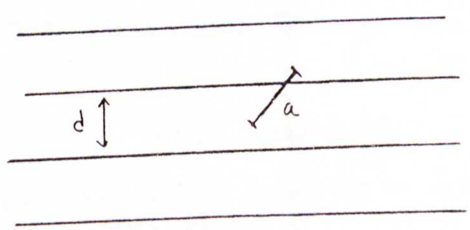
Probabilidade Geométrica.

C.E. Harle

De uma maneira muito informal podemos dizer que a teoria das probabilidades geometricas se ocupa de espaços amostrais cujas ocorrencias são figuras geometricas. Em geral os espaços amostrais que se apresentam são continuos e as densidades de probabilidade satisfazem a certas condições de uniformidade.

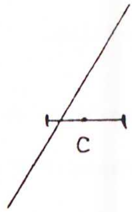
O inicio do estudo de figuras geométricas aleatórias data de 1733, com o famoso problema da agulha de Buffon. No plano são traçadas retas paralelas, igualmente espaçadas e em número infinito. Um segmento de comprimento constante e inferior à distancia entre duas paralelas consecutivas é lançado " ao acaso" sobre o plano, deseja se saber qual a probabilidade de o segmento cortar uma das retas traçadas. Sendo p esta probabilidade , a o comprimento do segmento e d a distancia entre duas paralelas consecutivas, Buffon encontrou a relação:

$$p = \frac{2a}{\pi d}$$



Apresentarems aqui uma solução de uma das inúmeras variantes desse problema. Seja D um disco do plano com raio r e centro C. Consideremos ainda um segmento de comprimento a com a r e cujo ponto medio é C. Podemos então formular o seguinte problema:

Dada uma distribuição aleetória de retas do plano que cortam o disco D , determinar a probabilidade para que uma dessas retas corte o segmento dado.



Evidentemente a resposta depende da distribuição de probabilidade adotada. Dentre todas as distribuições possíveis, há uma caracterizada pela seguinte propriedade:

Para todo subconjunto Lebesgue mensurável $A \subseteq D$ e toda isometria T do plano tal que $T(A) \subseteq D$, a probabilidade de uma reta cortar A é a mesma de cortar $T(A)$. Diz se que esta distribuição de probabilidade é uniforme relativamente às isometrias do plano.

Indiquemos por E ao conjunto de todas as retas do plano que cortam o disco D. Este será o espaço amostral sobre o qual devemos definir uma probabilidade satisfazendo à condição mencionada acima. Seja ainda α uma semi reta de extremidade C e que contem uma das extremidades do segmento dado.

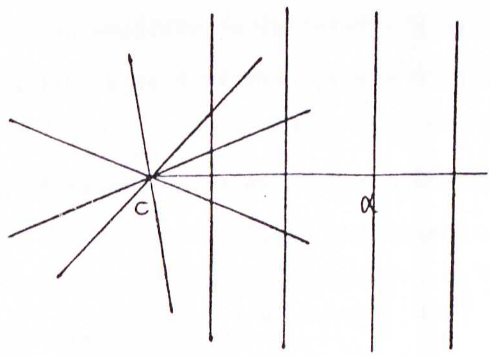
Escrevemos agora

$$E = F - (S_1 \cup S_2)$$

onde S_1 e S_2 são os subconjuntos de E definidos por:

S_1 : Conjunto das retas do plano que passam pelo ponto C.

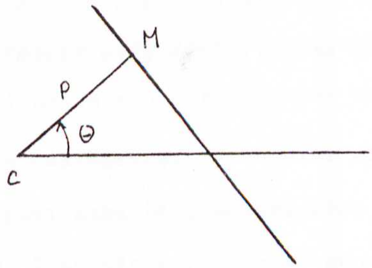
S_2 : Conjunto das retas que cortam a semi-reta e são ortogonais a esta.



A seguir consideramos a correspondencia bi-univoca entre o retangulo de R^2:

$$K =]0\,,\ r[\ \times\ ]0\,,\ 2\pi[$$

e o subconjunto F de E , dada pela aplicação que a cada par ordenado $(p, \theta) \in K$ associa a reta cuja distancia ao ponto C é p e sendo M o ponto da reta de menor distancia a C, o ângulo de α e CM é θ .



Um evento de F é por definição a imagem de um subconjunto Lebesgue mensurável de K, pela aplicação definida acima. Toda densidade de probabilidade f em K permite definir uma probabilidade em F :

$$P(A) = \int_{A'} f\ dp\,d\theta$$

onde $A' \subseteq K$ é tal que a sua imagem é A . Essa probabilidade pode ser estendiada a E de tal modo que os subconjuntos S_1 e S_2 tenham medida nula.

A seguir vamos determinar a densidade de probabilidade f de tal modo que a probabilidade correspondente P seja uniforme no sentido definido anteriormente.

Dado um subconjunto Lebesgue mensurável A D , indicaremos por $\hat{A}$ ao subconjunto de E definido por:

$$\hat{A} = \{ v \in E \mid v \cap A \neq \emptyset \}$$

Seja agora T uma isometria do plano (produto de rotação por translação) tal que $T(A) \sqsubseteq D$. Nessas condições a uniformidade de P se exprime por:

$$P(\hat{A}) = P(T(A))$$

para quaisquer A e T satisfazendo às condições acima.

Lembremos agora o fato elementar de que toda isometria do plano pode ser escrita como o produto (composta) de uma translação por uma rotação com centro C (centro do disco D). Em vista desse fato é apenas necessário que a condição acima se verifique para translações e rotações em torno de C.

Se h é uma reta de F representada por $(p,\theta) \in K$ e T é uma translação do plano então a reta imagem T(h) será representada pelo par $(p+t \, , \, \theta)$ onde t é uma constante que depende somente de T. Por outro lado se T for uma rotação com centro C e angulo φ, a reta T(h) será representada pelo par $(p, \theta+\varphi)$

Com isto vemos que as condições de uniformidade de P é equivalente a:

$$f(p+t \, , \, \theta) = f(p,\theta) \quad e \quad f(p, \theta+\varphi) = f(p,\theta)$$

e estas por sua vez nos mostram que f deve ser constante.

Vemos assim que a probabilidade uniforme P é dada por:

$$P(A) = \frac{1}{2\pi r} \int_A dp\,d\theta$$

Aqui desejamos fazer a observação que a representação das retas pelas coordenadas p, θ permite reduzir o problema da geração aleatoria de retas que cortam o disco D à geração aleatória de pontos no retangulo K e estes ultimos pdem ser gerados atraves da geração aleatória de pontos nos intervalos $]0, r[$ e $]0, 2\pi[$.

Voltemos então ao problema da agulha de Buffon. O evento cuja probabilidade devemos determinar é :

$$B = \left\{ (p,\theta) \;\middle|\; p \leqslant \frac{a}{2} \cos\theta \right\}$$

Um cálculo simples de integrais nos dá:

$$P(B) = \frac{a}{\pi r}$$

Levando em conta a uniformidade da probabilidade P e o resultado acima podemos enunciar:

Seja I um segmento de comprimento a situado no interior do disco D. Então a probabilidade (uniforme) para que uma reta corte o segmento I vale $\frac{a}{r}\pi$.

Podemos interpretar esta relação como uma definição probabilistica do comprimento do segmento I :

$$a = r\, P(B)$$

e assim temos um processo aleatório para a estimativa desse comprimento.

Vamos agora examinar um problema intimamente ligado às considerações feitas. Consideremos um numero finito de segmentos

$$I_1, \ldots\, I_n$$

situados no interior do disco D.e seja X a variaável aleatória:

$$X : E \longrightarrow R$$

que a cada reta $\nu \in E$ associa o número de elementos do conjunto

$$\left(\bigsqcup_{k=1}^{m} I_k\right) \cap \nu$$

Vale então o seguinte:

A esperança matemática da variável aleatória X é dada por

$$E(X) = \frac{a}{\pi r}$$

onde a denota a soma dos comprimentos dos segmentos dados.

Lembrando que a media aritmetica de valores observados de uma variável aleatória nos permite estimar os vlores dessa variável, temos uma maneira de estimar o comprimento total a dos segmentos.

Daremos a demonstração desse fato no caso particular n=2 para não tornar esta exposição demasiadamente tecnica. Consideremos então os eventos:

A_1 : conjunto das retas que cortam o segmento I_1

A_2 : conjunto das retas que cortam o segmento I_2

O evento $A_1 \cap A_2$ será o conjunto das retas que cortam I_1 e I_2.

Sobre o conjunto $A_1 \cap A_2$ a variável aleatoria X tem valor constante igual a 2 . Sobre os conjuntos $A_1 - (A_1 \cap A_2)$ e $A_2 - (A_1 \cap A_2)$ o valor de X é igual a 1. Com isto vemos que a esperança matemática de X é dada por:

$$E(X) = 1\,P(\,A_1 - (A_1 \cap A_2)) + 2P(\,A_1 \cap A_2\,) \;+\; 1.P(A_2 - (A_1 \cap A_2))$$

ou ainda

$$E(X) = P(A_1) + P(A_2)$$

o que prova o resultado.

Distribuições Uniformes

A existencia de diversas relações entre conceitos geometricos deve se ao carater invariante da probabilidade por certas ransformações geometricas . No exemplo considerado anteriormente essas transformações são as rotações e translações do plano.

O papel essencial dessa invariança foi decoberto por Poincaré, a quem se deve a formulação geral desse conceito.

Consideremos um espaço de medida E e uma medida definida sobre μ este espaço. Seja U um subconjunto de E que pode ser representado biunivocamente sobre uma região do espaço R^n. Suporemos ainda que a medida μ_U (restrição de a U) possa ser definida por:

$$\mu_U(A) = \int_A f \, dx_1 \ldots dx_n$$

Seja T uma transformação de E tal que esta e sua inversa T^{-1} preservam mensurabilidade. A medida é dita invariante por T se para todo conjunto μ- mensurável A vale

$$\mu(A) = \mu(T(A))$$

A medida μ é dita invariante por um grupo G de transformações T do tipo acima se for invariante por cada uma das transformações do grupo.

No que se segue supomos que o grupo G seja transitivo isto é dados dois pontos quaisquer x , y de E , existe pelo menos uma transformação T deste grupo tal que $T(x) = y$.

Vamos tambem supor que se $x \in U$ e $T(x) \in U$, a transformação T é dada em uma vizinhança de x pelas expressões:

$$y_i = F_i(x_1, \ldots x_n) \quad , \; i \; 1, \ldots n$$

onde as F_i são funções reais diferenciáveis.

Para todo subconjunto Lebesgue mensurável $A \sqsubseteq U$ e toda transformação T do grupo G , tal que $T(A) \sqsubseteq U$ temos:

$$\mu_U(T(A)) = \int_{T(A)} f \, dx_1 \ldots dx_n$$

Pelo teorema de mudança de variável temos

$$\mu_U(T(A)) = \int_A f \circ T \, |J(T)| dx_1 \ldots dx_n$$

onde J(T) denota o determinante jacobiano

$$\frac{\partial (y_1 \ldots y_n)}{\partial (x_1 \ldots x_n)}$$

Vemos então que se a função densidade f satisfaz a

$$f \circ T \; |J(T)| = f(x)$$

para todo ponto x de U e toda transformação T de G com $T(x) \in U$, a medida μ_U satisfaz a

$$\mu_U(A) = \mu_U(T(A))$$

Mostraremos agora como a propriedade da função densidade mencionada acima permite que se construa esta função a partir do grupo G.

Fixemos de uma vez por todas um ponto $x_0 \in U$. Para todo ponto y de U sabemos que existe pelo menos uma transformação T de G tal que $y = T(x_0)$.

Vamos definir então o valor f(y) por

$$f(y) = \frac{1}{|J(T)_{x_0}|} \cdot f(x_0)$$

Essa construção somente faz sentido se o segundo membro não depender da transformação T que leva x_0 em y .

Em outras palavras se T e S são duas transformações de G que levam x_0 em y então deve valer

$$|J(T)_{x_0}| = |J(S)_{x_0}|$$

Esta relação é evidentemente equivalente a

$$|J(TS^{-1})_{x_0}| = 1$$

Consequentemente se o grupo de transformações G satisfaz à condição:

"Se T é uma transformação de G tal que $T(x_0)\ \ x_0$ então $|J(T)_{x_0}| = 1$",

teremos uma bem definida função f (a menos do fator $f(x_0)$) que satisfaz à condição de invariança:

$$f \cdot T\ (x) \, |J(T)|_x = f(x)$$

Para podermos garantir que f é uma função mensurável necessitamos de mais estruturas sobre o grupo G. Na grande maioria dos casos G possue uma estrutura de grupo de Lie, o que é suficiente para assegurar a mensurabilidade de f .

A titulo de ilustração deste metodo vamos mostrar que o espaço E das retas do espaço euclidiano tri-dimensional admite uma distribuição uniforme relativamente ao grupo de suas isometrias.

Para isso fixemos inicialmente um sistema de coordenadas cartezianas ortogonal com origem C e eixos e_1 , e_2 , e_3 .

Seja D o disco aberto do plano C e_1 , e_2 de raio 1 . Indiquemos ainda por U ao subconjunto de R^4 definido por :

$$U = \{(u,v,x,y) \in R^4 \mid (u,v) \in D \text{ e } (x,y) \in R^2\}$$

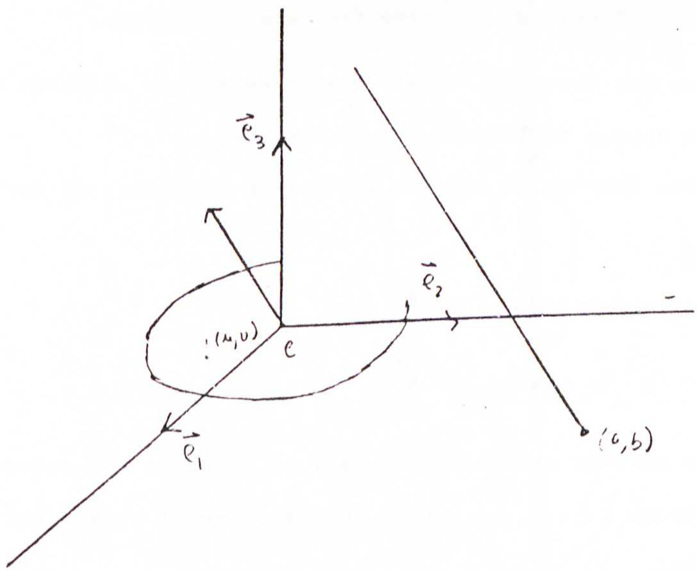
A cada elemento de U podemos associar um elemento de E que é a reta do espaço que corta o plano C , e_1 , e_2 no ponto (x,y,0) e cuja direção é definida pelo vetor unitário de componenetes

$$u\ ,\ v\ ,\ (1-(u^2+v^2))^{\frac{1}{2}}$$

Fixemos agora em E o elemento que é a reta C,e_3 . As isometrias que deixam esta reta fixa são as rotações helicoidais com eixo C,e_3 , isto é compostas de rotações com eixo C,e_3 e translações segundo vetores paralelos a este eixo. Vejamos agora que transformações de U são induzidas por estas rotações helicoidais. Inicialmente notemos que uma translação não altera as coordenadas u ,v e induz uma translação sobre os pontos(x,y).

Por outro lado uma rotação com eixo C,e_3 induz rotações sobre D e R^2.

Dai segue fácilmente que o jacobiano de uma transformação de U induzida por uma retação helicoidal de eixo C,e_3 é igual a 1 . Consequentemente o metodo mencionado anteriormente pode ser aplicado para se obter uma densidade uniforme de E relatiuamente ao grupo das isometrias do espaço.


$\vec{e}_3$
$\vec{e}_2$
(u,v)
e
(a,b)
$\vec{e}_1$