g.u(x)$$

Dado um G -módulo qualquer V de dimensão n é possível se obter um G -módulo isomorfo k^n . Basta escolhermos um isomorfismo linear de V e transportar a G -estrutura de V para este. As definições iniciais são equivalentes as últimas de modo imediato.

Temos assim, soma direta de representações assim como produto tensorial, para um mesmo grupo. As ações são dadas assim

$$g(v \oplus w) = g(v) \oplus g(w)$$

e

$$g(v \otimes w) = gv \otimes gw$$

Designemos por $S(G)$ o conjunto das classes de isomorfismos das representações de G . As operações de soma direta e produto tensorial se transportam para $S(G)$ e as denotaremos respectivamente por $+$ e justaposição. Observe que em $S(G)$ ambas operações são comutativas.

$(S(G), +)$ é um monóide, mas não um grupo. Podemos passar deste monóide para usar grupo $R(G)$ de uma maneira minimal, no seguinte sentido. Existe um homomorfismo de monóide $i : S(G) \rightarrow R(G)$ tal que dados um grupo M , abeliano e um homomorfismo de monóide $f : S(G) \rightarrow M$ qualquer, este se fatora por i através de um único homomorfismo de grupo $\hat{f}$.

Definição 3.6

$$\begin{array}{ccc} S(G) & \xrightarrow{i} & R(G) \\ & \searrow f & \swarrow \hat{f} \\ & M & \end{array}$$

O grupo $R(G)$ pode ser construído da seguinte maneira. Tomamos a grupo abeliano livre gerado por $S(G)$ e fazemos quociente pelo subgrupo gerado por elementos do tipo

$$(a + b) + (-1)a + (-1)b$$

A multiplicação que temos em $S(G)$, que é distributiva em relação a soma, induz uma multiplicação em $R(G)$ tornando este um anel. O elemento neutro da multiplicação é dado pelo G -módulo $\mathcal{C}$ com ação trivial.

A construção que demos para $R(G)$ é uma solução de (3.6) e qualquer outra lhe será isomorfa.

Se G é um grupo de Lie compacto, qualquer representação de G se decompõe numa soma de G -módulos irredutíveis. Isto nos dá que $R(G)$ é o grupo abeliano livre gerado pelas representações irredutíveis. Em particular a aplicação $i : S(G) \rightarrow R(G)$ é injetiva. Podemos considerá-la como uma inclusão. Estenderemos o nome de representação de G a todo elemento de $R(G)$ embora muitos não sejam representações no sentido de (1.1) e (1.4). Quando quisermos distinguir, chamaremos os novos elementos de representações virtuais.

Se tivermos um homomorfismo contínuo entre dois grupos de Lie compactos, este induz um homomorfismo de anel, no sentido oposto

$$H \xrightarrow{h} G$$

$$R(H) \xleftarrow{Rh} R(G)$$

Definição 3.7

Pelas construções acima, a cada grupo de Lie compacto G fazemos corresponder um anel $R(G)$ a que chamamos de anel de representação de G . A construção R atua como funtor contravariante. Quando consideramos representações complexas usamos a notação $RU(G)$; para as reais $RO(G)$.

O conjunto dos números complexos de norma 1, que denotamos por S^1 e chamamos de círculo unitário, ou apenas círculo, é um grupo de Lie com a multiplicação complexa. A partir deste podemos produzir os n -toros.

$$T^n = S^1 \times \dots \times S^1, \text{ } n \text{ vezes}$$

que são também grupos de Lie, com a estrutura produto de S^1 . T^n é um grupo de Lie compacto conexo e abeliano e estes são os únicos com tais propriedades. Se G é um grupo de Lie compacto e $T^n \rightarrow G$ é injetivo dizemos que T^n ou sua imagem é um n -toro de G . Se T^n é um toro de G então qualquer seu conjugado também é.

Definição 3.8

Seja G um grupo de Lie compacto e conexo. Dizemos que um toro $T \subset G$ é maximal de G se G é igual a união de todos os conjugados de T . A dimensão de T é chamada de posto de G .

$$G = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}$$

Todo grupo G como acima admite toros maximais e todos são conjugados entre si e, portanto tem a mesma dimensão. Isto legaliza a definição de posto de G . Esta definição

de toro maximal coincide com aquela em que se considera a relação de inclusão na família de todos os toros de G .

Definição 3.9

Seja G um grupo de Lie compacto, conexo e T um toro maximal de G . O grupo de Weyl de G (relativo a T), é o quociente do normalizador $N(T)$ de T , por T . Usamos as notações W , $W(G)$ ou $W(G,T)$ para o grupo de Weyl.

Se T_1 é outro toro maximal então $W(G(T_1))$ é isomorfo a $W(G,T)$, portanto a menos de isomorfismo, W está associado a G e costumamos omitir a referência ao toro T . O grupo de Weyl é sempre finito.

A ação de W em T induz uma ação de W em $R(T)$. A aplicação de inclusão $i : T \rightarrow G$ induz uma aplicação de "restrição"

$$T \xrightarrow{i} G$$

$$R(T) \xleftarrow{Ri} R(G)$$

Nos restringimos por algum tempo ao caso das representações complexas, isto é, G -módulos V ou $G \rightarrow U(n)$. Usaremos então a notação $RU(G)$ para o anel $R(G)$.

Proposição 3.10

Sejam G um grupo de Lie compacto, conexo e $i : T \subset G$ um toro maximal com grupo de Weyl, W . A aplicação de restrição Ri

$$R(T) \xleftarrow{Ri} R(G)$$

é injetiva e sua imagem é o subanel $RU(T)^W$ dos elementos invariantes pela ação de W em $RU(T)$. [1]

Os anéis de representação complexos que daremos aparecerão como subanéis $RU(T)^W$ de $RU(T)$ para algum toro T de grupo de Weyl W .

3.11 Anel de Representação de um toro T^n

Indiquemos com z_i a classe da representação que é a i -ésima projeção de T^n em S^1 . Cada projeção destas é uma representação complexa já que são homomorfismos contínuos

P_i

$$T^n \rightarrow S^1 = U(1)$$

z_i representará também a classe do T^n -módulo irredutível $\mathcal{C}$ com a ação de T^n dada por p . O produto tensorial de representações de dimensão 1 é apenas a multiplicação das mesmas já que tomam valores em $S^1 = U(1)$. Assim sendo elas admitem inversa. A inversa de z_i é $\bar{z}_i$; $z_i \cdot \bar{z}_i = 1$.

$$RU(T^n) = \mathbb{Z}[z_1, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, z_n, \bar{z}_n]$$

isto é, o anel $RU(T^n)$ é o anel polinomial em $2n$ indeterminadas avaliado em $z_i, \bar{z}_i$, $1 \leq i \leq n$. Dito de outra maneira, $RU(T^n)$ é o anel das séries finitas de Laurent nas variáveis $z_1, z_2, \dots, z_n$. Para uma demonstração ver [1].

Observação

Os anéis $RU(G)$ aparecerão como subanéis de $RU(T)$ e usaremos a notação $RU(G) = \mathbb{Z}[\]$ indicando que este é gerado pelos elementos que aparecerem no colchete. Ele não será em geral um anel de polinômios, como $RU(T^n)$ já mostra.

3.12 Anel de Representação de $U(n)$.

$U(n)$ é o grupo unitário das matrizes complexas $n \times n$. A identidade $U(n) \rightarrow U(n)$ já é uma representação complexa de $U(n)$ a qual chamaremos de identidade. Esta representação vista como $U(n)$ -módulo é $\mathbb{C}^n$ com a ação canônica.

Como $U(n)$ é um grupo de Lie compacto e conexo, ele admite um toro maximal. De fato, um tal toro pode ser tomado como o dado pelas matrizes diagonais de $U(n)$, T^n .

$$\begin{bmatrix} z_1 & & & & \\ & z_2 & & & \\ & & z_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & z_n \end{bmatrix}, \quad z_i \in U(1)$$

e portanto, $U(n)$ tem posto n . O grupo de Weyl, W , de $U(n)$ é o grupo simétrico em $z_1, z_2, \dots, z_n$. A ordem de W é $n!$. O subanel $RU(t)^W$ invariante, neste caso, tem a descrição

$$RU(U(n)) = \mathbb{Z}[\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n, (\lambda^n)^{-1}]$$

onde λ^i é o i -ésimo polinômio simétrico em $z_1, z_2, \dots, z_n$; λ^n tem dimensão 1, $(\lambda^n)^{-1}$ é

sua inversa e todas elas são irredutíveis.

3.13 Observação

λ^i vem da i -ésima potência exterior da representação identidade.

3.14 Anel de representação de $S0(n)$

Aqui temos de separar os casos n par e ímpar.

$S0(n)$ é o grupo das matrizes ortogonais $n \times n$ de determinante 1. Este é um grupo de Lie compacto e conexo. Temos a identificação natural

$$S0(2) = U(1) = S^1$$

Caso $S0(2n+1)$

Escolhemos para o toro maximal as matrizes com blocos de $S0(2)$ na diagonal

$$\begin{bmatrix} z_1 & & & & \\ & z_2 & & & \\ & & z_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & z_n \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad z_i \in S0(2) = S^1$$

O grupo de Weyl, W , neste caso, é o subgrupo do grupo simétrico em $2n$ letras, atuando em $z_1, z_2, \dots, z_n, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n$ gerado por todas as permutações de $z_1, z_2, \dots, z_n$ e todas as transposições $z_i \rightarrow \bar{z}_i \rightarrow z_i$.

Então a ordem de W é igual ao número de permutações de $z_1, \dots, z_n$ vezes o número de seus subconjuntos e portanto é $2^n \cdot n!$.

$$RU(S0(2n+1)) = \mathbb{Z}[\lambda^1, \dots, \lambda^n]$$

onde λ^i é o i -ésimo polinômio simétrico elementar em $z_1, z_2, \dots, z_n, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n, 1$ e são algebricamente independentes, mas não são irredutíveis. Se omitirmos o 1 desta lista e σ_i designar o polinômio correspondente a λ^i , então temos $\lambda^i = \sigma_i + \sigma_{i-1}$, com $\sigma_0 = 1$. Os σ_i 's podem ser tomados também como geradores.

3.15 Observação

λ^i é a complexificada da i -ésima potência exterior da representação real identidade.

Caso $S0(2n)$

O toro maximal é o mesmo que o anterior; com o termo 1 eliminado da diagonal.

O grupo de Weyl W é o subgrupo do grupo simétrico em $z_1, z_2, \dots, z_n, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n$ gerado pelas permutações das primeiras n letras e as composições de um número par de transposições $z_i \rightarrow \bar{z}_i \rightarrow z_i$. O número de elementos de W é igual ao número de permutações em n -letras vezes o número de subconjuntos destas, de ordem par e, portanto é $2^{n-1}n!$.

$$RU(S0(2n)) = \mathbb{Z}[\lambda^1, \dots, \lambda^{n-1}, \lambda_+^n, \lambda_-^n]$$

onde λ^i é o i -ésimo polinômio simétrico elementar em $z_1, z_2, \dots, z_n, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n$; $1 \leq i \leq n-1$ e são irredutíveis. Seja λ^n o n -ésimo polinômio simétrico elementar nas mesmas variáveis. W atuando em λ^n o separa em dois fatores irredutíveis $\lambda^n = \lambda_+^n + \lambda_-^n$. λ_+^n é formado por monômios de λ^n com um número par de $\bar{z}_i$'s e λ_-^n é o com um número ímpar de $\bar{z}_i$'s. Os geradores do anel acima não são algebricamente independentes. Eles satisfazem a relação

$$\left(\sum_{j \geq 1} \lambda^{n-(2j-1)}\right)^2 = (\lambda_+^n + \sum_{j \geq 1} \lambda^{n-2j})(\lambda_-^n + \sum_{j \geq 1} \lambda^{n-2j})$$

[143]

3.16 Observação

λ^i é a complexificada da i -ésima potência exterior da representação real identidade, para $1 \leq i \leq n$. Notemos que em λ_+^n podemos ter z_i e $\bar{z}_i$ aparecendo no mesmo monômio. Podemos ainda descrever este anel como sendo um módulo livre sobre o anel de polinômios $\mathbb{Z}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ com dois geradores 1 e λ_+^n . [2]

3.17 Anel de Representação de $Spin(n)$

Para $n \geq 3$ o grupo fundamental de $S0(n)$ é $\mathbb{Z}_2$. Isto nos permite construir o recobrimento simplesmente conexo de $S0(n)$, de duas folhas, e que possui estrutura de grupo de Lie tornando a projeção um homomorfismo com núcleo $\mathbb{Z}_2$ que é ainda um difeomorfismo local. Tal grupo é chamado de $Spin(n)$ e tem a mesma dimensão que $S0(n)$. Veja também outra descrição nestas notas envolvendo as álgebras de Clifford.

$$\mathbb{Z}_2 \subset Spin(n) \rightarrow SO(n)$$

$Spin(n)$ é de Lie, compacto, conexo e admite para toro maximal $\bar{T} = p^{-1}(T)$, onde T é o toro maximal que escolhemos em $SO(n)$.

Descreveremos o anel de representação de $Spin(n)$ relacionando-o com o de $SO(n)$

$$RU(Spin(n)) \leftarrow RU(SO(n))$$

Como estamos realizando tais anéis como subanéis de anéis de representação de toros, consideramos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} RU(\tilde{T}) & \xleftarrow{R_p} & RU(T) \\ \uparrow & & \uparrow \\ RU(Spin(n)) & \xleftarrow{R_p} & RU(SO(n)) \end{array}$$

Usando a mesma notação para p e $p/\tilde{T}$ obtemos

$$RU(\tilde{T}) \xleftarrow{R_p} RU(T)$$

R_p é injetiva e identificamos seu domínio com sua imagem. Temos então

$$RU(\tilde{T}) \supset RU(T) = \mathbb{Z}[z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n]$$

Como $\tilde{T}$ e T são toros de mesma dimensão, eles têm anéis de representação isomorfos. Acontece aqui porém, que R_p não é sobrejetor. A descrição é a seguinte:

$$RU(\tilde{T}) = RU(T)[u]$$

sendo que u satisfaz a relação

$$u^2 = z_1 z_2 \dots z_n$$

É costume denotar u por $(z_1 z_2 \dots z_n)^{1/2}$ ou ainda por $z_1^{1/2} z_2^{1/2} \dots z_n^{1/2}$. Então

$$RU(\tilde{T}) = \mathbb{Z}[z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n, (z_1 z_2 \dots z_n)^{1/2}]$$

O grupo de Weyl W de $\text{Spin}(n)$ é isomorfo ao de $S(0)(n)$ e p comuta com as ações de W em $\bar{T}$ e T . Com a notação escolhida e o conhecimento da ação de W no caso $S(0)(n)$ temos as descrições correspondentes abaixo.

Spin (2n+1)

$$RU(\text{Spin}(2n + 1)) = \mathbb{Z}[\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1}, \Delta_{2n+1}]$$

onde λ^i é o i -ésimo polinômio simétrico elementar em $z_1, z_2, \dots, z_n, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n$. Δ_{2n+1} é a soma de todos os monômios na órbita de $(z_1, z_2 \dots z_n)^{1/2}$ pela ação do grupo de Weyl e pode ser expresso como

$$\Delta_{2n+1} = \prod_{i=1}^n (z_i^{1/2} + \bar{z}_i^{1/2})$$

Todos os geradores são irredutíveis, algebricamente independentes e vale a relação envolvendo λ^n

$$\Delta_{2n+1}^2 = \sum_{i=0}^n \lambda^i; \lambda^0 = 1$$

3.18 Observação

λ^i é a complexificada da i -ésima potência exterior da representação real $p : \text{Spin}(2n + 1) \rightarrow S(0)(2n + 1)$ canônica

Caso Spin (2n)

$$RU(\text{Spin}(2n)) = \mathbb{Z}[\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-2}, \Delta_{2n}^+, \Delta_{2n}^-]$$

onde λ^i é como anteriormente. Δ_{2n} se decompõe aqui, como soma de Δ_{2n}^+ e Δ_{2n}^- . Δ_{2n}^+ é a soma dos elementos na órbita de $(z_1 z_2 \dots z_n)^{1/2}$ pela ação do grupo de Weyl, que tem um número par de $\bar{z}_i^1$ s; Δ_{2n}^- o mesmo, com um número ímpar. Todos estes geradores são irredutíveis e algebricamente independentes. Temos as seguintes relações []. Pondo $\Delta_{2n}^\pm = \Delta^\pm$ temos

$$\Delta^+ \Delta^+ = \lambda_+^n + \sum_{i \geq 1} \lambda^{n-2i}$$

$$\Delta^- \Delta^- = \lambda_-^n + \sum_{i \geq 1} \lambda^{n-2i}$$

$$\Delta^+ \Delta^- = \lambda^{n-1} + \sum_{i \geq 1} \lambda^{n-2i-1}$$

3.19 Observação

λ^i é a complexificada da i -ésima potência exterior da representação real $p : Spin(2n) \rightarrow S0(2n)$ canônica.

3.20 Anel de representação de $Spin^c(n)$

O grupo $Spin^c(n)$ é definido pelo diagrama comutativo abaixo:

$$\begin{array}{ccc} Spin^c(n) & \subset & Spin(n+2) \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ S0(n) \times S0(2) & \subset & S0(n+2) \end{array}$$

isto é, $Spin^c(n)$ é o subgrupo de $Spin(n+2)$ obtido como imagem inversa de $S0(n) \times S0(2)$ pela aplicação canônica p . (veja também outra descrição de $Spin^c(n)$ nas páginas 44 e 45). $Spin^c(n)$ é um grupo de Lie compacto, conexo, tendo para toro maximal o mesmo de $Spin(n+2)$, $\bar{T} = p^{-1}(T)$, onde T é o toro maximal escolhido em $S0(n+2)$ e este é o mesmo toro maximal de $S0(n) \rightarrow S0(2)$. Como anteriormente, o grupo de Weyl de $Spin^c(n)$ é o mesmo de $S0(n) \times S0(2)$, isto é, se correspondem isomorficamente pela projeção p . O grupo de Weyl deste último é o subgrupo de $W(S0(n+2))$ que fixa o gerador z_{n+1} de $RU(\bar{T})$. Temos como antes dois casos

$$\underline{Spin^c(2n+1)}$$

$$RU(Spin^c(2n+1)) = \mathbb{Z}[\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1}, z_{n+1}, \bar{z}_{n+1} z_{n+1}^{1/2} \Delta_{2n+1}]$$

onde λ^i e Δ_{2n+1} são como no caso $Spin(2n+1)$ em (3.17).

Caso $Spin^c(2n)$

$$RU(Spin^c(2n)) = \mathbb{Z}[\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-2}, z_{n+1}, \bar{z}_{n+1}, z_{n+1}^{1/2} \Delta^+, z_{n+1}^{1/2} \Delta^-]$$

onde λ^i , Δ^+ e Δ^- são como no caso $Spin(2n)$ em (3.17).

3.21 Se considerarmos representações reais de G

$$G \rightarrow O(n)$$

ou G -módulos reais V , obteremos o anel de representação real de G , que denotamos por $R_0(G)$. Os anéis de representações real e complexo estão relacionados por dois processos familiares da álgebra linear, que são o de complexificação de um espaço vetorial real e de realificação de um espaço vetorial complexo.

Se V é complexo, para realificarmos, basta ignorarmos a ação do número complexo i em V , isto é considerarmos apenas a multiplicação por reais e obtemos em espaço vetorial real V_R . Se V é um G -módulo então V_R é também um G -módulo. Este processo preserva isomorfismos e produz um homomorfismo

$$U(n) \rightarrow O(2n)$$

Se W é real, sua soma direta $W + W$ também é real, mas aqui podemos introduzir a ação do número complexo i , assim

$$i(x, y) = (-y, x)$$

Esta ação se estende a uma ação de $\mathbb{C}$ em $W \oplus W$ que se torna então um espaço vetorial complexo que denotamos por $W_{\mathbb{C}}$. Se W é um G -módulo, então $W_{\mathbb{C}}$ também é um G -módulo. Este processo preserva isomorfismos e produz um homomorfismo.

$$O(n) \xrightarrow{c} U(n)$$

que corresponde a se considerar uma matriz real como sendo uma particular matriz complexa. Este processo é o mesmo que o dado pelo produto $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}^n$.

Vejamos o que acontece com as composições desses dois processos, rc e cr .

Se complexificarmos e em seguida realificarmos, obtemos de imediato que

3.22

$$(W_C)_R = W \oplus W$$

Se realificarmos primeiro e depois complexificarmos, obtemos

3.23

$$(V_R)_C = V \oplus \bar{V}$$

onde $\bar{V}$ é obtido de V trocando-se ação de i pela nova ação $i.x = -ix$. Chamamos $\bar{V}$ de conjugado de V . Observe que como grupo aditivo

$$V \oplus V = V_R \oplus V_R$$

mas a ação de i , imposta ao segundo membro, não provém daquele existente em V . Ao procurarmos os subespaços invariantes desta ação chegamos à decomposição (3.23). É oportuno observar aqui que se V é complexo com um produto escalar hermitiano, este determina um isomorfismo do conjugado de V com o dual de V , canônico

$$\bar{V} \equiv V^*$$

Portanto, a menos de isomorfismo, tomar o dual é o mesmo que trocar a ação de i por $-i$.

As operações r e c induzem homomorfismos aditivos e de anel respectivamente, que continuaremos a denotar com as mesmas letras

$$R0(G) \rightarrow RU(G)$$

$$RU(G) \rightarrow R0(G)$$

As identidades (3.22) e (3.23) se preservam aqui

3.24

$$rc(W) = 2W, cr(V) = V \oplus \bar{V}$$

onde $W \in R0(G)$, $V \in RU(G)$ e $\bar{V}$ é o homomorfismo involutivo, de anel, induzido pela conjugação.

3.25 Como $R(G)$, para um grupo de Lie compacto, é abeliano livre, concluímos que ambas aplicações r e c são injetivas. Procuramos então estudar $R0(G)$ mergulhado em $RU(G)$ por c . O que precisamos então é saber quando é que um elemento de $RU(G)$ está de fato em $R0(G)$, ou seja, é o complexificado de um real. O seguinte critério é dado em [1].

3.26 Critério

Para um grupo de Lie compacto G , a classe de um G -módulo complexo W está em $R0(G)$, se e somente se, W admite uma forma quadrática G -invariante, não degenerada.

Um esboço resumido da demonstração é o seguinte. Os G -módulos reais admitem uma tal forma, obtida por integração sobre G . A complexificação produz a forma desejada. A existência de uma tal forma ϕ em W , juntamente com um produto escalar hermitiano, nos permite definir uma aplicação $\mathbb{R}$ -linear.

$$T : w \rightarrow w \text{ por } \langle Tx, y \rangle = \overline{\varphi(x, y)}$$

Os subespaços próprios de T fornecem uma decomposição de W na forma do processo de complexificação.

Tem-se como consequência desse critério os seguintes fatos.

3.27 Os elementos de $R0(G) \subset RU(G)$ são autoconjugados, isto é, $W = \bar{W}$.

3.28 Se V é uma representação complexa de G , autoconjugada $\bar{V} = V$, então ela é a complexificada de uma real W , se e somente se $\lambda^2 V$ não contém fator trivial. ($\lambda^2 V$ é a segunda potência exterior de V).

Assim sendo, se conhecermos a decomposição de $\lambda^2 V$ em fatores irredutíveis, podemos decidir se V é de $R0(G)$.

Sejam $A \subset RU(G)$ as representações autoadjuntas, B o conjunto daquelas do tipo $V + \bar{V}$. A é subanel e $B \subset A$ é ideal em A . Considerando (3.25) e (3.26) temos as inclusões

$$B \subset R0(G) \subset A \subset RU(G)$$

que são, em geral, próprias.

3.29 Designemos por $H = A/B$. Como $2A \subset B$, H é uma álgebra sobre $\mathbb{Z}_2$.

3.30 No anel de representação de um toro

$$RU(T^n) = \mathbb{Z}[z_1, \bar{z}, z_1, \dots, z_n, \bar{z}_n]$$

a conjugação corresponde à passagem $z_i \rightarrow \bar{z}_i$ e, portanto as representações autoconjugadas são os polinômios invariantes por esta operação. Observe que a permutação

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n \rightarrow \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n, z_1, \dots, z_n$$

daqueles geradores tem exatamente o efeito da conjugação. Portanto se o grupo de Weyl de G inclui tal permutação, todas as representações de G serão autoconjugadas.

Com os fatos e comentários de acima em mente, damos abaixo, informações sobre a álgebra H e as representações reais em alguns casos:

$$3.31 \quad RU(U(n)) = \mathbb{Z}[\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n], \quad (3.12)$$

A álgebra H neste caso é polinomial nos geradores $\lambda^i \lambda^{n-i} / \lambda^n$, $2 \leq 2i \leq n$ e estes são todos reais.

$$3.32 \quad RU(SO(2n+1)) = \mathbb{Z}[\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n], \quad (3.14)$$

Neste caso, todas as representações são reais

$$3.33 \quad RU(SO(2n)) = \mathbb{Z}[\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1}, \lambda_+^n, \lambda_-^n] \quad (3.14)$$

Aqui, se n é par todas as representações são reais e se n é ímpar temos $\bar{\lambda}_+^n = \lambda_-^n$ logo, estas não são reais. Para n ímpar H é gerada por $\lambda^1, \dots, \lambda^{n-1}$ e estes geradores são reais.

$$3.34 \quad RU(Spin(2n+1)) = \mathbb{Z}[\lambda^1, \dots, \lambda^{n-1}, \Delta_{2n+1}] \quad (3.17)$$

Agora, λ^i é real para $1 \leq i \leq n-1$ e Δ_{2n+1} , embora seja autoconjugado, só será real para $n = 0$ ou $3 \pmod{4}$.

$$3.35 \quad RU(Spin(2n)) = \mathbb{Z}[\lambda^1, \dots, \lambda^{n-2}, \Delta_{2n}^+, \Delta_{2n}^-] \quad (3.17)$$

Ainda aqui λ^i é real para $1 \leq i \leq n-2$. Se n é divisível por 4 então Δ_{2n}^+ e Δ_{2n}^- são reais. Se n for ímpar ou apenas divisível por 2 então Δ_{2n}^- e Δ_{2n}^+ não serão reais.

Concluimos daí que

$$R0(Spin(n)) = RU(Spin(n)) \text{ para}$$

$$n = -1 \text{ ou } 1 \pmod{8}.$$

Referências bibliográficas

- [1] Adams, J.F., Lectures on Lie Groups, Benjamin N.Y. 1969.
- [2] Atiyah, M., Bott, R.; Shapiro, A.. Clifford Modules, *topolog* 3 Supp 1 (1964) 3-38.
- [3] Conde, A. Sobre as Classes de Atiyah Hirzebruch, de Thom, o problema do Mergulho e Variedades Flâmula. Tese de Livre-Docência, ICMC-USP 1979.
- [4] Conde, A, Fibrados de Clifford e Aplicações à Topologia via Operadores Elípticos ICMC-USP, 1988.
- [5] Conde, A., Operadores de Dirac em Variedades. X Encontro Brasileiro de Topologia, 1996.
- [6] Hirzebruch, F. Topological Methods in Algebraic Geometry, Springer-Verlag N.Y. 1966.
- [7] Husemoller, D. Fibre bundles, Springer-Verlag, 1993.
- [8] Lawson, H.B.; Miclelson, M. Spin Geometry, Princeton Math. Series 1989.
- [9] Milnor, J. Representation of Classical Groups, (preprint).