In: Simpósio Nacional de Estudos Tectônicos, 10 International Symposium on Tectonics, 4 Boletim de Resumos Expandidos. 2005, Curitiba.

1450742

UTILIZAÇÃO PRÁTICA DE TENSORES DE DEFORMAÇÃO: CÁLCULOS DE EXTENSÃO E ENCURTAMENTO A PARTIR DE MEDIDAS DE STRAIN

Ginaldo A. da C. Campanha

Instituto de Geociências da USP, ginaldo@usp.br

1. INTRODUÇÃO

A análise da deformação na sua forma mais geral é uma tarefa matematicamente complexa e laboriosa. Algumas abordagens diferentes para a questão têm sido adotadas na literatura.

Um caminho é o adotado por livros como Ramsay (1967) e Jaeger (1969), de grande influência no meio da geologia estrutural, que é o de evitar o desenvolvimento matemático do assunto por meio de matrizes e tensores, preferindo o desmembramento em equações algébricas usuais. Este tipo de abordagem tem sido bem sucedido quando se adota algumas simplificações ou casos especiais. Como por exemplo, a restrição da análise a uma situação bidimensional, à qual a deformação em três dimensões pode ser reduzida quando um dos eixos principais não sofre deformação (caso em geral denominado como deformação plana, tal como o cisalhamento simples e o cisalhamento puro), ou quando duas deformações principais são iguais (deformação bi-axial). Outra simplificação usualmente feita é adotar-se um sistema de referência paralelo aos eixos principais de deformação, eliminando-se assim a componente de rotação desses eixos. As equações do círculo de Mohr por exemplo adotam este último tipo de pressuposto.

Porém, quando se procura analisar a deformação em três dimensões, sem este tipo de restrição, torna-se necessário manipular sistemas com até dezenas de equações, com até dezenas de termos cada uma, dificultando ou mesmo inviabilizando a análise. Neste caso a ferramenta matemática mais adequada é o uso de matrizes e tensores. Este é o caminho adotado por exemplo por Nye (1957), Means (1976), Oertel (1996), Ramsay & Lisle (2000) e, em um nível mais avançado, por Malvern(1969) e Truesdell & Toupin (1960).

Antes do advento dos computadores, as ferramentas matemáticas do cálculo tensorial eram de relativa pouca aplicação prática, em função do caráter extremamente laborioso das operações necessárias, envolvendo procedimentos como multiplicação e inversão de matrizes, cálculo de autovalores e autovetores, etc. Hoje, em qualquer linguagem de programação, e mesmo com planilhas eletrônicas, fazer operações com matrizes e cálculos repetitivos é relativamente simples. No presente caso desenvolveu-se planilhas e rotinas com o programa *Mathcad Professional* versão 8, disponível na USP. Estas rotinas estão disponíveis em: www.igc.usp.br/pessoais/ginaldo

2. ANÁLISE TENSORIAL DE DEFORMAÇÃO

A *deformação finita* é definida pela comparação da forma geométrica dos corpos em dois estados: um *inicial*, antes da deformação, e outro *final*, após a deformação. Uma deformação genérica pode ser decomposta em termos de quatro componentes: *translação de corpo rígido*, *rotação de corpo rígido*, *distorção de forma* e *variação de volume*.

A deformação pode ser analisada pela variação da posição dos pontos que compõem um corpo entre os estados inicial e final. Pode-se discriminar as posições finais (x_1,x_2,x_3) dos pontos que compõem o *continuum* dos corpos em função de suas posições iniciais (X_1,X_2,X_3). Na deformação homogênea, essas funções serão equações lineares, na forma geral:

$$x_1=aX_1+bX_2+cX_3+t_1$$
$$x_2=dX_1+eX_2+fX_3+t_2$$
$$x_3=gX_1+hX_2+iX_3+t_3$$

onde t_1, t_2, t_3 são componentes de translação ao longo dos eixos 1, 2, 3 e poderão normalmente ser desprezados. As equações acima podem ser, então, escritas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

E de forma compacta: $\mathbf{x}=\mathbf{F}\times\mathbf{X}$

Com os símbolos em negrito representando matrizes. A matriz **F**, chamada matriz de transformação, representa a deformação, e será no caso genérico assimétrica.

A variação de volume é igual ao determinante de **F**.

A componente simétrica, não rotacional da deformação, a qual abrange a distorção de forma (comumente chamada de *strain*), pode ser obtida através do cálculo de diversos tipos de *tensores de deformação* descritos na bibliografia.

Utiliza-se aqui os *tensores de extensão* (*strech*). Dada uma matriz **F**, assimétrica, representando uma deformação geral, esta pode ser decomposta como

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}.\mathbf{R}$$

onde **V** é uma matriz de transformação 3 X 3 simétrica positiva, denominada *tensor de extensão esquerdo* (**V**), e **R** é uma matriz de transformação 3 X 3 assimétrica denotando uma rotação de corpo rígido.

O tensor de extensão esquerdo está associado ao estado deformado, e é definido como: $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F}.\mathbf{F}^T}$ onde $\mathbf{F}^T$ é a matriz transposta de **F**.

A extensão de linhas é dada pela relação $S = l_f / l_i$ onde l_f é o comprimento final e l_i o comprimento inicial da linha. Sendo a orientação da linha dada pelo vetor unitário **l** (o qual pode ser definido pelos cossenos diretores dessa linha) no estado deformado, a extensão S da linha será:

$$S = \mathbf{l}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{l}$$

Os valores de S tomados em todas as direções definem o elipsóide de deformação finita. O cálculo dos *autovetores* de **V** fornecerá os eixos principais de deformação no estado final. O cálculo de seus *autovalores* fornecerá as extensões principais (S_1, S_2, S_3), que correspondem ao tamanho dos semi-eixos do elipsóide de deformação.

A matriz **R** representa uma de transformação que produz a rotação das linhas que compõem os eixos principais de deformação, entre o estado inicial, antes da deformação, e o final, após a deformação. Caso a deformação seja não-rotacional, ou seja, os eixos principais tenham a mesma orientação antes e depois da deformação, **R** será a matriz unitária, e **F=V**.

A matriz de rotação **R** pode ser dada em função de **F**: $\mathbf{R}=\mathbf{V}^{-1}\times\mathbf{F}$ onde $\mathbf{V}^{-1}$ é a matriz inversa de **V**.

Como um dos objetivos da obtenção de dados de *strain* é realizar sua integração sobre uma determinada região, é interessante referir-se o tensor de extensão para as orientações geográficas. Por exemplo, adotaremos aqui o eixo de referência x_1 no sentido positivo orientado para o leste, o x_2 para o norte, e o x_3 vertical para cima.

Na prática, dispondo-se dos valores principais de extensão e suas orientações, obtidas a partir de medidas de *strain* (métodos tais como os de Fry, R_F/f, etc.), pode-se montar uma matriz $\mathbf{V_O}$ com os valores principais de extensão na diagonal principal. Esta matriz representa o tensor de extensão no estado deformado, porém com relação a um sistema de referência cujos eixos são os próprios eixos principais do elipsóide.

$$\mathbf{V}_0 = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}$$

Para referir-se as extensões para o sistema geográfico, é necessário fazer-se uma rotação dos eixos de referência (transformação de coordenadas para tensores de segunda ordem), na qual usar-se-á as orientações dos eixos principais de deformação obtidos, descritas como cossenos diretores com relação ao sistema geográfico.

Os cossenos diretores (l, m, n) de uma linha podem ser calculados a partir do seu azimute e de seu caimento (*plunge*), no sistema de referência aqui adotado, pelas seguintes relações:

l = cos (plunge) . sen (azimute) m = cos (plunge) . cos (azimute) n = sen (plunge)

Deve-se então montar uma matriz de transformação com os cossenos diretores (l,m,n) das direções principais do elipsóide de deformação obtidas por medidas *strain*:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}$$

onde os subscritos indicam os eixos principais de deformação 1, 2, 3.

O tensor de extensão $\mathbf{V_G}$ referido ao sistema geográfico será, pela regra da transformação de tensores de segunda ordem (Nye, 1957): $\mathbf{V_G} = \mathbf{A}\times\mathbf{V_O}\times\mathbf{A}^T$ o qual terá os mesmos autovalores (extensões principais) que $\mathbf{V_O}$, e seus autovetores darão as orientações dos eixos principais de deformação com relação às direções geográficas.

Na tabela 1 mostra-se um exemplo dos resultados da aplicação desses cálculos, realizados com o programa MathCad, a partir de medidas de strain disponíveis em Campanha & Sadowski (2002).

A partir dos tensor de extensão assim podem ser feitas diversas outras manipulações, como cálculos da extensão / encurtamento numa determinada direção, da elipse de deformação para um plano determinado (por ex., o plano horizontal, ou o plano vertical NS).

Um dos objetivos da realização de determinações de strain finito nas rochas é, entre outros, a tentativa de recuperar a configuração geométrica dos corpos geológicos antes da deformação.

Como exemplo calculou-se as extensões horizontais na direção NW ao longo do perfil Apiaí a Iporanga (SP), a partir de dados de *strain* de Campanha & Sadowski (2002).

Analisando-se o perfil geológico NW em 1:50.000 através da área (Campanha, 1991) verifica-se que os valores obtidos são compatíveis com a análise do comprimento das camadas dobradas *versus* o comprimento do perfil.

Ressalte-se que estes procedimentos são necessários porque está se trabalhando com deformações em três dimensões, tendo ocorrido de um modo geral fluxo em direções perpendiculares ou oblíquas à seção que se deseja analisar

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAMPANHA, G. A. C. 2003 *O papel do sistema de zonas de cisalhamento transcorrentes na configuração da porção meridional da Faixa Ribeira.* (Tese de Livre Docência junto ao Instituto de Geociências da USP)

CAMPANHA, G. A. da C. (1991) *Tectônica Proterozóica no Alto e Médio Vale do Ribeira, Estados de São Paulo e Paraná*. São Paulo, 296 p. (Tese de Doutorado – Instituto de Geociências Universidade de São Paulo).

CAMPANHA, G.A.C.; SADOWSKI, G.R. 2002. Determinações da Deformação Finita em Metassedimentos da Faixa Ribeira. *Revista Brasileira de Geociências*, v. 32 , nº 1.

JAEGER, J.C. (1969) *Elasticity, fracture and flow, with engineering and geological applications*. London, Methuen. 268p.

MALVERN, L.E. (1969) *Introduction to the mechanics of a continuos medium*. Englewood, Prentice-Hall . 713p.

MEANS, W.D. (1976) *Stress and strain: basic concepts of continuum mechanics for geologists*. New York, Springer-Verlag. 339p.

NYE, J.F. (1957) *Physical properties of crystals: their representation by tensors and matrices*. Oxford, University Press. 322p.

OERTEL, G. (1996) *Stress and deformation: a handbook on tensors in geology*. Oxford, University Press. 292p.

RAMSAY, J.G.; LISLE, R.J. (2000) *The techniques of modern structural geology: Applications of continuum mechanics in structural geology*. New York, Academic Press. v.3

RAMSAY, J.G. (1967). *Folding and fracturing of rocks*. New York, McGraw-Hill. 568 p.

TRUESDELL, C.;TOUPIN, R.A. (1960) The classical field theories. In: FLÜGGE, S. *Encyclopedia of Physics - principles of classical mechanics and field theory*. Springer-Verlag. v.III/I