Eine spielerische Reise in die geometrische Topologie

Ton Marar

Eine spielerische Reise in die geometrische Topologie

Springer Spektrum

Ton Marar
ICMC
University of São Paulo at São Carlos
São Carlos, São Paulo, Brazil

ISBN 978-3-031-56104-7 ISBN 978-3-031-56105-4 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-031-56105-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über https://portal.dnb.de abrufbar.

Übersetzung der englischen Ausgabe: „A Ludic Journey into Geometric Topology“ von Ton Marar, © The Editor(s) (if applicable) and The Author(s), under exclusive license to Springer Nature Switzerland AG 2022. Veröffentlicht durch Springer International Publishing. Alle Rechte vorbehalten.

Dieses Buch ist eine Übersetzung des Originals in Englisch „A Ludic Journey into Geometric Topology“ von Marar, Ton, publiziert durch Springer Nature Switzerland AG im Jahr 2022. Die Übersetzung erfolgte mit Hilfe von künstlicher Intelligenz (maschinelle Übersetzung). Eine anschließende Überarbeitung im Satzbetrieb erfolgte vor allem in inhaltlicher Hinsicht, so dass sich das Buch stilistisch anders lesen wird als eine herkömmliche Übersetzung. Springer Nature arbeitet kontinuierlich an der Weiterentwicklung von Werkzeugen für die Produktion von Büchern und an den damit verbundenen Technologien zur Unterstützung der Autoren.

Planung/Lektorat: Robinson dos Santos
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Nature Switzerland AG und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland

Das Papier dieses Produkts ist recycelbar.

An Agnaldo Aricê Caldas Farias, Lehrer

Geleitwort

In der Geschichte des westlichen Denkens geht die Geometrie Hand in Hand mit der Philosophie. Aus einer Handvoll Techniken, die laut Herodot um 1300 v. Chr. von den Landvermessern des Niltales erfunden wurden, wurde sie über Jahrhunderte hinweg zur Brücke zwischen der Welt der Ideen und der Welt der Dinge. In ihrer Gesamtheit ist diese Disziplin facettenreich und deckt ein Spektrum an Theorien auf, die alle auf die Notwendigkeit hinweisen, den physischen Raum in seinen vielfältigsten Aspekten darzustellen und zu studieren.

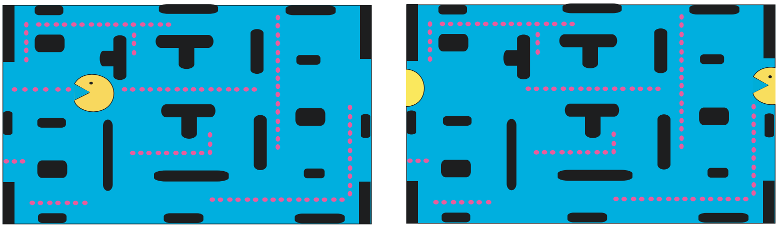
Ton Marar, der Autor dieses Buches, führt uns an der Hand durch die komplexen Pfade dieser alten Wissenschaft, die heutzutage unverzichtbar für das Verständnis unseres Universums ist. In diesen modernen theoretischen Wunderwerken findet der neugierige Leser viele Juwelen, wie die Klassifizierung der platonischen Körper und die der Flächen, das Konzept der Orientierbarkeit und viele andere Ideen und Anregungen für zukünftige Reisen in ein faszinierendes, aber sicherlich unwegsames Gebiet.

São Carlos, Brazil
February 2022

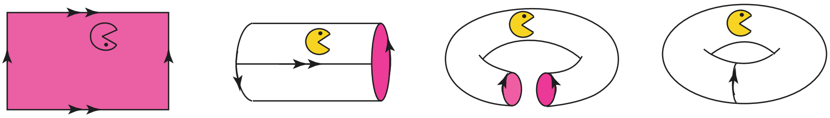
Igor Mencattini

Vorwort

In dem berühmten Videospiel der 1980er Jahre bewegt sich die Figur Pac-Man auf einem rechteckigen Bildschirm in zwei senkrechten Richtungen, nach unten oder oben und nach links oder rechts. Pac-Mans Universum ist zweidimensional, und er weiß daher nicht, wie es ist, sich nach vorn oder nach hinten zu bewegen. Darüber hinaus erscheint Pac-Man, wenn er den linken Rand des Bildschirms überquert, auf der gleichen Höhe am rechten Rand. Ähnliches passiert, wenn er die horizontalen Ränder überquert.



Pac-Mans zweidimensionale Welt ist in eine Fläche ohne Grenze eingebettet, eine endlose Fläche in Form eines Donuts. Diese Fläche oder Oberfläche wird als Torus bezeichnet.



Wie könnte Pac-Man die torische Form seiner Welt verstehen? Für ihn ist die dritte Dimension ein esoterischer Raum. Er kann seine zweidimensionale Welt nicht verlassen und sie im dreidimensionalen Raum genießen, so wie wir es tun. Pac-Man ist auf seine zweidimensionale Welt beschränkt, und die einzige Chance für ihn, die Form seiner Welt zu verstehen, liegt in der Deduktion, einer intellektuellen Aktivität jenseits der physischen Wahrnehmung.

Unsere Situation ist nicht viel anders. Wir wissen wenig über die Form des Universums, in dem wir leben. Ist unser Universum unendlich? Wenn es endlich ist, darf es keine Grenze haben, den sonst käme die Frage „was ist jenseits der Grenze?“

Es gibt keine Möglichkeit, dieses Universum zu verlassen, um seine Form von außen wahrzunehmen, wie wir es mit der Welt von Pac-Man getan haben. Wir werden die Form des Universums ableiten müssen.

Um dieses große Rätsel zu lösen, ist Mathematik, oder genauer gesagt Geometrie, grundlegend.

Es war einfach, die Form von Pac-Mans Universum zu bestimmen. Wir mussten nur einige physische Informationen aus dieser Welt sammeln, was bedeutete, die vertikalen Kanten und die horizontalen Kanten des Rechtecks zusammenzufügen, in dem Pac-Man sein Leben führt. Dann haben wir durch eine zusätzliche Dimension schließlich die Form von Pac-Mans zweidimensionaler Welt ohne Grenze sehen können.

Analog dazu würde es aufgrund der Dreidimensionalität unseres Universums mindestens eine zusätzliche Dimension erfordern, um seine Form *sehen* zu können: eine vierte Dimension.

In diesem Buch wird gezeigt, wie man eine gewisse Sensibilität entwickelt, um bestimmte dreidimensionale Objekte ohne Grenze zu sehen, die wir Hyperflächen nennen.

Ist unser Universum eine Hyperfläche? Astrophysiker haben die Aufgabe, das Universum geometrisch zu beschreiben, und einige von ihnen glauben, dass das Universum durch eine Hyperfläche modelliert wird, wie beispielsweise Jean-Paul Luminet 2003 in einem Aufsatz in ***Nature*** über „dodekaedrische Raumtopologie“ und die „Mikrowellen-Hintergrundstrahlung“ beschreibt.

Wenn eines Tages die Hypothese bestätigt wird, dass unser Universum tatsächlich eine Hyperfläche ist und wir eine Liste aller möglichen Formen dreidimensionaler Objekte haben, dann können wir mit einigen physikalischen Informationen endlich die Form des Universums ableiten – wer weiß?

In Kap. 1 befassen wir uns mit mathematischen Modellen, die Allegorien sind, die es erlauben, die abstrakte Mathematik zur Interpretation von Phänomenen und zur Lösung von Problemen zu verwenden.

Kap. 2 beschreibt, wie platonische und keplersche Theorien versuchen, das Universum mit einer Mischung aus Mathematik und Glauben zu erklären.

Eine kurze Darstellung von Geometrien aus der Sicht von Felix Klein findet sich in Kap. 3.

Kap. 4 bietet eine Einführung in die Topologie als einer Art von Geometrie. Wir präsentieren die Klassifizierung von endlich großen, randlosen zweidimensionalen Objekten, die als geschlossene Flächen bezeichnet werden. Diese Flächen werden in zwei Klassen unterteilt, nämlich orientierbare und nicht orientierbare. Die ersten haben zwei Seiten, sie definieren ein Inneres und ein Äußeres, während die anderen, die nicht orientierbaren, alle ein Möbiusband enthalten, das eine einseitige Fläche ist.

Es gibt mehrere Wissensbereiche, die die topologische Klassifizierung von geschlossenen Flächen nutzen. Am 3. Oktober 2016 wurde der Nobelpreis für Physik an ein Trio von britischen Materialwissenschaftlern verliehen. In ihrer Arbeit über topologische Phasenübergänge und topologische Phasen der Materie werden bestimmte exotische Materiezustände (jenseits von fest, flüssig und gasförmig) beschrieben, die bei extremen Temperaturen auftreten. Die Autoren verwenden in ihrer Forschung die topologische Klassifizierung geschlossener Flächen. Ihr praktisches Ergebnis ist eine Reihe neuer supraleitender Materialien.

Bei der Klassifizierung geschlossener Flächen wird die Schwierigkeit deutlich, eine topologische Klassifizierung von Hyperflächen zu erhalten. Diese geometrischen Objekte existieren in hochdimensionalen Räumen mit mindestens vier Dimensionen. Deshalb wird in Kap. 5. die vierte Dimension eingeführt.

Dreidimensionale Modelle von nicht orientierbaren geschlossenen Flächen werden in Kap. 6 behandelt, während das letzte Kapitel einige Hyperflächen-Modelle diskutiert.

Ich möchte meinen Studentinnen und Studenten aus dem Fachbereich Mathematik für Architektur im Studiengang Architektur und Urbanismus an der IAU-USP, São Carlos, Brasilien, danken, die mich jahrzehntelang motiviert haben, dieses Buch zu schreiben. Dank gebührt auch vielen meiner Kollegen, darunter Carlos Martins, David Sperling und Marcelo Suzuki von der IAU-USP; Tiago Pereira, Igor Mencattini, Farid Tari und Ali Tahzibi vom ICMC-USP; Flávio Coelho und Paolo Piccione vom IME-USP; Stefano Luzzatto vom ICTP, Triest; und Robinson dos Santos und Martin Peters von Springer. Die Präsentation mehrerer Kapitel hat sich erheblich verbessert, nachdem Alessandra Pavesi das Buch sorgfältig gelesen hat, wofür ich ihr ewig dankbar bin.

São Carlos, Brasilien — Ton Marar
Februar 2022

Inhaltsverzeichnis