

and cannot be in the last row if $n \neq 2(\ell + 1)$.

— (18 de abril de 1995).

*Partially supported by grants from CNPq.

SOLUÇÕES PERIÓDICAS DA EQUAÇÃO DE LIENARD

HAMILTON LUIZ GUIDORIZZI

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP.

Com auxílio da família de funções

$$S_{\alpha,k}(x,y) = \int_0^x \frac{H(x,y,\alpha,k)}{\alpha s + 1} ds + \int_0^x g(u) du$$

onde

$$H(x,y,\alpha,k) = y + F(x) - \alpha G(x) - k,$$

$$F(x) = \int_0^x f(u) du \text{ e } G(x) = \int_0^x g(u) du,$$

são estabelecidas condições suficientes para existência de soluções periódicas bem como condições suficientes para estabilidade assintótica da origem da equação de Lienard $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$, onde f e g são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, satisfazendo condições que garantam unicidade de soluções, com $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$. Um dos resultados obtidos é o seguinte:

Teorema. Suponha que a origem seja repulsora e que existem constantes $\alpha > 0$, $k \leq 0$, $k_1 \geq 0$ e $a < 0 < b$ tais que:

- i) $F(x) \leq k_1$ para $a \leq x \leq 0$ e $F(a) \leq k_1 - \left[\left(k - \frac{1}{\alpha} - k_1 \right)^2 - 2G(a) \right]^{\frac{1}{2}}$
- ii) $F(x) \geq \alpha G(x) + k$ para $0 \leq x \leq b$ e $F(b) \geq k + \left[\left(\frac{1}{\alpha} + 2k_1 - 2k \right)^2 - 2G(b) \right]^{\frac{1}{2}}$.

Nestas condições a equação admite pelo menos uma solução periódica não trivial.

Exemplo. Consideremos a equação

$$\ddot{x} + \left[x^3 + 4x^2 + 3x - \frac{1}{12} \right] \dot{x} + x = 0.$$

Temos

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \frac{x}{12} \text{ e } G(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Tomando-se

$$k_1 = F(-1), \quad \alpha = 3 \text{ e } k = -\frac{1}{12},$$

existe $-1 < a < 0$ tal que $F(x) \leq k_1$, $a \leq x \leq 0$,

$$F(a) \leq k_1 - \left[\left(k - \frac{1}{\alpha} - k_1 \right)^2 - 2G(a) \right]^{\frac{1}{2}}$$

e $F(x) \geq \alpha G(x) + k$ para $x \geq 0$. De

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

segue existe $b > 0$ tal que

$$F(b) \geq k + \left[\left(\frac{1}{\alpha} + 2k_1 - 2k \right)^2 - 2G(b) \right]^{\frac{1}{2}}$$

A origem é evidentemente repulsora. Pelo teorema a equação admite pelo menos uma solução periódica não trivial. — (18 de abril de 1995).

HIPERBOLICIDADE GLOBAL DA RENORMALIZAÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES DO CÍRCULO

EDSON DE FARIA E WELINGTON DE MELO

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP.

A noção de renormalização desempenha um importante papel no estudo de propriedades estruturais finas de sistemas dinâmicos unidimensionais. Se $f: S^1 \rightarrow S^1$ é um homeomorfismo crítico de classe C^r sem pontos periódicos, definimos sua n -ésima renormalização $\mathcal{R}^n(f)$ como sendo a transformação de primeiro retorno de Poincaré ao intervalo de extremos $f^{qn}(c)$ e $f^{qn+1}(c)$ que contém o ponto crítico c . Temos desta forma um operador renormalização $\mathcal{R}: C^r \rightarrow C^r$. A conjectura central nesse contexto diz respeito à hiperbolicidade deste operador, e pode ser enunciada da seguinte forma. Por brevidade, consideramos aqui somente o caso analítico ($r = \omega$).

Conjectura. (Feigenbaum, Lanford, Rand) O operador renormalização $\mathcal{R}: C^\omega \rightarrow C^\omega$ possui um atrator global tipo *horseshoe*, isto é, existe $\mathcal{A} \subseteq C^\omega$ compacto e invariante sob $\mathcal{R}$ tal que: (a) $\mathcal{R}^n(f) \rightarrow \mathcal{A}$ para todo $f \in C^\omega$; (b) $\mathcal{R}|_{\mathcal{A}}$ é topologicamente conjugado ao shift bilateral em $(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{Z}}$ e (c) $\mathcal{R}|_{\mathcal{A}}$ é hiperbólico.

A existência de $\mathcal{A}$ com as propriedades (a) e (b) foi essencialmente estabelecida em trabalho anterior de um dos autores (E. de Faria, *Proof of universality for critical circle mappings*, Thesis, CUNY, 1992). No que diz respeito à hiperbolicidade, temos até o momento o seguinte resultado parcial.

Teorema. *Seja $g \in A$ com número de rotação de tipo limitado por $N > 0$. Então $DR(g)$ é um operador linear compacto com exatamente um autovalor expansivo e o restante do espectro inteiramente contido no disco $D(0; r)$, onde $0 < r < 1$ depende somente de N .*

A prova deste teorema utiliza certas técnicas holomorfas de D. Sullivan e resultados bastante recentes de C. McMullen, *Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle*, 1995. Este resultado tem importantes conseqüências, dentre as quais citamos apenas a seguinte.

Corolário. *Se $f, g \in C^r(r \geq 3)$ possuem o mesmo número de rotação α irracional de tipo limitado, então existe $0 < \beta < 1$ dependendo apenas de α tal que f e g são $C^{1+\beta}$ -conjugados.*

Continuamos investindo nossos esforços no sentido de estender estes resultados para qualquer número de rotação irracional, e não meramente aqueles de tipo limitado. — (18 de abril de 1995).

ATTRACTORS FOR PARABOLIC PROBLEMS WITH NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS IN FRACTIONAL POWER SPACES

SERGIO MUNIZ OLIVA¹ AND ANTONIO LUIZ PEREIRA²

¹*Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática e Estatística, USP.*

²*Departamento de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, USP.*

Let Ω be a bounded smooth domain of $\mathbb{R}^n$. In this work we consider reaction diffusion equations with dispersion of the form

$$\begin{cases} u_t = \text{Div}(a \nabla u) - \sum_{j=1}^n B_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} - \\ \quad - \lambda u + f(u), \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n_a} = g(u), \quad \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

where $a \in C^1(\bar{\Omega})$, $a(x) > m_0 > 0$, $x \in \Omega$, $\lambda > 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial n_a} = \langle a \nabla u, \vec{n} \rangle,$$

$\vec{n}$ is the outward normal and B_j is continuous in $\bar{\Omega}$, $j = 1, \dots, n$. Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be smooth functions, such that there exists ξ^0 such that, there are constants $c^0 = c^0(\xi^0)$ and $d^0 = d^0(\xi^0)$ with $\frac{f(s)}{s} < c^0$ and $\frac{g(s)}{s} < d^0$, for all $\xi^0 < |s|$ (the dissipative condition). Moreover,

given the eigenvalue problem

$$\begin{cases} -\text{Div}(a \nabla v) + \sum_{j=1}^n B_j(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} + \\ \quad + \lambda v - c_0 v = \mu v, \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial n_a} = d_0 v \quad \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

we will assume that c^0 and d^0 are such that the principal eigenvalue (one with smaller real part) of the problem (2) is positive.

Observe that our dissipation condition on the equation allow either c_0 or d_0 to be positive. In other words, we allow either f or g to be a source of heat.

It has been shown by C. V. Pao [Asymptotic Behavior and Nonexistence of Global Solutions for a Class of Nonlinear Boundary Value Problems of Parabolic Type, *Journal of Math. Anal. and Appl.*, **65** (1978), 616-637] that if f is a source of heat and if $g = 0$ then we have blow up in finite time. Our aim here is to control the increase of heat by means of a dissipative flux through the boundary. To accomplish this goal we need to introduce some kind of "competition" between f and g . The condition on c_0 and d_0 is a precise formulation of this "competition" between f and g .

Our goal is to prove that this competition between f and g is sufficient to assure the existence of global attractors. To accomplish this we will work in $L^p(\Omega)$, for a suitable choice of $1 < p < \infty$, instead of $L^2(\Omega)$, and then follow the general approach developed by H. Amann [Semigroups and Nonlinear Evolution Equations, *Linear Algebra and its Appl.*, **84** (1986), 3-32] and [Parabolic Evolution Equations and Nonlinear Boundary Conditions, *Journal of Diff. Eq.*, **72** (1988), 201-269]. The main difference is that, in our approach, instead of working in the Sobolev spaces $W^{k,p}(\Omega)$, we work in the fractional power spaces associated to the operator defined by the linear part of (1) with homogeneous boundary conditions. These fractional power spaces turn out to be the so called "Lebesgue Spaces" $H_p^s(\Omega)$ (see H. Triebel [Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, North-Holland, Amsterdam, 1978], for a general discussion about these spaces and their relation with differential operators and interpolation theory). In this way we are able to use the well developed theory of sectorial operators as described, for example, in D. Henry [Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, *Lectures Notes in Mathematics*, **840**, Springer-Verlag, 1981]. This ap-