

Métodos de Ponto Proximal, Separadores e Lagrangeanos¹

Carlos Humes Júnior²

humes@ime.usp.br

Paulo José da Silva e Silva²

rsilva@ime.usp.br

1. INTRODUÇÃO

De uma maneira geral podemos descrever métodos de ponto proximal (MPP) como a resolução de um problema convexo através da solução de uma seqüência de problemas da forma:

$$x^{i+1} = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \{f_i(x) = f(x) + \lambda_i r(x, x^i)\},$$

onde $f(\cdot)$ é a função objetivo original e é considerada convexa, própria e semi-continua inferior; $r(\cdot, x^i)$ (função de regularização) é estritamente convexa e $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência onde $0 < \lambda_i \leq \bar{\lambda}$.

Na literatura encontram-se várias funções de regularização, como $\|x - x^i\|_2^2$ para problemas irrestritos[5, 6], φ -divergências para problemas no ortante positivo[4, 7] ou distâncias de Bregman para problemas com restrições mais gerais[4, 2]. Estes últimos dois casos usam funções barreiras para lidar implicitamente com as restrições.

2. PRINCIPAIS RESULTADOS

Sob a hipótese abaixo propomos uma variação de método de ponto proximal:

Hipótese 1. A função objetivo $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ é própria, convexa, semi-continua inferior e limitada inferiormente. Caso o problema convexo seja restrito ele deve ser transformado em um problema irrestrito através da soma da função indicadora do conjunto viável ■

Método de Ponto Proximal com Regularização Estrictamente Convexa - SCR Dado um problema de minimização obedecendo à hipótese 1.

1. Tome qualquer $x^1 \in \operatorname{dom} f$.

2. Iteração:

Calcule x^{i+1} por

$$x^{i+1} \in \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \{f_i(x) = f(x) + \lambda_i \phi(x - x^i)\},$$

Se $x^{i+1} = x^i$, Pare. ■

¹Palavras chaves: Programação Convexa, Pontos Proximais e Métodos de Lagrangeanos Aumentados.

²Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Hipótese 2. Vamos assumir que

1. $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente convexa.
2. O único subgradiente de $\phi(\cdot)$ na origem é o 0 (vetor zero do $\mathbb{R}^n$).
3. $(\lambda^i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de números reais positivos limitada superiormente por $\tilde{\lambda}$. ■

Sob estas condições, através do uso da idéia de separadores apresentadas por Eaves e Zangwill em [3], é possível demonstrar o resultado:

Teorema 1. *Sob as hipóteses 1 e 2, todo ponto de acumulação da seqüência gerada pelo SCR é uma solução do problema de programação convexa.* ■

Para conectar este método com o esquema de Lagrangianos aumentados, seguimos a linha de [1]. Desta forma conseguimos provar:

Método de Lagrangiano Aumentado Generalizado

1. Inicialização: Tome λ^1 viável dual.
2. Se λ^i não é uma solução dual:
 - Calcule o ponto $x^i \in \mathbb{R}^n$ como uma solução do problema

$$\begin{cases} \min & f(x) + P(g(x), \lambda^i) \\ \text{s.a.} & x \in X^0 \end{cases}$$

onde $P(\cdot, \lambda^i)$ é a função convexo conjugada de $\text{ind}(\cdot \mid \mathbb{R}_+^m) + \phi(\cdot - \lambda^i)$.

- Calcule λ^{i+1} como uma solução de:

$$\begin{cases} \max & \langle \lambda, g(x^i) \rangle - \phi(\lambda - \lambda^i), \\ \text{s.a.} & \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Teorema 2. *O SCR aplicado ao problema dual é equivalente ao método de Lagrangianos aumentados generalizado, se os problemas penalizados primais tiverem solução.* ■

REFERÊNCIAS

- [1] D. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, 1995.
- [2] Y. Censor and J. Zenios. The proximal minimization algorithms with D-functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 73:451–464, 1992.
- [3] B. C. Eaves and W. I. Zangwill. Generalized cutting plane algorithms. *SIAM Journal on Control*, 9:529–542, novembro 1971.
- [4] A. Iusem. *Métodos de Ponto Proximal em Otimização*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq, 1995. Livro do 20º Colóquio Brasileiro de Matemática.
- [5] J. Moreau. Proximité et dualité dans un espace hilbertien. *Bull. Soc. Math. France*, 93:273–299, 1965.
- [6] R. T. Rockafellar. Monotone operators and the proximal point algorithm. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 14:887–898, Agosto 1976.
- [7] M. Teboulle. Entropic proximal methods with applications to nonlinear programming. *Mathematics of Operations Research*, 17:670–690, 1992.