

RT-MAP-7703

INTRODUÇÃO À APROXIMAÇÃO ÓTIMA

Ivan de Queiroz Barros

O presente texto surgiu como notas de aula cobrindo parte da matéria lecionada pelo Autor durante o 2º semestre de 1977 no IMEUSP, no curso de pós-graduação "Métodos Numéricos de Aproximação e Interpolação".

Versão preliminar

DEZEMBRO 1977

INDICE

Cap. I - APROXIMAÇÃO EM ESPAÇOS NORMADOS

- §1 - Normas e semi-normas
- §2 - O problema da aproximação
- §3 - Dualidade
- §4 - Exemplos
- §5 - Exercícios

Cap. II - O PROBLEMA DE CHEBYSHEV

- §1 - Existência
- §2 - Sub-espaços de Haar
- §3 - Teoremas de Caracterização
- §4 - Unicidade e Continuidade

Cap. III - ALGORITMOS

- §1 - Algoritmo de Remez
- §2 - Interpolação por funções racionais.

REFERÊNCIAS

Capítulo I

APROXIMAÇÃO EM ESPAÇOS NORMADOS

§1. Normas e Semi-normas

1.1 Definição

Seja E um espaço vetorial sobre $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dizemos que $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma semi-norma sobre E se satisfaz os axiomas:

$$SN1 : p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

$$\forall x, y \in E$$

$$SN2 : p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$$

$$\forall \lambda \in K, \forall x \in E.$$

Dizemos que p é uma norma e neste caso usamos a notação $\|x\|$ em lugar de $p(x)$ se satisfaz também:

$$SN3 : p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

1.2 Definição

Um espaço vetorial munido de uma semi-norma (norma) será chamado espaço semi-normado (espaço normado). Usaremos a abreviação ESN (EN).

1.3 Exercício

Sejam E, F dois ESN com semi-normas p_1 e p_2 respectivamente. Então $p: E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ definida por qualquer das expressões

$$p(x, y) = p_1(x) + p_2(y)$$

$$p(x, y) = \max(p_1(x), p_2(y))$$

$$p(x, y) = [p_1(x)^2 + p_2(y)^2]^{1/2}$$

é uma semi-norma sobre $E \times F$.

1.4 Exercício

Seja E um EN e $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = \|x - y\|$. Verifique que d é uma distância e que além disso.

$$\begin{cases} d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \\ d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y \end{cases}$$

$$d(x+z, y+z) = d(x, y)$$

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y).$$

1.5 Observação

Consideraremos sempre um espaço normado como um espaço métrico com a distância definida em 1.4.

1.6 Exercício

Sejam E, F dois EN e $u: E \rightarrow F$ linear. Então u é contínua se e só se u é contínua na origem.

1.7 Exercício

1. $x=0 \Rightarrow p(x)=0$
2. $p(x) \geq 0$
3. $|p(x)-p(y)| \leq p(x-y)$
4. Se p_1 e p_2 são semi-normas sobre E então p definida por qualquer das expressões:

$$p(x) = p_1(x) + p_2(x)$$

$$p(x) = \max(p_1(x), p_2(x))$$

$$p(x) = [p_1(x)^2 + p_2(x)^2]^{1/2}$$

são semi-normas.

5. Sejam E, F dois espaços vetoriais e $u: E \rightarrow F$ linear. Se q é uma semi-norma sobre F então $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $p(x) = q(u(x))$ é semi-norma.

1.8 Proposição

Sejam E, F dois espaços normados e $u: E \rightarrow F$ linear. Então u é contínua se e só se existir $M \geq 0$ tal que:

$$\|u(x)\| \leq M \|x\|$$

Prova

- i) Se $\|u(x)\| \leq M \|x\|$ com $M=0$ então $u=0$ donde u é contínua.

Se $\|u(x)\| \leq M \|x\|$ com $M > 0$, dado $\varepsilon > 0$ temos que $\|x\| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow \|u(x)\| < \varepsilon$.
Então u é contínua na origem e pelo exercício 1.6 é contínua.

ii) Seja u contínua.
Então existe $M > 0$ tal que

$$\|y\| \leq \frac{1}{M} \Rightarrow \|u(y)\| \leq 1$$

Seja $x \in E$, $x \neq 0$.

Como $\left\| \frac{x}{M \|x\|} \right\| = \frac{1}{M}$ teremos $\left\| u\left(\frac{x}{M \|x\|}\right) \right\| \leq 1$

isto é $\|u(x)\| \leq M \|x\|$.

Se $x=0$ é claro que $\|u(0)\| \leq M \|0\|$,
c.q.d.

1.9 Definição

Seja E um espaço vetorial real e $A \subseteq E$.
Dizemos que A é convexo se:

$$x, y \in A, 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in A$$

1.10 Exercício

São convexas:

1. Interseções de convexas
2. Translados, homotéticos e somas de convexas
3. Produtos cartesianos de convexas.
4. Imagens diretas e inversas de convexas por aplicações lineares.

§2. O problema da aproximação

2.1 Podemos distinguir dois tipos de problemas de aproximação em espaços normados. No primeiro tipo temos um subconjunto A de um espaço normado E , e desejamos saber se A é denso em E .

Se a resposta é afirmativa dado $x \in E$ existem elementos de A arbitrariamente próximos de x .

O Teorema 2.2 a seguir, refere-se a este tipo de problema.

2.2 Teorema (Weierstrass)

O conjunto dos polinômios definidos no intervalo $[0,1]$ é denso em $C([0,1], \mathbb{R})$ segundo a norma definida por $\|f\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

Prova (Beinstein)

Seja $f \in C([0,1], \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq s \leq n$

onde s é inteiro e $p \in [0,1]$.

Definamos f_n por:

$$f_n(p) = \sum_{s=0}^n f\left(\frac{s}{n}\right) P(p; s, n)$$

onde $P(p; s, n) = \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s}$.

Pela continuidade uniforme de f temos:

$$|f(p)| \leq M$$

$$|f(p) - f(p')| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para } |p - p'| < \delta(\epsilon)$$

$P(p; s, n)$, $s = 0, 1, \dots, n$ define uma distribuição de probabilidades denominada "distribuição binômica".

Como $\sum_{s=0}^n P(p; s, n) = 1$ temos:

$$f(p) - f_n(p) = \sum_{s=0}^n \left(f(p) - f\left(\frac{s}{n}\right) \right) P(p; s, n)$$

$$|f(p) - f_n(p)| \leq \sum_{s=0}^n \left| f(p) - f\left(\frac{s}{n}\right) \right| P(p; s, n) =$$

$$= \sum_{\left| \frac{s}{n} - p \right| < \delta} \left| f(p) - f\left(\frac{s}{n}\right) \right| P(p; s, n) +$$

$$+ \sum_{\left| \frac{s}{n} - p \right| \geq \delta} \left| f(p) - f\left(\frac{s}{n}\right) \right| P(p; s, n) <$$

$$< \frac{\epsilon}{2} \sum_{s=0}^n P(p; s, n) + 2M \sum_{s=0}^n \frac{\left| \frac{s}{n} - p \right|^2}{\delta^2} P(p; s, n)$$

$$|f(p) - f_n(p)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2 n^2} \sum_{s=0}^n (s - np)^2 P(p|s, n)$$

Como $\sum_{s=0}^n (s - np)^2 P(p|s, n)$ é a variância da distribuição binômica, esta expressão vale $np(1-p)$. Ficamos com:

$$|f(p) - f_n(p)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2 n} p(1-p) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2\delta^2 n}$$

pois que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.

Fazendo $n > \frac{M}{\delta^2 \varepsilon}$ resulta $|f(p) - f_n(p)| < \varepsilon$.
(q.e.d.)

2.3 Corolário

O conjunto dos polinômios é denso em $C([a, b], \mathbb{R})$.

Prova

Basta aplicar o Teorema 2.2 a $g \in C([0, 1], \mathbb{R})$ definido por:

$$g(y) = f(a + (b-a)y), \quad f \in C([a, b], \mathbb{R}).$$

2.4 Problema da aproximação ótima

Este é o segundo tipo de problema de aproximação.

Seja E um espaço normado, $A \subset E$ um sub-conjunto fechado.

Definimos $d_A : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $\pi_A : E \rightarrow \mathcal{P}(A)$ por:

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

$$\pi_A(x) = \{y \in A : \|x - y\| = d_A(x)\}$$

Algumas das questões pertinentes são:

i) Dado $x \in E \setminus A$ é $\pi_A(x) \neq \emptyset$?

Corresponde à existência de aproximantes ótimos de x em A .

ii) Se $\pi_A(x) \neq \emptyset$ é $\text{card } \pi_A(x) = 1$?

É o problema da unicidade

iii) Se existe e é único o aproximante ótimo de $x \in E$ em A para $\forall x \in E$, convém considerar π_A como uma aplicação $\pi_A : E \rightarrow A$ definida por

$$\|x - \pi_A(x)\| = d_A(x)$$

Uma questão importante é saber se $\pi_A : E \rightarrow A$ é contínua

iv) Se as três condições anteriores são satisfeitas como obter $\pi_A(x)$ e $d_A(x)$?

2.5 Exercício

Seja $A \subseteq E$ sub-espaco fechado. Então:

- i) $d_A: E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma semi-norma.
- ii) $\text{Ker } d_A = A$
- iii) $d_A(x) \leq \|x\|$
- iv) $d_A(x+y) = d_A(x) \quad \forall x \in E, \forall y \in A.$

2.6 Exercício

Seja $A \subseteq E$ sub-espaco fechado. Então:

- i) $y \in A \Rightarrow \pi_A(y) = \{y\}$
- ii) $\pi_A(x+y) = \pi_A(x) + y \quad \forall x \in E, \forall y \in A$
- iii) $\pi_A(\lambda x) = \lambda \pi_A(x) \quad \forall x \in E, \lambda \neq 0.$
- iv) $\pi_A(x)$ é convexo, fechado, limitado.
e $y \in \pi_A(x) \Rightarrow \|y\| \leq \|x\| + d_A(x).$

2.7 Definição

Seja X um espaco normado e $L \subseteq X$ um sub-espaco. Dizemos que L é um E-subespaco, U-subespaco, EU-subespaco de X se todo $x \in X$ tem respectivamente, pelo menos um, no maximo um, exatamente um, aproximante otimo em L .

2.8 Proposição (Existência)

Todo sub-espaco de dimensao finita de um espaco normado e' um E-subespaco

Prova

Seja L subespaco de dimensao finita do espaco normado X e $x \in X \setminus L$.

Pelo exercicio 2.6 (iv), $\pi_L(x)$ esta' contido na bola fechada de centro na origem e raio $\|x\| + d_L(x)$.

A intersecao K dessa bola com L e' fechada em L e limitada. Como L e' de dimensao finita K e' compacto.

A funcao $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(y) = \|x - y\|$ e' continua e portanto admite ponto de minimo em K . Este ponto de minimo e' aproximante otimo.

Logo $\pi_L(x) \neq \emptyset$. (c.q.d.)

2.9 Corolario

Se L e' subespaco de dimensao finita do espaco normado X e $x \notin L+y$, entao x admite aproximante otimo em $L+y$.

Prova

Consequencia mediada da Proposicao 2.8 e

$$\text{de } \pi_{L+y}(x) = y + \pi_L(x-y).$$

2.10 Definição

Dizemos que uma norma $\| \cdot \|$ é estritamente convexa se:

$$x \neq y, \|x\| \leq \varepsilon, \|y\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|x+y\| < 2\varepsilon$$

Se X é um espaço normado com norma estritamente convexa dizemos que X é rotundo.

2.11 Exercício

A norma $\| \cdot \|$ é estritamente convexa se e só se $x \neq y, \|x\| = \|y\| \Rightarrow \|x+y\| < \|x\| + \|y\|$.

2.12 Proposição (Unicidade)

Seja X espaço normado.

Todos os sub-espacos de X são U -sub-espacos se e só se X é rotundo.

Prova

i) Seja X rotundo.

Seja $L \subset X$ subespaço e $x \in X \setminus L$.

Suponhamos (por absurdo) que houvessem duas aproximações ótimas distintas $y_1, y_2 \in \Pi_L(x)$.
Então:

$$\|x - y_1\| = d_L(x), \quad \|x - y_2\| = d_L(x)$$

Pela convexidade estrita da norma teríamos

$$\|x - y_1 + x - y_2\| < 2d_L(x)$$

isto é $\|x - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\| < d_L(x)$ (contradição!).

Portanto $y_1 = y_2$.

ii) Suponhamos agora que X não é rotundo.
Existem então $x \neq y$, tais que $\|x\| = \|y\| = 1$
e $\|x + y\| = 2$.

Mostremos que $L = \{z \in X : z = \alpha(x - y), \alpha \in \mathbb{R}\}$
não é V -subespaço.

Mais explicitamente mostremos que
 0 e $x - y$ são dois aproximantes ótimos
de x em L .

$$\|x - 0\| = \|x\| = 1, \quad \|x - (x - y)\| = \|y\| = 1.$$

Basta então mostrar que $\|x - \alpha(x - y)\| \geq 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|x - \alpha(x - y)\| &= \|x - \alpha x + \alpha y\| = \\ &= \|x - \alpha x - \alpha x + \alpha x + \alpha y\| = \|\alpha(x + y) - (2\alpha - 1)x\| \geq \\ &\geq \left| |\alpha| \|x + y\| - |2\alpha - 1| \|x\| \right| = 2 \left| |\alpha| - \left|\alpha - \frac{1}{2}\right| \right| \end{aligned}$$

$$\text{Então se } \alpha \geq \frac{1}{2}, \quad \|x - \alpha(x - y)\| \geq 2 \left| \alpha - \alpha + \frac{1}{2} \right| = 1$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}\|x - (1-\beta)(x-y)\| &= \|x - x + y - \beta(y-x)\| = \\ &= \|y - \beta(y-x)\| \geq 1 \quad \text{para } \beta \geq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Logo } \|x - \alpha(x-y)\| \geq 1 \quad \text{para } \alpha \leq \frac{1}{2}$$

c.q.d.

2.13 Exercício

Sejam $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_2$ normas no $\mathbb{R}^n$ definidas por:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

Quais dessas normas são estritamente convexas?

2.14 Proposição (Continuidade)

Seja X espaço normado, $L \subset X$ sub-espaço de dimensão finita. Se L é EU-subespaço então $\pi_L: X \rightarrow L$ é contínua.

Prova

Seja $x_m \rightarrow x$, $y_m = \pi_L(x_m)$, $y = \pi_L(x)$.
Provemos que $y_m \rightarrow y$.

$$\begin{aligned} \text{i) } d_L(x) &\leq \|x - y_n\| \leq \|x - x_m\| + \|x_m - y_n\| = \\ &= \|x - x_m\| + d_L(x_m) \end{aligned}$$

Como d_L é contínua e $\|x - x_m\| \rightarrow 0$ resulta:

$$\|x - y_n\| \rightarrow d_L(x)$$

ii) suponha (por absurdo) que $y_n \not\rightarrow y$.
Então existe $\varepsilon > 0$ e uma sub-sequência (z_m) de (y_m) tais que

$$\|z_m - y\| > \varepsilon, \quad \forall m.$$

Para m suficientemente grande z_m pertence ao compacto $K = L \cap B_{d_L(x)+1}(x)$.

Então (z_m) admite uma sub-sequência convergente (z_{m_k}) .

$$\text{Seja } \lim_{k \rightarrow \infty} z_{m_k} = \bar{y}$$

$$\text{Teremos: } \|x - \bar{y}\| \leq \|x - z_{m_k}\| + \|z_{m_k} - \bar{y}\|$$

Passando ao limite qdo $k \rightarrow \infty$ resulta

$$\|x - \bar{y}\| \leq d_L(x)$$

donde $\bar{y} = y$, (Contradição!). Logo $y_n \rightarrow y$.
(c.q.d.).

§3- Dualidade

3.1 Definição

Seja E um espaço normado. O espaço dual E' é o espaço vetorial cujos elementos são as formas lineares contínuas sobre E com as operações $L_1 + L_2$ e λL definidas por

$$\begin{aligned}(L_1 + L_2)x &= L_1x + L_2x & \forall x \in E \\ (\lambda L)x &= \lambda(Lx) & \forall x \in E.\end{aligned}$$

onde $L, L_1, L_2 \in E'$.

3.2 Exercício

Verifique que E' com as operações introduzidas em 3.1 é um espaço vetorial.

3.3 Exercício

A aplicação $\|\cdot\|: E' \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Lx|}{\|x\|}, \quad x \in E, L \in E'$$

é uma norma sobre E' .

3.4 Exercício

$$\sup_{x \neq 0} \frac{|Lx|}{\|x\|} = \inf \left\{ M : |Lx| \leq M\|x\|, \forall x \in E \right\}$$

onde $L \in E'$.

3.5 Observação

Salvo menção em contrário E' será considerado um espaço normado com a norma definida no exercício 3.2.

3.6 Definição

Dado um conjunto X dizemos que uma relação binária R entre elementos de X é uma relação de ordem se satisfaz os axiomas:

- 01 $xRx \quad \forall x \in X$
 02 $xRy \text{ e } yRx \Rightarrow x=y$
 03 $xRy \text{ e } yRz \Rightarrow xRz$

Um conjunto X munido de uma relação de ordem é chamado conjunto ordenado.

3.7 Definição

Seja X um conjunto ordenado e $Y \subset X$. Dizemos que Y é totalmente ordenado se dados $x, y \in Y$ tivermos xRy ou yRx .

3.8 Definição

Seja X um conjunto ordenado e $Y \subset X$. Dizemos que Y é majorado se existe $\bar{y} \in X$ tal que $yR\bar{y}$, $\forall y \in Y$. Dizemos que $\bar{y}$ é um majorante de Y .

3.9 Definição

Seja X um conjunto ordenado. Dizemos que $m \in X$ é maximal se

$$(x \in X \text{ e } mRx) \Rightarrow m = x$$

3.10 Definição

Dizemos que um conjunto ordenado X é indutivo se todo sub-conjunto totalmente ordenado de X admite um majorante.

3.11 LEMA DE ZORN

Todo conjunto ordenado indutivo possui pelo menos um elemento maximal.

3.12 Definição

Seja E um espaço vetorial. Dizemos que $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ é sub-linear se satisfaz:

$$SL\ 0 : \quad p(x) \geq 0 \quad \forall x \in E$$

$$SL\ 1 : \quad p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall \lambda \geq 0, \forall x \in E$$

$$SL\ 2 : \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E.$$

3.13 Teorema (Hahn-Banach)

Seja E um espaço vetorial real, $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ sub-linear, $E_0 \subset E$ sub-espaço vetorial e f_0 uma forma linear sobre E_0 tal que $f_0(y) \leq p(y)$ $\forall y \in E_0$. Então existe uma forma linear f sobre E prolongando f_0 e tal que $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in E$.

Prova

Se $E_0 = E$ nada a demonstrar.

i) Seja $E_0 \neq E$ e $x_1 \in E \setminus E_0$.

Vamos mostrar que podemos prolongar f_0 a uma forma linear f_1 sobre o sub-espaço E_1 gerado por E_0 e $\{x_1\}$, e tal que:

$$f_1(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E_1.$$

Os elementos de E_1 são da forma $y + \lambda x_1$ onde $y \in E_0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como f_1 deve ser linear deveremos ter

$$f_1(y + \lambda x_1) = f_1(y) + \lambda f_1(x_1)$$

Chamemos $f_1(x_1) = \alpha$. Como f_1 deve ser extensão de f_0 devemos ter $f_1(y) = f_0(y)$.

Logo

$$f_1(y + \lambda x_1) = f_0(y) + \lambda \alpha$$

É fácil verificar que f_1 assim definida é uma forma linear sobre E_1 , prolongando f_0 .

Mostremos que podemos escolher α tal que

$$f_0(y) + \lambda \alpha \leq p(y + \lambda x_1), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall y \in E_0$$

Para $\lambda = 0$ a desigualdade é verdadeira.

Para $\lambda \neq 0$ a desigualdade é equivalente ao par de desigualdades:

$$f_0(y_1) + \alpha \leq p(y_1 + x_1) \quad \forall y_1 \in E_0$$

$$f_0(y_2) - \alpha \leq p(y_2 - x_1) \quad \forall y_2 \in E_0$$

Portanto α deve satisfazer

$$f_0(y_2) - p(y_2 - x_1) \leq \alpha \leq -f_0(y_1) + p(y_1 + x_1) \quad , \quad \forall y_1, y_2 \in E_0$$

Como

$$\begin{aligned} f_0(y_2) + f_0(y_1) &= f_0(y_2 + y_1) \leq p(y_2 + y_1) = \\ &= p(y_2 - x_1 + y_1 + x_1) \leq p(y_2 - x_1) + p(y_1 + x_1) \end{aligned}$$

temos:

$$f_0(y_2) - p(y_2 - x_1) \leq -f_0(y_1) + p(y_1 + x_1) \quad \forall y_1, y_2 \in E_0$$

donde

$$\sup_{y_2 \in E_0} [f_0(y_2) - p(y_2 - x_1)] \leq \inf_{y_1 \in E_0} [-f_0(y_1) + p(y_1 + x_1)]$$

o que mostra que existe α satisfazendo

$$f_0(y_2) - p(y_2 - x_1) \leq \alpha \leq -f_0(y_1) + p(y_1 + x_1) \quad \forall y_1, y_2 \in E_0$$

ii) Seja X o conjunto dos pares (E_i, f_i) onde os E_i são sub-espacos de E tais que $E_0 \subset E_i$ e os $f_i: E_i \rightarrow \mathbb{R}$ são formas lineares que prolongam f_0 e tais que $f_i(x) \leq p(x)$, $\forall x \in E_i$.

Vamos definir em X uma relação de ordem por:

$$(E_i, f_i) \leq (E_j, f_j) \stackrel{\text{def.}}{\iff} E_i \subset E_j \text{ e } f_i = f_j|_{E_i}.$$

Com esta relação de ordem, é fácil verificar, X é indutivo.

Pelo Lema de Zorn X admite um elemento maximal $(\bar{E}, f)$.

Se fosse $\bar{E} \neq E$, f admitiria um prolongamento, pela primeira parte da demonstração, e $(\bar{E}, f)$ não seria maximal.

Portanto $\bar{E} = E$ e f é um prolongamento de f_0 a E satisfazendo $f(x) \leq p(x)$.

c.q.d.

3.14 Corolário

Seja E espaço vetorial real, $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ uma semi-norma, $E_0 \subset E$ subespaço, $f_0: E_0 \rightarrow \mathbb{R}$ forma linear tal que $|f_0(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in E_0$. Então f_0 pode ser prolongada a uma forma linear $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in E$.

3.15 Exercício

- i) Verifique que a relação definida na segunda parte da demonstração do Teorema 3.13 é de ordem.
- ii) Verifique que com esta relação de ordem X é indutivo.
- iii) Demonstre o corolário 3.14.

3.16 Proposição

Seja E um espaço normado, val, $A \subseteq E$ um sub-espaço e $x \in E \setminus A$.
Então

$$d_A(x) = \max_{\substack{L \in A^\perp \\ \|L\| \leq 1}} |L(x)|$$

onde $A^\perp = \{L \in E' : L(x) = 0, \forall x \in A\}$.

Prova

- i) Seja $L \in A^\perp$, $\|L\| \leq 1$ e $y \in A$.

$$|L(x)| = |L(x-y)| \leq \|L\| \|x-y\| \leq \|x-y\|$$

portanto $|L(x)| \leq d_A(x)$.

- ii) Basta agora mostrar que existe $L_1 \in A^\perp$ tal que $\|L_1\| \leq 1$ e $|L_1(x)| = d_A(x)$.

Seja E_0 o subespaço gerado por A e $\{x\}$.

Seja $L_0: E_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$L_0(y + \lambda x) = \lambda d_A(x) \quad , \forall y \in A, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

L_0 é uma forma linear sobre E_0 tal que $L_0 \in A^\perp$, $L_0(x) = d_A(x)$. Temos também $\|L_0\| \leq 1$. De fato se $\lambda \neq 0$:

$$|L_0(y + \lambda x)| = |\lambda| d_A(x) \leq |\lambda| \|x + \frac{1}{\lambda} y\| = \|y + \lambda x\|$$

Se $\lambda = 0$ vale obviamente $0 = |L_0(y)| \leq \|y\|$.

Portanto $\|L_0\| \leq 1$.

Pelo Teorema de Hahn-Banach podemos prolongar L_0 a uma forma linear $L_1: E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo ainda $|L_1(z)| \leq \|z\| \quad \forall z \in E$. Temos então:

$$L_1 \in A^\perp, \quad \|L_1\| \leq 1 \quad \text{e} \quad L_1(x) = d_A(x). \quad (\text{c.q.d.})$$

3.17 Corolário

Seja E um EN, $A \subseteq E$ um subespaço, $x \in E \setminus A$, $y \in A$, $L \in A^\perp$ com $\|L\| \leq 1$. Então:

$$|L(x)| \leq d_A(x) \leq \|x - y\|$$

3.18 Exemplo

Seja $K = [0, 1] \times [0, 1]$ e $E = C(K, \mathbb{R})$ com a norma:

$$\|g\| = \sup_{(x,y) \in K} |g(x,y)|$$

Seja $A \subseteq E$ o sub-espaço:

$$A = \left\{ g \in E : g(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2, \right. \\ \left. a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Seja $f \in E \setminus A$ dado por $f(x,y) = xy$.

Estimemos $d_A(f)$ pelo corolário 3.17.

Tomando $g(x,y) \equiv 0$ obtemos:

$$d_A(f) \leq \|f\| = \max_{(x,y) \in K} |xy| = 1$$

Tomando $g(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)$ obtemos:

$$\begin{aligned} d_A(f) &\leq \|f - g\| = \max_K \left| xy - \frac{1}{2}(x+y) \right| = \\ &= \frac{1}{2} \max_K |x+y - 2xy| = \frac{1}{2} \max_K |x(1-y) + (1-x)y| = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Temos agora uma estimativa melhor: $d_A(f) \leq \frac{1}{2}$.

Determinemos agora uma restrição inferior.

Dado $(x, y) \in K$, a forma linear definida por $Lg = g(x, y)$ é contínua.

De fato $|Lg| = |g(x, y)| \leq \sup_{(x, y) \in K} |g(x, y)| = \|g\|$

Consideremos a forma linear contínua definida por:

$$Lg = c_1 g(0, 0) + c_2 g(1, 1) + c_3 g(0, 1) + c_4 g(1, 0)$$

e procuremos determinar $c_i, i=1, 2, 3, 4$ de modo que $L \in A^\perp, \|L\| \leq 1$.

Seja $f_0(x, y) = 1$, $f_1(x, y) = x$, $f_2(x, y) = y$
 $f_3(x, y) = x^2$, $f_4(x, y) = y^2$.

$$L(f_0) = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

$$L(f_1) = c_2 + c_4 = 0$$

$$L(f_2) = c_2 + c_3 = 0$$

$$L(f_3) = c_2 + c_4 = 0$$

$$L(f_4) = c_2 + c_3 = 0$$

Logo $c_2 = c_1$, $c_3 = -c_1$, $c_4 = -c_1$ isto é:

$$Lg = c_1 [g(0,0) + g(1,1) - g(0,1) - g(1,0)]$$

$$\|L\| = \sup_{g \neq 0} \frac{|Lg|}{\|g\|} = c_1 \sup_{g \neq 0} \frac{|g(0,0) + g(1,1) - g(0,1) - g(1,0)|}{\|g\|}$$

$$\text{Mas } |g(0,0) + g(1,1) - g(0,1) - g(1,0)| \leq$$

$$\leq |g(0,0)| + |g(1,1)| + |g(0,1)| + |g(1,0)| \leq 4 \|g\|$$

$$\therefore \|L\| \leq 4c_1$$

Fazendo $c_1 = \frac{1}{4}$ temos $\|L\| \leq 1$.

$$|Lf| = \frac{1}{4} |f(0,0) + f(1,1) - f(0,1) - f(1,0)| =$$

$$= \frac{1}{4} |0 \times 0 + 1 \times 1 - 0 \times 1 - 1 \times 0| = \frac{1}{4}$$

Portanto $\frac{1}{4} \leq d_A(f) \leq \frac{1}{2}$.

§4 - Exemplos4.1 Definição

Seja $X = C([a, b], \mathbb{R})$.

Vamos definir $\| \cdot \|_p : X \rightarrow \mathbb{R}$ $1 \leq p < \infty$

por

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

e $\| \cdot \|_\infty : X \rightarrow \mathbb{R}$ por $\|f\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|$

4.2 Exercício

Verifique que $\| \cdot \|_\infty$ e $\| \cdot \|_1$ são normas e que $\|f+g\|_1 = \|f\|_1 + \|g\|_1$ se e só se $f(t)g(t) \geq 0 \ \forall t$.

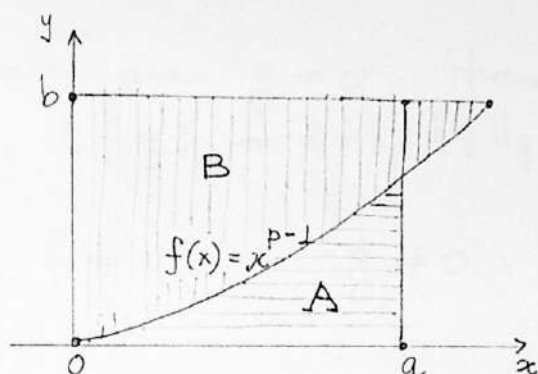
Para mostrar que $\| \cdot \|_p$, $1 < p < \infty$ é uma norma provaremos antes a "desigualdade de Hölder".

4.3 Lema

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

e a igualdade vale se e só se $a^p = b^q$.

Prova

A área do retângulo cujos lados medem respectivamente a e b é menor ou igual a soma das áreas das figuras A e B . Calculando obtemos:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Teremos igualdade se e só se $a^{p-1} = b$,
ou $a^p = ab$. Mas neste caso $a = b^{q-1}$ donde
 $a^p = b^q$. c.q.d.

4.4 Proposição (Desigualdade de Hölder).

Sejam $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$, $1 < p < \infty$
e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então vale:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

e teremos igualdade se e só se $|f|^p$ e $|g|^q$ forem linearmente dependentes.

Prova

i) Se $f=0$ ou $g=0$ temos $fg=0$
 donde $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q = 0$.

ii) Sejam $f \neq 0$ e $g \neq 0$. Então $\|f\|_p \neq 0$
 e $\|g\|_q \neq 0$.

Fazendo $a(t) = \frac{|f(t)|}{\|f\|_p}$, $b(t) = \frac{|g(t)|}{\|g\|_q}$ teremos
 pelo lema 4.3 :

$$\frac{|f(t)g(t)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f(t)|^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{\|g(t)\|^q}{q \|g\|_q^q}, \quad \forall t \quad (4.4.1)$$

$$\text{Integrando : } \frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\text{isto é } \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

iii) Sejam $|f|^p$ e $|g|^q$ linearmente dependentes.
 Se $f=0$ ou $g=0$ temos por (i) : que
 $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q$.

Sejam $f \neq 0$ e $g \neq 0$. Pela dependência
 linear existem α e β não nulos tais que.

$$\alpha |f(t)|^p = \beta |g(t)|^q \quad \forall t$$

$$\text{Integrando } \alpha \|f\|_p^p = \beta \|g\|_q^q.$$

Dividindo-se membro a membro obtemos:

$$\left(\frac{|f(t)|}{\|f\|_p} \right)^p = \left(\frac{|g(t)|}{\|g\|_q} \right)^q, \quad \forall t$$

isto é $a(t)^p = b(t)^q, \quad \forall t.$

Pelo lema 4.3 teremos igualdade em (4.4.1) o que leva a $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q.$

iv) Se $|f|^p$ e $|g|^q$ não são linearmente dependentes então $f \neq 0$, $g \neq 0$ e $\exists t_0 \in [a, b]$ tal que

$$\left(\frac{|f(t_0)|}{\|f\|_p} \right)^p \neq \left(\frac{|g(t_0)|}{\|g\|_q} \right)^q$$

pois caso contrário seriam linearmente dependentes.

Então pelo lema 4.3 temos:

$$\frac{|f(t_0)g(t_0)|}{\|f\|_p \|g\|_q} < \frac{|f(t_0)|^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{|g(t_0)|^q}{q \|g\|_q^q}$$

donde obtemos por integração de (4.1)

$$\|fg\|_1 < \|f\|_p \|g\|_q$$

c.q.d.

4.5 Proposição

Seja $1 < p < \infty$ e $\|\cdot\|_p : C([a,b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida em 4.1.
Então

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

e vale a igualdade se e só se $\alpha f = \beta g$ com $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$.

Prova

i) Se $f + g = 0$ teremos

$$0 = \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

e a igualdade implica $f = 0$, $g = 0$ isto é, $\alpha f = \beta g$ com $\alpha = \beta = 1$.

ii) Seja $f + g \neq 0$. Então:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \|(f + g)^p\|_1 = \|(f + g)^{p-1} f + (f + g)^{p-1} g\|_1 \leq \textcircled{1} \\ &\leq \|(f + g)^{p-1} f\|_1 + \|(f + g)^{p-1} g\|_1 \leq \textcircled{2} \\ &\leq \|(f + g)^{p-1}\|_q \|f\|_p + \|(f + g)^{p-1}\|_q \|g\|_p = \\ &= \|(f + g)^{p-1}\|_q (\|f\|_p + \|g\|_p) = \|f + g\|_p^{p-1} (\|f\|_p + \|g\|_p) \end{aligned}$$

Portanto $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Se em ① valer a igualdade, teremos pelo exercício 4.2 :

$$(f(t)+g(t))^{2(P-1)} f(t) g(t) \geq 0, \quad \forall t. \quad (4.5.1)$$

Se em ② valer a igualdade teremos pela proposição 4.4 :

$$\alpha_1 |f(t)+g(t)|^{(P-1)q} = \beta_1 |f(t)|^P, \quad \forall t \quad (4.5.2)$$

$$\alpha_2 |f(t)+g(t)|^{(P-1)q} = \beta_2 |g(t)|^P, \quad \forall t \quad (4.5.3)$$

$$\alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \alpha_1 + \beta_1 > 0, \quad \alpha_2 \geq 0, \beta_2 \geq 0, \alpha_2 + \beta_2 > 0.$$

Devemos ter $\beta_1 > 0$ pois que se fosse $\beta_1 = 0$ então teríamos $\alpha_1 > 0$ e $f(t)+g(t)=0 \quad \forall t$ contra a hipótese que $f+g \neq 0$.

Analogamente $\beta_2 > 0$

Se $\alpha_1 = 0$ resulta $f = 0$ e portanto $\alpha f = \beta g$ com $\alpha = 1, \beta = 0$.

Se $\alpha_2 = 0$ resulta $g = 0$ e portanto $\alpha f = \beta g$ com $\alpha = 0, \beta = 1$.

Se $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 > 0$ resulta $\frac{\beta_1}{\alpha_1} |f(t)|^P = \frac{\beta_2}{\alpha_2} |g(t)|^P$
ou $\alpha |f(t)| = \beta |g(t)|$ onde

$$\alpha = \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} \right)^{1/P}, \quad \beta = \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2} \right)^{1/P}.$$

Se $f(t) + g(t) \neq 0$ temos de 4.5.1, $f(t)g(t) \geq 0$.

Se $f(t) + g(t) = 0$ temos de 4.5.2 e 4.5.3 que $f(t) = 0$ e $g(t) = 0$.

Portanto teremos $f(t)g(t) \geq 0 \quad \forall t$.

Logo $\alpha f(t) = \beta g(t) \quad \forall t$.

iii) Se $\alpha f = \beta g$ $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0$ e' imediato verificar que

$$\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p. \quad \text{c.q.d.}$$

4.6 Proposição

Seja $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ não constante.
Então:

i) Se $1 < p < q < \infty$ temos:

$$(b-a)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_1 < (b-a)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p < (b-a)^{-\frac{1}{q}} \|f\|_q < \|f\|_\infty$$

ii) $(b-a)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \uparrow \|f\|_\infty$ quando $p \rightarrow \infty$.

Prova

$$i) \|f\|_p^p = \|f^p \cdot 1\|_1 < \|f^p\|_{\frac{q}{p}} \|1\|_r \quad (\text{des. Hölder}).$$

$$\text{onde } \frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)} + \frac{1}{r} = 1, \text{ isto é } r = \frac{q}{q-p}.$$

$$\|f\|_p^p < \|f^p\|_{\frac{q}{p}} \|1\|_{\frac{q}{q-p}} = \|f\|_q^p (b-a)^{\frac{q-p}{q}}$$

$$\|f\|_p < \|f\|_q (b-a)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$$

$$\text{donde } (b-a)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p < (b-a)^{-\frac{1}{q}} \|f\|_q$$

O desenvolvimento que acabamos de fazer vale também para $1 = p < q$.

A verificação que $(b-a)^{-\frac{1}{q}} \|f\|_q < \|f\|_\infty$ é imediata.

ii) Pela parte i) existe o limite de $(b-a)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p$ quando $p \rightarrow \infty$ e

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (b-a)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty. \quad (4.6.1)$$

Seja $[c, d] \subset [a, b]$, $c \neq d$, tal que

$$|f(t)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon, \text{ onde } \varepsilon > 0.$$

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \geq \left(\int_c^d |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \geq \\ &\geq (\|f\|_\infty - \varepsilon) (d-c)^{1/p} \end{aligned}$$

$$\text{Então } (b-a)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon) \left(\frac{d-c}{b-a} \right)^{1/p}$$

Passando ao limite :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (b-a)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$$

Pela arbitrariedade de $\varepsilon > 0$ resulta

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (b-a)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$$

o que juntamente com (4.6.1) prova ii).

c.q.d.

4.7 Exemplo

Vamos dar um exemplo de um subespaço de $C([0,1], \mathbb{R})$ de dimensão infinita e codimensão 1 que é um E-subespaço, com a norma $\|\cdot\|_1$.

Seja $\varphi: C([0,1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\varphi(g) = \int_0^{1/2} g(t) dt - \int_{1/2}^1 g(t) dt.$$

Podemos verificar (exercício 4.8) que φ é uma forma linear contínua em $C([0,1], \mathbb{R})$ com a norma $\|\cdot\|_1$.

Portanto $L = \{g \in C([0,1], \mathbb{R}) : \varphi(g) = 0\}$ é um subespaço fechado de codimensão 1.

Seja $f_0 \in C([0,1], \mathbb{R})$ definida por

$$f_0(t) = 1 - 2t$$

Como $\varphi(f_0) = \frac{1}{2}$, $f_0 \notin L$.

Seja $g \in L$,

$$\begin{aligned} \|f_0 - g\|_1 &= \int_0^{1/2} |f_0(t) - g(t)| dt + \int_{1/2}^1 |f_0(t) - g(t)| dt \geq \\ &\geq \int_0^{1/2} (f_0(t) - g(t)) dt - \int_{1/2}^1 (f_0(t) - g(t)) dt = \\ &= \varphi(f_0 - g) = \varphi(f_0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\|f_0 - 0\|_1 = \int_0^{1/2} (1 - 2t) dt - \int_{1/2}^1 (1 - 2t) dt = \varphi(f_0) = \frac{1}{2}.$$

Logo $0 \in L$ é aproximante ótimo de f_0 .

Seja agora $f \in C([0,1], \mathbb{R}) \setminus L$, qualquer.
Vale $\varphi(f) \neq 0$.

$$\text{De } f = (f - 2\varphi(f)f_0) + 2\varphi(f)f_0$$

e $\varphi(f - 2\varphi(f)f_0) = 0$ temos pelo exercício 2.6 (ii) e (iii) que

$$\pi_L(f) = (f - 2\varphi(f)f_0) + 2\varphi(f)\pi_L(f_0)$$

Como $\pi_L(f_0) \neq \emptyset$ resulta $\pi_L(f) \neq \emptyset$.
Portanto L é E-subespaço.

4.8 Exemplo

Em $C([0,1], \mathbb{R})$ com a norma $\|\cdot\|_p$, $1 < p \leq \infty$
o subespaço

$$L = \{ g \in C([0,1], \mathbb{R}) : \varphi(g) = 0 \}$$

$$\text{onde } \varphi(g) = \int_0^{1/2} g(t) dt - \int_{1/2}^1 g(t) dt$$

não é ε -subespaço. Mais que isso, nenhum elemento de $C([0,1], \mathbb{R}) \setminus L$ admite aproximante ótimo em L .

Seja $f_0 \in C([0,1], \mathbb{R}) \setminus L$ definido por $f_0(t) = 1 - 2t$ como no exemplo 4.7.

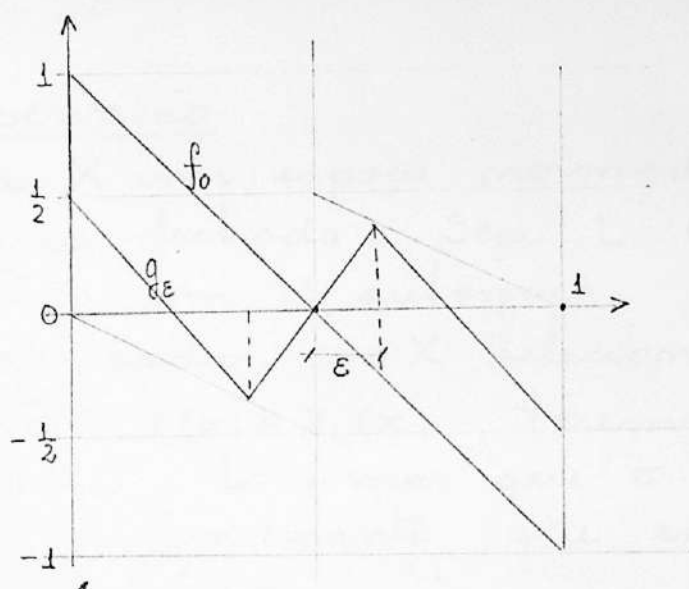
Seja $g \in L$. Como $f_0 - g \notin L$, $f_0 - g$ não é constante. Portanto pela proposição 4.6

$$\|f_0 - g\|_p > \|f_0 - g\|_1 \geq \frac{1}{2}.$$

Basta agora verificar que $d_L(f_0) = \frac{1}{2}$.

Seja g_ε definida por:

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} -\frac{1-\varepsilon}{\frac{1}{2}-\varepsilon}t + \frac{1}{2} & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}-\varepsilon] \\ \frac{\frac{1}{2}-\varepsilon}{\varepsilon}(t - \frac{1}{2}) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon] \\ -\frac{1-\varepsilon}{\frac{1}{2}-\varepsilon}(t-1) - \frac{1}{2} & \text{se } t \in [\frac{1}{2}+\varepsilon, 1] \end{cases}$$



Calculando obtemos $\varphi(g_\varepsilon) = 0$, isto é $g_\varepsilon \in L$.
Do gráfico de g_ε e f_0 vemos que

$$\|f_0 - g_\varepsilon\|_\infty \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$$

Pela proposição 4.6 $\|f_0 - g_\varepsilon\|_p < \|f_0 - g_\varepsilon\|_\infty \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$.

Logo $d_L(f_0) = \frac{1}{2}$ e f_0 não admite aproximante ótimo em L .

Novamente como no exemplo 4.7, para $f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \setminus L$ temos.

$$\pi_L(f) = (f - 2\varphi(f)f_0) + 2\varphi(f)\pi_L(f_0)$$

Como $\pi_L(f_0) = \emptyset$ resulta $\pi_L(f) = \emptyset$.

4.9 Exercício

Verifique que $\varphi: C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida nos exemplos 4.7 e 4.8 é contínua com qualquer das normas $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$.

4.10 Observação

Seja X um espaço normado, L um subespaço fechado. Seja L um E -subespaço mas não um U -subespaço.

Se para cada $x \in X$ selecionarmos um elemento $\sigma(x) \in \Pi_L(x)$, teremos uma aplicação $\sigma: X \rightarrow L$. Diremos que σ é uma seleção. É muito conveniente que exista uma seleção contínua.

4.11 Exemplo

Exemplo de um subespaço de dimensão 1 em $C([0,3], \mathbb{R})$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$ que não admite seleção contínua.

Seja $L = \{h \in C([0,3], \mathbb{R}) : h = \alpha g, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

onde

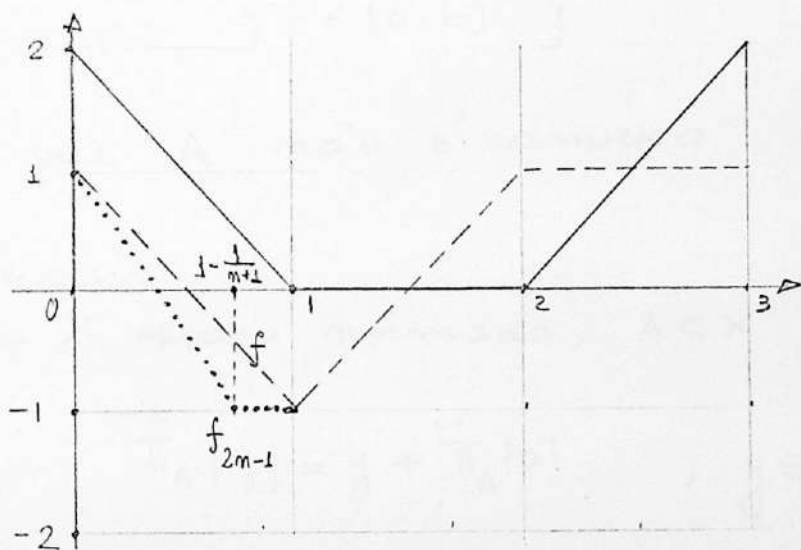
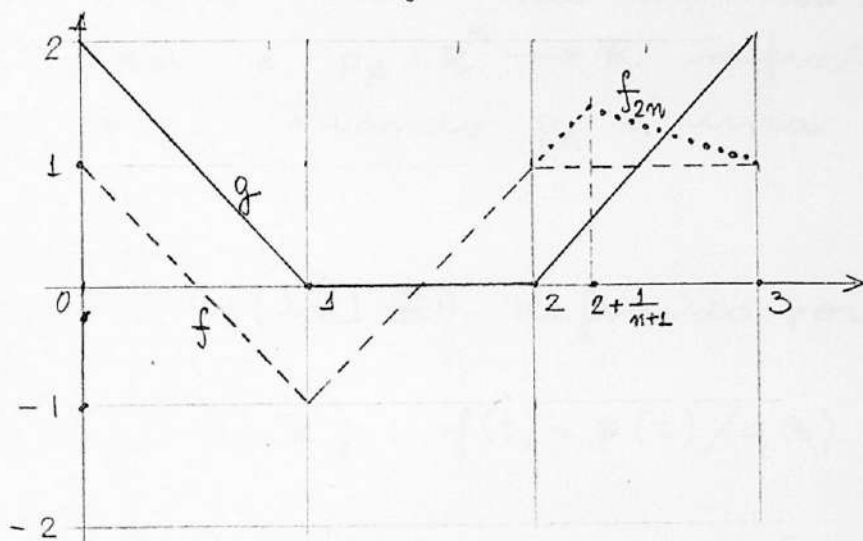
$$g(t) = \begin{cases} 2-2t & \text{se } t \in [0,1] \\ 0 & \text{se } t \in [1,2] \\ -4+2t & \text{se } t \in [2,3] \end{cases}$$

Como $\dim L = 1$, L é E -subespaço.

Seja f definida por:

$$f(t) = \begin{cases} 1-2t & \text{se } t \in [0,1] \\ -3+2t & \text{se } t \in [1,2] \\ 1 & \text{se } t \in [2,3] \end{cases}$$

Consideraremos ainda uma sequência $f_n \rightarrow f$ cujos elementos de índices pares e ímpares representamos nos gráficos abaixo:



Pelo exame dos gráficos é fácil perceber que

$$\pi_L(f) = \{ \alpha g : 0 \leq \alpha \leq 1 \}$$

$$\pi_L(f_{2m-1}) = \{0\}, \quad \pi_L(f_{2m}) = \{g\}$$

Portanto não pode haver seleção contínua σ .

§5 - Exercícios

5.1 Exercício

Seja $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma norma, A uma matriz $n \times n$ e $p_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $p_A(x) = \|Ax\|$. Quando p_A é uma norma?

5.2 Exercício

Seja $A \subset C([a,b], \mathbb{R})$ definido por

$$A = \{ f \in C([a,b], \mathbb{R}) : f(t) = p(t)/q(t), a \leq t \leq b,$$

$$\left. \begin{array}{l} p, q \text{ são polinômios de grau } \leq n \text{ e} \\ q(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b] \end{array} \right\}$$

Mostre que A não é convexo.

5.3 Exercício

Seja X espaço normado, $A \subset X$ um subespaço

Então:

$$\Pi_A\{y\} = y + \Pi_A\{0\}, \quad y \in A.$$

5.4 Exercício

Prove o corolário 2.9

5.5 Exercício

Seja X normado, $A \subset X$ subespaço de dimensão finita. Então A é fechado.

5.6 Exercício

Seja $\|\cdot\|: C([a,b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ a norma definida por $\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$. Mostre que esta norma não é estritamente convexa.

5.7 Exercício

Seja $E = C'([0,1], \mathbb{R})$ e $L_1, L_2: E \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$L_1 f = f(x_0), \quad L_2 f = f'(x_0), \quad x_0 \in [0,1].$$

L_1 e L_2 são formas lineares.

L_1 é contínua com a norma $\|\cdot\|_\infty$ e com a norma definida por

$$\|f\| = \left(\int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2) dt \right)^{1/2}$$

L_1 não é contínua com a norma $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p < \infty$.

L_2 não é contínua com a norma $\|\cdot\|_\infty$.

5.8 Exercício

Seja $E = C([0,1] \times [0,1], \mathbb{R})$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Seja $Lf = \frac{1}{2} (f(0,0) - f(0,1))$. Mostre que $L \in E'$ e $\|L\| = 1$.

5.9 Exercício

Seja E normado, $A \subseteq E$ um subespaço vetorial e $f_0: A \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma linear contínua sobre A . Prove que f_0 pode ser estendida a uma forma linear contínua f sobre E .

Sugestão: use o Teorema de Hahn-Banach.

5.10 Exercício

Seja E normado e $a \in E$. Prove que existe $f \in E'$ tal que $f(a) = \|a\|$ e $|f(x)| \leq \|x\|$, $\forall x \in E$.

5.11 Exercício

Seja E normado e $a \in E$. Prove que $f(a) = 0, \forall f \in E'$ implica $a = 0$.

5.12 Exercício

Seja $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ com a norma $\|\cdot\|_p, 1 \leq p < \infty$.

Sejam

$$A = \{f \in E : f(x) = 0, \forall x \in [\frac{1}{2}, 1]\}.$$

$$f_0 \in E \setminus A$$

$g \in C([0, 1], \mathbb{R})$ tal que $g(x) = 0 \quad \forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ e $\|g\|_q = 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$f \in A.$$

Mostre que:

$$\left| \int_0^1 f_0(t) g(t) dt \right| \leq d_A(f_0) \leq \left(\int_0^1 |f(t) - f_0(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

Sugestão: considere a forma linear L definida por

$$L f = \int_0^1 f(t) g(t) dt$$

Seja $f_0(t) \equiv 1$. Escolhendo convenientemente f e g mostre que $d_A(f_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p}$

Exercício

Seja $E = C([0,1] \times [0,1], \mathbb{R})$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$ e $f_0(x,y) = x^2 + y^2$.

Seja $L = \{ f \in C([0,1] \times [0,1], \mathbb{R}) : f(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 xy \}$

Mostre que $d_L(f_0) = \frac{1}{2}$

Sugestão: considere $f(x,y) = 2xy + \frac{1}{2}$ e

$$L f = c_1 f(0,0) + c_2 f(0,1) + c_3 f(1,0) + c_4 f(1,1).$$

Capítulo II

O PROBLEMA DE CHEBYSHEV

§1. Existência

1.1 O problema de Chebyshev

É o problema da aproximação ótima quando o espaço considerado é $C(X, \mathbb{R})$, X compacto, sep. com a norma $\| \cdot \|$ definida por

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in X} |f(x)|$$

1.2 Observações

i) Se $A \subset C(X, \mathbb{R})$ é um subespaço de dimensão finita, sabemos (Prop. 2.8) que A é um E -subconjunto.

ii) Se A é E -subconjunto, A é fechado.

1.3 Definição

Seja Y um espaço normado.

Definimos um modo de convergência em Y como uma relação $\rightsquigarrow$ entre seqüências (x_n) , $x_n \in Y$ e elementos de Y satisfazendo as duas condições:

$$MC1 : (x_n) \rightsquigarrow x \quad \Rightarrow \quad (x_n + y) \rightsquigarrow x + y$$

$$MC2 : (x_n) \rightsquigarrow x \quad \Rightarrow \quad \|x\| \leq \overline{\lim} \|x_n\|.$$

1.4 Proposição

Seja Y um espaço normado e $A \subset Y$ com a propriedade:

$$\ll x \in Y \setminus A, y_n \in A, \|x - y_n\| \rightarrow d_A(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \text{ sub-sequência } (y_{m_k}) \text{ e } y \in A \text{ tais que } (y_{m_k}) \xrightarrow{m} y \gg$$

Então $y \in \Pi_A(x)$ e A é E -subconjunto.

Prova

Dado $x \in Y \setminus A$ existe (y_n) tal que $\|x - y_n\| \rightarrow d_A(x)$.

Por hipótese existe sub-sequência (y_{m_k}) e $y \in A$ tais que $(y_{m_k}) \xrightarrow{m} y$.

Por MC1, $(-x + y_{m_k}) \xrightarrow{m} -x + y$.

$$\begin{aligned} \text{Por MC2} \quad \|x - y\| &= \|-x + y\| \leq \overline{\lim} \| -x + y_{m_k} \| = \\ &= \lim \|x - y_{m_k}\| = d_A(x). \end{aligned}$$

Como $y \in A$, temos $y \in \Pi_A(x)$.

q.e.d.

1.5 Exemplo

Seja $Y = C(X, \mathbb{R})$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$.

Definamos $\xrightarrow{m}$ por:

$$(f_m) \xrightarrow{m} f \stackrel{\text{def.}}{\iff} \exists D \subset X, \text{ denso, tal que } f_m(x) \rightarrow f(x), \forall x \in D.$$

A verificação de MC1 é trivial.

Verifiquemos MC2.

Dado $\varepsilon > 0$ e $x \in D$, existe $k_0(\varepsilon, x)$ tal que para $\forall k \geq k_0(\varepsilon, x)$ temos:

$$|\varphi(x)| \leq |\varphi_k(x)| + \varepsilon$$

Portanto, teremos:

$$|\varphi(x)| \leq \sup_{k \geq n} |\varphi_k(x)| + \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in D$$

$$|\varphi(x)| \leq \sup_{x \in X} \sup_{k \geq n} |\varphi_k(x)| + \varepsilon =$$

$$= \sup_{k \geq n} \sup_{x \in X} |\varphi_k(x)| + \varepsilon =$$

$$= \sup_{k \geq n} \|\varphi_k\|_{\infty} + \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in D$$

$$|\varphi(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \|\varphi_k\| + \varepsilon =$$

$$= \overline{\lim} \|\varphi_k\|_{\infty} + \varepsilon \quad \forall x \in D$$

$$\|\varphi\|_{\infty} = \sup_{x \in D} |\varphi(x)| \leq \overline{\lim} \|\varphi_k\|_{\infty} + \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, $\|\varphi\|_{\infty} \leq \overline{\lim} \|\varphi_k\|_{\infty}$.

1.6 Exemplo.

Temos casos particulares do exemplo 1.5 quando $D = X$, ou $D = X \setminus F$ onde $\text{card } F < \infty$.

1.7 Proposição

Sejam $C(X, \mathbb{R})$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$, $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$
 $\Phi: \mathcal{P} \rightarrow C(X, \mathbb{R})$ e $A = \Phi(\mathcal{P})$. Se:

i) Dado $M > 0$ existe $N > 0$ tal que
 $a \in \mathcal{P}, \|\Phi(a)\| \leq M \Rightarrow \|a\| \leq N$.

ii) $\overline{\{a \in \mathcal{P} : \|\Phi(a)\| \leq M\}} \subset \mathcal{P}, \forall M > 0$.

iii) $a_k, a \in \mathcal{P}$ e $a_k \rightarrow a \Rightarrow \Phi(a_k) \xrightarrow{m} \Phi(a)$.

Então A é E -subconjunto.

Prova

Vamos aplicar a proposição 1.4.

Seja $f \in C(X, \mathbb{R}) \setminus A$ e $(\varphi_k), \varphi_k \in A$, tal que

$$\|f - \varphi_k\| \rightarrow d_A(f)$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe k_0 tal que para $k \geq k_0$

$$\|f - \varphi_k\| \leq d_A(f) + \varepsilon$$

donde $\|\varphi_k\| \leq \|f\| + d_A(f) + \varepsilon$

Logo existe $M > 0$ tal que

$$\|\varphi_k\| \leq M, \quad \forall k.$$

Existem a_k tais que $\Phi(a_k) = \varphi_k$.

Como $\|\Phi(a_k)\| \leq M$ temos por i) que existe $N > 0$ tal que $\|a_k\| \leq N, \quad \forall k$.

Pela compacidade da bola fechada no $\mathbb{R}^n$ (a_k) admite sub-sequência convergente (a_{k_j}) .

Seja $(a_{k_j}) \rightarrow \bar{a}$. Por ii) $\bar{a} \in \mathcal{P}$.

Por iii) $\Phi(a_{k_j}) \rightharpoonup \Phi(\bar{a})$.

Portanto pela proposição 1.4, A é E -subconjunto
c.q.d.

1.8 Observação

Seja $\Phi: \mathcal{P} \rightarrow C(X, \mathbb{R})$ e $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ fechado.
Então se Φ satisfaz as hipóteses da proposição 1.7
 $\Phi_0 = \Phi|_{\mathcal{P} \cap \mathcal{F}}$ também satisfaz.

1.9 Notação

Seja X compacto separado, $P, Q \subset C(X, \mathbb{R})$
subespaços de dimensões respectivamente n
e m ; $\text{card } X \geq n+m-1$. Se $q \in Q, q \neq 0$,
indicaremos por X_q o conjunto

$$X_q = \{x \in X : q(x) \neq 0\}$$

Indicaremos por $R_{P,Q}(X)$, $R_{P,Q^+}(X)$, $R_{P,Q^{++}}(X)$ os subconjuntos:

$$R_{P,Q}(X) = \left\{ \varphi \in C(X, \mathbb{R}) : \exists p \in P, q \in Q \text{ tais que } q \neq 0, \right. \\ \left. \varphi(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \forall x \in X_q \right\}$$

$$R_{P,Q^+}(X) = \left\{ \varphi \in C(X, \mathbb{R}) : \exists p \in P, q \in Q \text{ tais que } q \neq 0; \right. \\ \left. q(x) \geq 0, \forall x \in X; \varphi(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \forall x \in X_q \right\}$$

$$R_{P,Q^{++}}(X) = \left\{ \varphi \in C(X, \mathbb{R}) : \exists p \in P, q \in Q \text{ tais que } \right. \\ \left. q(x) > 0, \forall x \in X; \varphi(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \forall x \in X \right\}$$

1.10 Proposição

Sejam $P, Q \subset C(X, \mathbb{R})$ como em 1.9, satisfazendo:

i) $q \in Q, q \neq 0 \Rightarrow X_q$ é denso em X .

ii) $(p \in P, q \in Q, q \neq 0, |p(x)| \leq K|q(x)| \forall x \in X) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{p}{q}$ é uniformemente contínuo em X_q

Então $R_{P,Q}(X)$ é E -subconjunto.

Prova

Seja $p_1, p_2, \dots, p_n$ uma base de P e $q_1, q_2, \dots, q_m$ uma base de Q . Dado $a \in \mathbb{R}^{n+m}$ sejam p_a e q_a definidos por

$$p_a(x) = \sum_{i=1}^n a_i p_i(x), \quad q_a(x) = \sum_{i=1}^m a_{n+i} q_i(x)$$

Definindo $\mathcal{P}$ por

$$\mathcal{P} = \{ a \in \mathbb{R}^{n+m} : \|a\| = 1, \exists K_a \text{ tal que}$$

$$|p_a(x)| \leq K_a |q_a(x)|, \forall x \in X \}$$

e $\Phi : \mathcal{P} \rightarrow C(X, \mathbb{R})$ por

$\Phi(a) =$ prolongamento por continuidade de $\frac{p_a}{q_a}$ definido em X_{q_a} a todo X .

é fácil verificarmos que $\Phi(\mathcal{P}) = R_{PQ}(X)$.

Verifiquemos as hipóteses da proposição 1.7.

Como $a \in \mathcal{P} \Rightarrow \|a\| = 1$ (i) está satisfeita.

Sejam $a_k \in \{ a \in \mathcal{P} : \|\Phi(a)\| \leq M \}$ tais que $a_k \rightarrow \bar{a}$.

Como $\Phi(a_k) \in R_{PQ}(X)$, temos

$$\frac{p_{a_k}(x)}{q_{a_k}(x)} = \Phi(a_k)(x) \quad , \quad \forall x \in X_{q_{a_k}}$$

donde
$$\frac{|p_{a_k}(x)|}{|q_{a_k}(x)|} \leq \|\Phi(a_k)\| \leq M \quad \forall x \in X_{q_{a_k}}$$

Como $X_{q_{a_k}}$ é denso em X temos

$$|p_{a_k}(x)| \leq M |q_{a_k}(x)| \quad , \quad \forall x \in X$$

Fazendo $a_k \rightarrow \bar{a}$ obtemos

$$|p_{\bar{a}}(x)| \leq M |q_{\bar{a}}(x)| \quad , \quad \forall x \in X$$

e $\|\bar{a}\| = 1$. Logo $\bar{a} \in \mathcal{P}$ o que verifica a hipótese ii da proposição 1.7

(Neste caso como temos ainda $\|\Phi(\bar{a})\| \leq M$ usuetá que $\{a \in \mathcal{P} : \|\Phi(a)\| \leq M\}$ é fechado.)

Seja $a_k, a_0 \in \mathcal{P}$, $a_k \rightarrow a_0$. Indiquemos $X_{q_{a_k}}$ por X_k . Como X é espaço de Baire e os X_k , $k=0,1,\dots$ são abertos densos, então $D = \bigcap_0^\infty X_k$ é denso em X .

Como $p_{a_k}(x) \rightarrow p_{a_0}(x)$ e $q_{a_k}(x) \rightarrow q_{a_0}(x) \quad \forall x \in X$ resulta $\Phi(a_k)(x) \rightarrow \Phi(a_0)(x) \quad , \quad \forall x \in D$.

Logo $\Phi(a_k) \xrightarrow{w} \Phi(a_0)$. q.e.d.

1.11 Corolário

Com as mesmas hipóteses da proposição 1.10 temos que $R_{PQ^+}(X)$ é E -subconjunto.

Prova

Decorre da observação 1.8.

1.12 Exercício

Verifique a afirmação feita na prova da proposição 1.10 que $\Phi(P) = R_{PQ}(X)$.

1.13 Exercício

Sejam P e Q subespaços de funções analíticas numa região que contém o intervalo $[a, b]$, $a < b$ da reta. Mostre que neste caso $R_{PQ^+}([a, b])$ é E -subconjunto.

1.14 Exercício

Seja $X \in \mathbb{R}$ e sejam P, Q os subespaços dos polinômios de graus respectivamente menores que n e menores que m .

Denotemos:

$$R_m^n(X) = R_{PQ^{++}}(X)$$

Mostre que $R_m^n(X) = R_{PQ^+}(X)$ e que $R_m^n([a, b])$, $a < b$, é E -subconjunto.

1.15 Exemplo

Mostremos que $R_2^1(\{0, 1\})$ não é E -subconjunto.

Seja $f \in C(\{0,1\}, \mathbb{R})$ definido por $f(x) = x$.
Temos que $f \notin R'_2(\{0,1\})$. De fato, caso contrário deveríamos ter:

$$f(0) = \frac{a_1}{a_2} = 0 \quad , \quad f(1) = \frac{a_1}{a_2 + a_3} = 1$$

o que é impossível.

Seja $\varphi_k \in R'_2(\{0,1\})$, $k = 1, 2, \dots$ definido por

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k - (k-1)x} \quad , \quad x \in \{0,1\}.$$

Como $\|f - \varphi_k\| = \max(|0 - \frac{1}{k}|, |1 - 1|) = \frac{1}{k}$

temos que $\varphi_k \rightarrow f$. Logo $R'_2(\{0,1\})$ não é fechado e portanto não é E-subconjunto.

1.16 Exercício

Mostre que $R_{P,Q^{++}}([0,1])$ onde $P \in Q$ tem como bases p_1 e q_1, q_2 definidos por:

$$p_1(x) = x^2, \quad q_1(x) = 1, \quad q_2(x) = x \quad \forall x \in [0,1],$$

não é E-subconjunto.

Sugestão: mostre que f definida por $f(x) = x$ é aderente a $R_{P,Q^{++}}([0,1])$ mas não pertence a ele.

1.17 Notação

Seja $R_{P,Q,\delta}(X) \subset C(X, \mathbb{R})$ definido por:

$$R_{P,Q,\delta}(X) = \left\{ \varphi \in C(X, \mathbb{R}) : \varphi(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \forall x \in X, \quad p \in P, q \in Q, q(x) \geq \delta \right\}$$

1.18 Exercício

Use a proposição 1.7 para mostrar que $R_{P,Q,\delta}(X)$ é E -subconjunto.

1.19 Exercício

Seja $P = \mathbb{R}^3$ e $\Phi : P \rightarrow C([0,1], \mathbb{R})$ definida por $\Phi(a,b,t)(x) = a + be^{tx}$, $\forall x \in [0,1]$.

Mostre que a hipótese i) da proposição 1.7 não é satisfeita.

Que restrição sobre o parâmetro t podemos introduzir de forma que Φ restrita ao novo conjunto de parâmetros $P_0 \subset \mathbb{R}^3$ satisfaça a hipótese i) ?

1.20 Exercício

Seja $R_m^n([a,b]) \subset C([a,b], \mathbb{R})$.

Mostre que $R_m^n([a,b])$ é um E -subconjunto relativamente a norma

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} w(x) |f(x)|$$

onde $w \in C([a,b], \mathbb{R})$ e $w(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$.

1.21 Exercício

Seja $P, Q \subset C(X, \mathbb{R})$ subespaços de dimensão finita.

Se $q \in Q$, $q \neq 0 \Rightarrow X_q$ é denso em X , então

$R_{P,Q}(X)$ e $R_{P,Q^+}(X)$ são fechados.

1.22 Observação

Sem a hipótese ii) a proposição 1.10 não é verdadeira. $R_{PQ}(X)$ e $R_{PQ^+}(X)$ são fechados (exercício 1.17) mas podem não ser E -subconjuntos como se mostra no exemplo 1.19.

1.23 Exemplo

Seja $X = [-1, 1]$, $\dim P = 1$, $p_1(x) = x$
 $\dim Q = 2$, $q_1(x) = 1$, $q_2(x) = |x|$.

Temos como é fácil ver:

$q \in Q$, $q \neq 0 \Rightarrow X_q$ é denso em $[-1, 1]$.

$\varphi \in R_{PQ}(X)$ se existem a, b, c tais que

$$\varphi(x) = \frac{cx}{a + b|x|}$$

para todo x que não anula o denominador. Como φ é contínua o denominador não pode admitir zeros em $[-1, 1]$ pois que se $x \neq 0$, $x \in [-1, 1]$ anula o denominador φ teria um polo neste ponto e se $x = 0$ anula o denominador φ não seria contínua em $x = 0$. Portanto teremos:

$$\begin{aligned} R_{PQ}(X) &= R_{PQ^+}(X) = R_{PQ^{++}}(X) = \\ &= \left\{ \varphi \in C([-1, 1], \mathbb{R}) : \varphi = \frac{p}{q}, p \in P, q \in Q, q(x) > 0 \forall x \in [-1, 1] \right\} \end{aligned}$$

Seja $f \in C([-1, 1], \mathbb{R})$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -2x + 2 & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ -f(-x) & \text{se } x \in [-1, 0] \end{cases}$$

i) Mostremos que $\|f - \varphi\| > \frac{1}{2}$, $\forall \varphi \in R_{PQ}(X)$.

Fazendo $x=0$, $a + b|x| > 0 \Rightarrow a > 0$.

$$\varphi'(x) = \frac{ac}{(a + b|x|)^2}$$

Se $c \leq 0$ teremos $\varphi(x) \geq 0$ em $[-1, 0]$ e $\varphi(x) \leq 0$ em $[0, 1]$ e portanto $\|f - \varphi\| \geq 1 > \frac{1}{2}$.

Se $c > 0$, $\varphi'(x) > 0$ isto é φ é estritamente crescente em $[-1, 1]$. Teremos então:

$$\begin{aligned} \|f - \varphi\| &\geq \max(|f(\frac{1}{2}) - \varphi(\frac{1}{2})|, |f(1) - \varphi(1)|) = \\ &= \max(|1 - \varphi(\frac{1}{2})|, |\varphi(1)|) \end{aligned}$$

Se $\varphi(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$ vem $|1 - \varphi(\frac{1}{2})| > \frac{1}{2}$

Se $\varphi(\frac{1}{2}) \geq \frac{1}{2}$ como φ é estritamente crescente vem $|\varphi(1)| > \frac{1}{2}$.

Logo em qualquer caso $\|f - \varphi\| > \frac{1}{2}$.

ii) Sejam $\varphi_k \in R_{pq}(x)$ definidos por:

$$\varphi_k(x) = \frac{kx}{1 + 2k|x|}$$

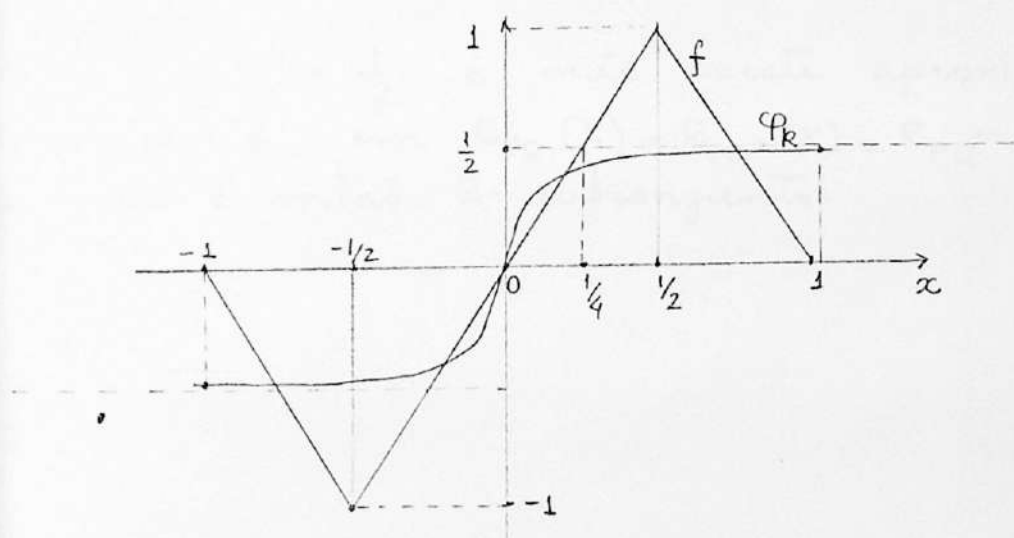
Mostremos que $\|f - \varphi_k\| \rightarrow \frac{1}{2}$

Como f e φ são funções ímpares temos:

$$\|f - \varphi_k\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - \varphi_k(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - \varphi_k(x)|$$

$$\varphi'_k(x) > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = \frac{1}{2}$$

Portanto $0 \leq \varphi_k(x) < \frac{1}{2} \quad \forall x \in [0, 1]$.



Como $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ e $0 \leq \varphi_k(x) < \frac{1}{2}$ em $[0, \frac{1}{4}]$ temos:

$$\max_{[0, \frac{1}{4}]} |f(x) - \varphi_k(x)| < \frac{1}{2}.$$

No intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $f - \varphi_k$ é crescente

De fato

$$\begin{aligned} f'(x) - \varphi_k'(x) &= 2 - \frac{k}{(1+2kx)^2} \geq 2 - \frac{k}{(1+2k\frac{1}{4})^2} = \\ &= 2 - \frac{4k}{(2+k)^2} > 1 \end{aligned}$$

Portanto $\max_{x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]} |f(x) - \varphi_k(x)| = |f(\frac{1}{2}) - \varphi_k(\frac{1}{2})| = \frac{1}{2} \frac{k+2}{k+1}$

Como em $[\frac{1}{2}, 1]$ f é decrescente e $\varphi_k(x) < \frac{1}{2}$ resulta

$$\|f - \varphi_k\| = \frac{1}{2} \frac{k+2}{k+1} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{qdo } k \rightarrow \infty.$$

Então $d_R(f) = \frac{1}{2}$ e não existe aproximante ótimo de f em $R_{PQ}(X) = R_{PQ^+}(X) = R_{PQ^{++}}(X)$, que não é então E -subconjunto.

§2 - sub-espacos de Haar

2.1 Definição

Dizemos que um sub-espaco de dimensão finita $L \subset C(X, \mathbb{R})$ é sub-espaco de Haar se:

$$\text{card} \{x \in X : \varphi(x) = 0\} < \dim L, \forall \varphi \in L, \varphi \neq 0.$$

2.2 Proposição

São equivalentes as afirmações:

i) $L \subset C(X, \mathbb{R})$ é sub-espaco de Haar, $\dim L = n$.

ii) Se $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ é uma base de L e $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ são distintos então $\det [\varphi_i(x_j)] \neq 0$.

iii) Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ distintos e $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ existe e é único $\varphi \in L$ tal que $\varphi(x_j) = b_j, j = 1, 2, \dots, n$.

Prova

i) $\Rightarrow$ ii)

Seja $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$ tal que $\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x_j) = 0$
 $j = 1, 2, \dots, n$.

Como L é de Haar isto implica $\varphi = 0$, isto é $a_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$. Isso só é possível se $\det [\varphi_i(x_j)] \neq 0$.

ii) $\Rightarrow$ iii)

Seja $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$. As condições $\varphi(x_j) = b_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ podem se escrever:

$$\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x_j) = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Como $\det[\varphi_i(x_j)] \neq 0$, o sistema admite solução única.

iii) $\Rightarrow$ i)

Seja $b_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Existe $\varphi \in L$ único tal que $\varphi(x_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Mas $\varphi = 0$ satisfaz essas condições. C.q.d.

2.3 Lema

Seja $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ uma base de um sub-espaço de Haar $L \subset C([a, b], \mathbb{R})$ e sejam $x_i, y_i \in [a, b]$ tais que $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ e $y_1 < y_2 < \dots < y_n$. Então:

$$\text{sgn det}[\varphi_i(x_j)] = \text{sgn det}[\varphi_i(y_j)]$$

Prova

A função $H: [a, b]^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$H(z_1, z_2, \dots, z_n) = \det[\varphi_i(z_j)]$$

é contínua.

Suponhamos (por absurdo) que fosse

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0 < H(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Seja $F: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$F(\lambda) = H(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1, \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2, \dots, \lambda x_n + (1-\lambda)y_n)$$

Então $F(0) > 0$ e $F(1) < 0$. Pela continuidade de F existe $\bar{\lambda}$ tal que $F(\bar{\lambda}) = 0$.

Como L é de Haar, deveriam então existir dois índices $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ distintos tais que

$$\bar{\lambda} x_i + (1-\bar{\lambda}) y_i = \bar{\lambda} x_j + (1-\bar{\lambda}) y_j$$

donde
$$\bar{\lambda} (x_i - x_j) = -(1-\bar{\lambda}) (y_i - y_j)$$

$$\operatorname{sgn}(x_i - x_j) = -\operatorname{sgn}(y_i - y_j)$$

contradizendo a hipótese.

q.e.d.

2.4 Lema

Seja $L \subset C([a,b], \mathbb{R})$ sub-espaco de Haar de dimensão n e $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ pontos de $[a,b]$. Então existe $\lambda \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\lambda \neq 0$ único a menos de um fator, tal que:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \varphi(x_i) = 0, \quad \forall \varphi \in L$$

Além disso vale $\lambda_i \lambda_{i+1} < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Prova

Seja $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ uma base de L .

$$\varphi(x_j) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x_j) \quad j=1, 2, \dots, n+1$$

implica:

$$\det \begin{bmatrix} \varphi(x_1) & \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi(x_2) & \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(x_{n+1}) & \varphi_1(x_{n+1}) & \varphi_2(x_{n+1}) & \dots & \varphi_n(x_{n+1}) \end{bmatrix} = 0$$

Desenvolvendo pela regra de Laplace em relação à primeira coluna obtemos

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \varphi(x_i) = 0$$

onde $\lambda_1 = H(x_2, x_3, \dots, x_{n+1})$,

$$\lambda_i = (-1)^{i-1} H(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}), \quad i=2, 3, \dots, n$$

$$\lambda_{n+1} = (-1)^n H(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Como L é de Haar, $\lambda_i \neq 0$, $i=1, 2, \dots, n+1$.

Pelo lema 2.3 os λ_i tem sinais alternados.

Sejam μ_i , $i=1, 2, \dots, n+1$ tais que $\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \varphi(x_i) = 0$
 $\forall \varphi \in L$, e não todos nulos.

Suponhamos para fixar ideias que $\mu_{n+1} \neq 0$.

Podemos então supor $\lambda_{m+1} = \mu_{m+1}$.

Resulta

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) \varphi(x_i) = 0 \quad \forall \varphi \in L.$$

Seja $\varphi \in L$ tal que $\varphi(x_i) = \delta_{ik}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

Resulta $\lambda_k - \mu_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

q.e.d.

2.5 Definição

Sejam $g_1, g_2, \dots, g_n \in C([a, b], \mathbb{R})$ de classe C^{n-1} .
A função $W(g_1, g_2, \dots, g_n): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$W(g_1, g_2, \dots, g_n)(x) = \det \begin{bmatrix} g_1(x) & \frac{d}{dx} g_1(x) & \dots & \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} g_1(x) \\ g_2(x) & \frac{d}{dx} g_2(x) & \dots & \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} g_2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n(x) & \frac{d}{dx} g_n(x) & \dots & \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} g_n(x) \end{bmatrix}$$

e' chamada Wronskiano de $g_1, g_2, \dots, g_n$

2.6 Exercício

Verifique as propriedades:

2.6.1 W é multilinear em $g_1, g_2, \dots, g_n$.

2.6.2 Sejam $g_1, g_2, \dots, g_n$ de classe C^n . Então

$$W(1, g_1, g_2, \dots, g_n) = W(g_1', g_2', \dots, g_n')$$

2.6.3 Sejam $f, g_1, g_2, \dots, g_n$ de classe C^{n-1} . Então

$$W(fg_1, fg_2, \dots, fg_n) = f^n W(g_1, g_2, \dots, g_n)$$

2.6.4 Se $W(g_1, g_2, \dots, g_n) \neq 0$ então $g_1, g_2, \dots, g_n$ são linearmente independentes.

2.7 Proposição

Sejam $g_1, g_2, \dots, g_n \in C([a, b], \mathbb{R})$ de classe C^{n-1} tais que :

$$W(g_1, g_2, \dots, g_i)(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Então $g_1, g_2, \dots, g_n$ é uma base de um subespaço de Haar.

Prova (por indução sobre n)

Seja $n=1$.

$$W(g_1)(x) \neq 0, \forall x \Leftrightarrow g_1(x) \neq 0, \forall x.$$

a proposição é verdadeira.

Suponhamos verdadeira para n e provemos para $n+1$.

Seja $W(g_1, g_2, \dots, g_i)(x) \neq 0, \forall x \in [a, b], \forall i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ com $g_i, i=1, 2, \dots, n+1$ de classe C^n .

Por 2.6.4, $g_1, g_2, \dots, g_{n+1}$ são linearmente independentes. Resta mostrar que o subespaço gerado é de Haar.

$$W(g_1, g_2, \dots, g_{i+1}) = g_1^{i+1} W\left(1, \frac{g_2}{g_1}, \frac{g_3}{g_1}, \dots, \frac{g_{i+1}}{g_1}\right) =$$

$$= g_1^{i+1} W\left(\left(\frac{g_2}{g_1}\right)', \left(\frac{g_3}{g_1}\right)', \dots, \left(\frac{g_{i+1}}{g_1}\right)'\right)$$

Sejam $f_i = \left(\frac{g_{i+1}}{g_1}\right)'$ $i=1, 2, \dots, n$. Teremos que os f_i são de classe C^{n-1} e

$$W(f_1, f_2, \dots, f_i)(x) \neq 0, \forall x \in [a, b], \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Pela hipótese de indução $f_1, f_2, \dots, f_n$ é uma base de um sub-espaco de Haar.

Seja agora $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ pontos de $[a, b]$.

$$H = \det \begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_1(x_2) & \dots & g_1(x_{n+1}) \\ g_2(x_1) & g_2(x_2) & \dots & g_2(x_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n+1}(x_1) & g_{n+1}(x_2) & \dots & g_{n+1}(x_{n+1}) \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{g_2(x_1)}{g_1(x_1)} & \frac{g_2(x_2)}{g_1(x_2)} & \dots & \frac{g_2(x_{n+1})}{g_1(x_{n+1})} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{g_{n+1}(x_1)}{g_1(x_1)} & \frac{g_{n+1}(x_2)}{g_1(x_2)} & \dots & \frac{g_{n+1}(x_{n+1})}{g_1(x_{n+1})} \end{bmatrix} \prod_{i=1}^{n+1} g_1(x_i) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{g_2(x_1)}{g_1(x_1)} & \frac{g_2(x_2)}{g_1(x_2)} & \dots & \frac{g_2(x_{n+1})}{g_1(x_{n+1})} & \frac{g_2(x_n)}{g_1(x_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{g_{n+1}(x_1)}{g_1(x_1)} & \frac{g_{n+1}(x_2)}{g_1(x_2)} & \dots & \frac{g_{n+1}(x_{n+1})}{g_1(x_{n+1})} & \frac{g_{n+1}(x_n)}{g_1(x_n)} \end{bmatrix} \prod_{i=1}^{n+1} g_1(x_i) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \frac{g_2(x_2)}{g_1(x_2)} & \frac{g_2(x_1)}{g_1(x_1)} & \dots & \frac{g_2(x_{n+1})}{g_1(x_{n+1})} & \frac{g_2(x_n)}{g_1(x_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{g_{n+1}(x_2)}{g_1(x_2)} & \frac{g_{n+1}(x_1)}{g_1(x_1)} & \dots & \frac{g_{n+1}(x_{n+1})}{g_1(x_{n+1})} & \frac{g_{n+1}(x_n)}{g_1(x_n)} \end{bmatrix} \prod_{i=1}^{n+1} g_1(x_i)$$

Seja $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$F(t) = \det \begin{bmatrix} \frac{g_2(t)}{g_1(t)} & \frac{g_2(x_1)}{g_1(x_1)} & \frac{g_2(x_3)}{g_1(x_3)} & \frac{g_2(x_2)}{g_1(x_2)} & \dots & \frac{g_2(x_{n+1})}{g_1(x_{n+1})} & \frac{g_2(x_n)}{g_1(x_n)} \\ \frac{g_3(t)}{g_1(t)} & \frac{g_3(x_1)}{g_1(x_1)} & \frac{g_3(x_3)}{g_1(x_3)} & \frac{g_3(x_2)}{g_1(x_2)} & \dots & \frac{g_3(x_{n+1})}{g_1(x_{n+1})} & \frac{g_3(x_n)}{g_1(x_n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{g_{n+1}(t)}{g_1(t)} & \frac{g_{n+1}(x_1)}{g_1(x_1)} & \frac{g_{n+1}(x_3)}{g_1(x_3)} & \frac{g_{n+1}(x_2)}{g_1(x_2)} & \dots & \frac{g_{n+1}(x_{n+1})}{g_1(x_{n+1})} & \frac{g_{n+1}(x_n)}{g_1(x_n)} \end{bmatrix}$$

Pelo teorema da média existe s_1 , $x_1 < s_1 < x_2$ tal que $F(x_2) - F(x_1) = F'(s_1)(x_2 - x_1)$.

Resulta lembrando que $\left(\frac{g_2}{g_1}\right)' = f_1$:

$$H = \det \begin{bmatrix} f_1(s_1) & \frac{g_2(x_3)}{g_1(x_3)} - \frac{g_2(x_2)}{g_1(x_2)} & \dots & \frac{g_2(x_{n+1})}{g_1(x_{n+1})} - \frac{g_2(x_n)}{g_1(x_n)} \\ f_2(s_1) & \frac{g_3(x_3)}{g_1(x_3)} - \frac{g_3(x_2)}{g_1(x_2)} & \dots & \frac{g_3(x_{n+1})}{g_1(x_{n+1})} - \frac{g_3(x_n)}{g_1(x_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(s_1) & \frac{g_{n+1}(x_3)}{g_1(x_3)} - \frac{g_{n+1}(x_2)}{g_1(x_2)} & \dots & \frac{g_{n+1}(x_{n+1})}{g_1(x_{n+1})} - \frac{g_{n+1}(x_n)}{g_1(x_n)} \end{bmatrix} \prod_{i=1}^{n+1} g_1(x_i) (x_2 - x_1) \dots (x_{n+1} - x_n)$$

Repetindo-se a aplicação do teorema da média para as $n-1$ restantes colunas obtemos:

$$H = \det \begin{bmatrix} f_1(s_1) & f_1(s_2) & \dots & f_1(s_n) \\ f_2(s_1) & f_2(s_2) & \dots & f_2(s_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(s_1) & f_n(s_2) & \dots & f_n(s_n) \end{bmatrix} \prod_{i=1}^{n+1} g_1(x_i) \prod_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i)$$

Como $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ e $f_1, f_2, \dots, f_n$ é base de um subespaço de Haar, temos $H \neq 0$.
Portanto $g_1, g_2, \dots, g_{n+1}$ é base de um subespaço de Haar.
q.e.d.

2.8 Proposição

Seja $g_1, g_2, \dots, g_n \in C(X, \mathbb{R})$ uma base de um subespaço de Haar. Seja Y compacto separado com $\text{card } Y \geq n$ e $T: Y \rightarrow X$ é injetora contínua. Então $f_i = g_i \circ T$ $i = 1, 2, \dots, n$ é uma base de um subespaço de Haar em $C(Y, \mathbb{R})$.

Prova

Sejam $y_1, y_2, \dots, y_n \in Y$ distintos.

$$\sum_{i=1}^n a_i f_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i f_i(y_j) = 0 \quad j=1, 2, \dots, n.$$

$$\det [f_i(y_j)] = \det [g_i(Ty_j)]$$

como $Ty_j \in X$, $j=1, 2, \dots, n$ são distintos, resulta $\det [f_i(y_j)] \neq 0$. Logo $a_i = 0$ $i=1, 2, \dots, n$
e portanto $f_1, f_2, \dots, f_n$ é base de subespaço
de Haar. q.e.d.

2.9 Exercício

Seja $g_1, g_2, \dots, g_n \in C([a, b], \mathbb{R})$, $a < b$.
Mostre que $g_1, g_2, \dots, g_n$ é base de subespaço
de Haar nos seguintes casos:

2.9.1 $g_i(x) = x^{i-1}$, $i=1, 2, \dots, n$.

2.9.2 $0 \notin]a, b[$, $g_i(x) = x^{2i-2}$, $i=1, 2, \dots, n$

2.9.3 $0 \notin [a, b]$, $g_i(x) = x^{2i-1}$, $i=1, 2, \dots, n$

2.9.4 $x_1, x_2, \dots, x_n \notin [a, b]$ são distintos e

$$g_i(x) = (x - x_i)^{-1}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

2.9.5 $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ são distintos e

$$g_i(x) = e^{t_i x}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

2.9.6 Seja $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ injetora

$$g_i(x) = [f(x)]^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

2.9.7 $0 < a < b$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ distintos

$$g_i(x) = x^{\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

2.9.8 $0 < b - a < 2\pi$, $n = 2m + 1$,

$$g_1(x) = 1, \quad g_{2k}(x) = \cos kx, \quad g_{2k+1}(x) = \sin kx \\ k = 1, 2, \dots, m$$

2.9.9 $a = 0$, $b = \pi$

$$g_i(x) = \cos((i-1)x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

2.9.10 $0 < a < b < \pi$

$$g_i(x) = \sin ix, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2.9.11 $n \geq 3$

$$g_i(x) = x^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$g_n \text{ é de classe } C^{n-3} \text{ e } \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} g_n \text{ é}$$

estritamente convexa.

2.10 Definição

Seja $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ e $x_0 \in]a, b[$ tal que $f(x_0) = 0$. Diremos que x_0 é um zero duplo de f se existe uma vizinhança V de x_0 tal que $x, y \in V \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x)f(y) > 0$. Os zeros não duplos serão ditos simples.

2.11 Proposição

Seja $A \subset C([a, b], \mathbb{R})$ um subespaço de Haas de dimensão n , e $\varphi \in A$. Se $\varphi \neq 0$ então φ não pode ter mais que $n-1$ zeros onde os zeros duplos são contados duas vezes.

Prova

Suponhamos (por absurdo) que exista $\varphi \in A$ não nula com $r \geq 1$ zeros duplos $y_1, y_2, \dots, y_r$ e $m - 2r = s$ zeros simples $s \geq 0$.

Sejam $x_1, x_2, \dots, x_{m-r}$ pontos distintos entre si e distintos dos y_i $i=1, 2, \dots, r$, incluindo os zeros simples.

Seja σ_i igual a $+1$ ou -1 conforme φ seja positiva ou negativa na vizinhança de y_i . Seja $\varphi_\varepsilon \in A$ determinada por:

$$\varphi_\varepsilon(x_i) = \varphi(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, m-r$$

$$\varphi_\varepsilon(y_i) = \varphi(y_i) - \sigma_i \varepsilon$$

Teremos $\varphi_\varepsilon(x) \rightarrow \varphi(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

Como para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno φ_ε admite n zeros simples, resulta $\varphi_\varepsilon = 0$ e teríamos $\varphi = 0$. (contradição).
q.e.d.

2.12 Lema

Seja $A \subset C([a, b], \mathbb{R})$ subespaço de Haas de dimensão n . Então existe $\varphi \in A$ tal que $\varphi(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$.

Prova

Seja $S = \{x \in [a, b]^{n+1} : x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}\}$

Pelo lema 2.4 existem $\lambda_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e tais que $\lambda_i(x) \lambda_{i+1}(x) < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ e

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(x) \varphi(x_i) = 0, \quad \forall \varphi \in A.$$

Seja $F : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \frac{\left| \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(x) \right|}{\sum_{i=1}^{n+1} |\lambda_i(x)|}$$

F é contínua e pode ser estendida por continuidade a $\bar{S}$, adição de S , definindo $F(\bar{x}) = 0$ para $\forall \bar{x} \in \bar{S} \setminus S$.

De fato, se $\bar{x} \in \bar{S} \setminus S$, $\bar{x}$ tem no máximo n componentes distintas e portanto existe $\bar{\varphi} \in A$ tal que $\bar{\varphi}(\bar{x}_i) = 1$, $i = 1, 2, \dots, n+1$.
Então para $x \in S$ temos:

$$F(x) = \frac{\left| \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(x) (1 - \bar{\varphi}(x_i)) \right|}{\sum_{i=1}^{n+1} |\lambda_i(x)|} \leq \max_{1 \leq i \leq n+1} |1 - \bar{\varphi}(x_i)|$$

donde $F(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \bar{x}$, $x \in S$.

Como $\bar{S} = \{x \in [a, b]^{n+1} : x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n+1}\}$ é compacto existe $z \in \bar{S}$ tal que $F(z)$ é máximo

Se $F(z) = 0$ então $F(x) = 0$, $\forall x \in \bar{S}$ e isto implica como é fácil verificar que a função constante $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = 1$, $\forall x$ pertence a A e temos a tese verificada.

Seja agora $F(z) > 0$. Neste caso $z \in S$ isto é $z_1 < z_2 < \dots < z_{n+1}$.

Dado $x \in S$ seja $\varphi_x \in A$ tal que

$$\varphi_x(x_i) = 1 - (-1)^i \frac{\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x)}{\sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1$$

φ_x existe e é única pois que as primeiras n equações determinam φ_x univocamente e a última equação é uma combinação

linear das n primeiras com coeficientes
 $-\frac{\lambda_i(x)}{\lambda_{m+1}(x)}$, $i=1, 2, \dots, n$.

Mostremos que $\varphi_z(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$.

Se $F(z) \geq 1$ teríamos pela definição de $F(z)$ e de φ_z que φ_z teria n zeros (contados os duplos duas vezes) o que é impossível pois $\varphi_z \neq 0$.

Portanto $F(z) < 1$ donde $\varphi_z(z_i) > 0$, $i=1, 2, \dots, m+1$.

Suponhamos (por absurdo) que existisse $y \in [a, b]$ tal que $\varphi_z(y) \leq 0$.

Seja $z' \in S$ obtido de z substituindo-se uma das componentes de z por y de tal maneira que $1 - \varphi_z(z'_i)$ tenha sinais alternados. Então:

$$\begin{aligned} F(z') &= \frac{\left| \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i(z') \right|}{\sum_{i=1}^{m+1} |\lambda_i(z')|} = \frac{\left| \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i(z') (1 - \varphi_z(z'_i)) \right|}{\sum_{i=1}^{m+1} |\lambda_i(z')|} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{m+1} |\lambda_i(z')| |1 - \varphi_z(z'_i)|}{\sum_{i=1}^{m+1} |\lambda_i(z')|} > \min_{1 \leq i \leq m+1} |1 - \varphi_z(z'_i)| = F(z) \end{aligned}$$

o que contradiz a maximalidade de $F(z)$,
 q.e.d.

§3 - Teoremas de Caracterização3.1 Proposição

Sejam S um conjunto qualquer, $B(S, \mathbb{R})$ o espaço das funções reais limitadas definidas sobre S com a norma $\|\cdot\|_\infty$.

Sejam $A \subset B(S, \mathbb{R})$, $f \in B(S, \mathbb{R}) \setminus A$, $\varphi_0 \in A$ e $S_0 \subset S$. Se:

$$i) f(x) - \varphi_0(x) \neq 0, \quad \forall x \in S_0$$

$$ii) \text{ Não existe } \varphi \in A \text{ tal que } (f(x) - \varphi_0(x))(\varphi(x) - \varphi_0(x)) > 0, \quad \forall x \in S_0$$

então
$$\inf_{x \in S_0} |f(x) - \varphi_0(x)| \leq d_A(f)$$

Prova

Suponhamos (por absurdo) que

$$d_A(f) < \inf_{x \in S_0} |f(x) - \varphi_0(x)|$$

Pela definição de $d_A(f)$ existe $\varphi \in A$ tal que

$$\|f - \varphi\| < \inf_{x \in S_0} |f(x) - \varphi_0(x)|$$

Portanto $|f(x) - \varphi(x)| < |f(x) - \varphi_0(x)|$, $\forall x \in S_0$

Para $\forall x \in S_0$ podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 (f(x) - \varphi_0(x))(\varphi(x) - \varphi_0(x)) &= \\
 &= (f(x) - \varphi_0(x)) \left[(f(x) - \varphi_0(x)) - (f(x) - \varphi(x)) \right] = \\
 &= (f(x) - \varphi_0(x))^2 - (f(x) - \varphi_0(x))(f(x) - \varphi(x)) \geq \\
 &\geq |f(x) - \varphi_0(x)|^2 - |f(x) - \varphi_0(x)| |f(x) - \varphi(x)| = \\
 &= |f(x) - \varphi_0(x)| (|f(x) - \varphi_0(x)| - |f(x) - \varphi(x)|) > 0
 \end{aligned}$$

contrariando a hipótese (ii). q.e.d.

3.2 Exemplo

Sejam $S \subset \mathbb{R}^2$, $A \subset B(S, \mathbb{R})$ subespaço gerado por $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ definidas por $\varphi_1(x, y) = 1$, $\varphi_2(x, y) = x$, $\varphi_3(x, y) = y$ e $S_0 = \{(0, 0), (0, 1), (0, b)\} \subset S$, $0 < b < 1$.

Suponhamos que $f \in B(S, \mathbb{R}) \setminus A$ é tal que

$$f(x) - \varphi_0(x) > 0 \quad \text{sobre } \{(0, 0), (0, 1)\}$$

$$\text{e } f(x) - \varphi_0(x) < 0 \quad \text{sobre } \{(0, b)\}$$

Verifiquemos se a hipótese ii) da proposição 3.1 é satisfeita.

Seja $\varphi \in A$, $\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3$ e tentemos impor as condições

$$\varphi(0,0) = \lambda_1 \varphi_1(0,0) + \lambda_2 \varphi_2(0,0) + \lambda_3 \varphi_3(0,0) > 0$$

$$\varphi(0,1) = \lambda_1 \varphi_1(0,1) + \lambda_2 \varphi_2(0,1) + \lambda_3 \varphi_3(0,1) > 0$$

$$\varphi(0,b) = \lambda_1 \varphi_1(0,b) + \lambda_2 \varphi_2(0,b) + \lambda_3 \varphi_3(0,b) < 0$$

isto é'

$$\begin{aligned} \lambda_1 &> 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 &> 0 \\ -\lambda_1 - b\lambda_3 &> 0 \end{aligned}$$

Somando-se a terceira desigualdade a cada uma das duas primeiras obtemos:

$$-b\lambda_3 > 0 \quad \text{e} \quad (1-b)\lambda_3 > 0$$

Como $-b$ e $(1-b)$ têm sinais opostos o sistema é incompatível. Logo a hipótese ii) é satisfeita.

3.3 Notação

Seja X compacto, separado e $f \in C(X, \mathbb{R})$.

Denotaremos por $\text{ext}(f)$ o conjunto

$$\text{ext}(f) = \{x \in X : |f(x)| = \|f\|\} \quad . \quad \text{É compacto.}$$

3.4 Proposição

Seja X compacto, separado, $A \subset C(X, \mathbb{R})$
 $f \in C(X, \mathbb{R}) \setminus A$, $\varphi_0 \in A$ e $K \subset X$ vizinhança
 compacta de $\text{ext}(f - \varphi_0)$.

Se existem $\varphi_k \in A$, $k = 1, 2, \dots$ tais que:

$$i) \varphi_k \rightarrow \varphi_0$$

$$ii) (f(x) - \varphi_0(x))(\varphi_k(x) - \varphi_0(x)) > 0, \forall x \in K, \forall k.$$

então $\varphi_0 \notin \Pi_A(f)$.

Prova

Mostremos que para k suficientemente elevado
 $\|f - \varphi_k\| < \|f - \varphi_0\|$.

i) Para $x \in K$ temos:

$$\begin{aligned} |f(x) - \varphi_k(x)| &= |(f(x) - \varphi_0(x)) - (\varphi_k(x) - \varphi_0(x))| = \\ &= |f(x) - \varphi_0(x)| \left| 1 - \frac{\varphi_k(x) - \varphi_0(x)}{f(x) - \varphi_0(x)} \right| = \\ &= |f(x) - \varphi_0(x)| \left| 1 - \frac{|\varphi_k(x) - \varphi_0(x)|}{|f(x) - \varphi_0(x)|} \right| \end{aligned}$$

$$\text{Seja } \varepsilon_k = \min \left(\frac{1}{k}, \min_{x \in K} |\varphi_k(x) - \varphi_0(x)| \right).$$

Temos $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \rightarrow 0$ e $|\varphi_k(x) - \varphi_0(x)| \geq \varepsilon_k$, $\forall x \in \overset{\circ}{K}$.
Portanto para todo $k \geq k_0$ para k_0 suficientemente grande resulta:

$$|f(x) - \varphi_k(x)| \leq \|f - \varphi_0\| \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{\|f - \varphi_0\|}\right) < \|f - \varphi_0\|$$

ii) Seja agora $x \in X \setminus \overset{\circ}{K}$.

Observe mos que $\text{ext}(f - \varphi_0) \cap (X \setminus \overset{\circ}{K}) = \emptyset$,
e que $X \setminus \overset{\circ}{K}$ é compacto.

$$\begin{aligned} |f(x) - \varphi_k(x)| &\leq |f(x) - \varphi_0(x)| + |\varphi_k(x) - \varphi_0(x)| \leq \\ &\leq \max_{X \setminus \overset{\circ}{K}} |f(x) - \varphi_0(x)| + |\varphi_k(x) - \varphi_0(x)|. \end{aligned}$$

Como $\varphi_k \rightarrow \varphi_0$ e $\max_{X \setminus \overset{\circ}{K}} |f(x) - \varphi_0(x)| < \|f - \varphi_0\|$

veremos que para $\forall k \geq k_1$ para k_1 suficientemente grande resulta:

$$|f(x) - \varphi_k(x)| < \|f - \varphi_0\|$$

Podemos concluir então que para k suficientemente grande $\|f - \varphi_k\| < \|f - \varphi_0\|$.

q.e.d.

3.5 Proposição

Seja X compacto, separado, $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$
 $\Phi: \mathcal{P} \rightarrow C(X, \mathbb{R})$, $A = \Phi(\mathcal{P})$ e $f \in C(X, \mathbb{R}) \setminus A$.
 Seja $a \in \mathring{\mathcal{P}}$, exista $\Phi'(a)$ e seja $L_a = \Phi'(a)(\mathbb{R}^n)$.
 Se existe $\varphi \in L_a$ tal que

$$(f(x) - \Phi(a)(x)) \varphi(x) > 0, \quad \forall x \in \text{ext}(f - \Phi(a))$$

então $\Phi(a) \notin \Pi_A(f)$.

Prova

Vamos aplicar a proposição 3.4

Por hipótese existe $b \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$(f(x) - \Phi(a)(x)) [\Phi'(a)b](x) > 0, \quad \forall x \in \text{ext}(f - \Phi(a))$$

Como $\text{ext}(f - \Phi(a))$ é compacto e $(f - \Phi(a))\Phi'(a)b$ é contínua, existe vizinhança compacta K de $\text{ext}(f - \Phi(a))$ tal que

$$(f(x) - \Phi(a)(x)) [\Phi'(a)b](x) > 0, \quad \forall x \in K.$$

Observe-se que esta desigualdade vale substituindo-se b por qualquer múltiplo λb , $\lambda > 0$. Podemos portanto supor que

$$a + \frac{1}{k} b \in \mathcal{P}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Seja $\varphi_k = \Phi(a + \frac{1}{k}b)$. Temos que $\varphi_k \in A$ e como

$$\begin{aligned} \|\varphi_k - \varphi_0\| &= \|\Phi(a + \frac{1}{k}b) - \Phi(a)\| = \\ &= \|\frac{1}{k} \Phi'(a)b + \omega(k)\| \leq \frac{1}{k} \|\Phi'(a)b\| + \|\omega(k)\| \end{aligned}$$

onde $\|\omega(k)\| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$,

resulta $\varphi_k \rightarrow \varphi_0$.

A hipótese i) da proposição 3.4 está satisfeita.

Verifiquemos a hipótese ii) da proposição 3.4.

Como $\|\omega(k)\|k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ existe k_0 tal que para $\forall k \geq k_0$ vale

$$\|\omega(k)\|k < \frac{1}{\|f - \Phi(a)\|} \min_{x \in K} \left\{ (f(x) - \Phi(a)(x)) [\Phi'(a)b](x) \right\}$$

Então:

$$\begin{aligned} (f(x) - \Phi(a)(x)) (\varphi_k(x) - \Phi(a)(x)) &= \\ &= (f(x) - \Phi(a)(x)) [\Phi(a + \frac{1}{k}b)(x) - \Phi(a)(x)] = \\ &= \frac{1}{k} (f(x) - \Phi(a)(x)) [\Phi'(a)b](x) + (f(x) - \Phi(a)(x)) \omega(k)(x) > 0 \end{aligned}$$

q.e.d.

3.6 Definição

Seja X compacto, separado, $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$,
 $\Phi: \mathcal{P} \rightarrow C(X, \mathbb{R})$.

Seja $a \in \mathcal{P}$, exista $\Phi'(a)$ e seja $L_a = \Phi'(a)(\mathbb{R}^n)$.
 Observe-mos que L_a é subespaço de $C(X, \mathbb{R})$
 e $\dim L_a \leq n$.

Dizemos que Φ satisfaz em $\underline{a}$ a
condição local de Haar se L_a é subespaço
 de Haar.

Dizemos que Φ satisfaz em $\underline{a}$ a
condição global de Haar se:

$$(b \in \mathcal{P}, \Phi(b) - \Phi(a) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{card} \{x \in X : \Phi(b)(x) - \Phi(a)(x) = 0\} < \dim L_a)$$

3.7 Exercício

Se $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow C(X, \mathbb{R})$ é linear, são equi-
 valentes:

i) $A = \Phi(\mathbb{R}^n)$ é subespaço de Haar.

ii) Φ satisfaz a condição local (global) de
 Haar para $\forall a \in \mathbb{R}^n$.

iii) $\exists a \in \mathbb{R}^n$ tal que Φ satisfaz a condição
 local (global) de Haar.

3.8 Exercício

Seja X compacto, separado, $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$,
 $\Phi: \mathcal{P} \rightarrow C(X, \mathbb{R})$. Seja $a \in \Omega \subset \mathcal{P}$, Ω aberto
 e $F: \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F(a, x) = \Phi(a)(x).$$

Mostre que se F é contínua e existem
 $\frac{\partial F}{\partial a_i}: \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas então existe

$$\Phi'(a) \text{ e vale } [\Phi'(a)b](x) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial F}{\partial a_i}(a, x)$$

3.9 Exercício

Seja X compacto, separado, $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$,
 $\Phi: \mathcal{P} \rightarrow C(X, \mathbb{R})$, $a \in \mathcal{P}$.

Seja $Y \subset X$ fechado, e $\Phi_Y: \mathcal{P} \rightarrow C(Y, \mathbb{R})$
 definida por:

$$\Phi_Y(a) = \Phi(a)|_Y.$$

Mostre que se existe $\Phi'(a)$ então existe $\Phi'_Y(a)$
 e $\Phi'_Y(a)b = [\Phi'(a)b]|_Y$.

3.10 Definição

Seja $f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$. Dizemos que
 f é alternante em r pontos de $[\alpha, \beta]$
 se existem $x_i \in [\alpha, \beta]$, $x_1 < x_2 < \dots < x_r$
 tais que

$$f(x_i) = \pm (-1)^i \|f\|, \quad i=1, 2, \dots, r.$$

3.11 Proposição

Sejam $P \subset \mathbb{R}^n$, $\Phi : P \rightarrow C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$, $A = \Phi(P)$,
 $f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R}) \setminus A$.

Seja $a \in P$, exista $\Phi'(a)$ e seja $L_a = \Phi'(a)(\mathbb{R}^n)$.
 Se Φ satisfaz em a a condição local de Haar
 e a condição global de Haar então $\Phi(a) \in \pi_A(f)$
 se e só se $f - \Phi(a)$ é alternante em
 $\dim L_a + 1$ pontos de $[\alpha, \beta]$.

Prova

i) Suponhamos que $f - \Phi(a)$ é alternante
 em $\dim L_a + 1$ pontos de $[\alpha, \beta]$ e provemos
 que $\|f - \Phi(a)\| = d_A(f)$.

Seja $r = \dim L_a + 1$ e $x_1 < x_2 < \dots < x_r$
 pontos de $[\alpha, \beta]$ nos quais $f - \Phi(a)$ alterna.

Podemos aplicar a proposição 3.1 fazendo
 $S = [\alpha, \beta]$, $S_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$
 É claro que $f(x_i) - \Phi(a)(x_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$
 o que satisfaz a hipótese i) da prop. 3.1.

Se existisse $b \in P$ tal que

$$(f(x_i) - \Phi(a)(x_i)) (\Phi(b)(x_i) - \Phi(a)(x_i)) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$\Phi(b) - \Phi(a)$ admitiria $r-1 = \dim L_a$ zeros
 e seria $\Phi(b) - \Phi(a) \neq 0$.

Mas isto contradiz a hipótese de que Φ satisfaz em $\underline{a}$ a condição global de Haar. Logo a hipótese (ii) da proposição 3.1 é verificada. Concluímos então que:

$$\|f - \Phi(a)\| = \inf_{1 \leq i \leq r} |f(x_i) - \Phi(a)(x_i)| \leq d_A(f) \leq \|f - \Phi(a)\|$$

isto é, $\|f - \Phi(a)\| = d_A(f)$.

ii) Suponhamos agora que $f - \Phi(a)$ não é alternante em $\dim L_a + 1$ pontos de $[\alpha, \beta]$ e provemos que $\Phi(a) \notin \Pi_A(f)$ usando a proposição 3.5.

Como f é uniformemente contínua existe δ tal que

$$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{1}{2} \|f - \Phi(a)\|$$

Seja $\alpha = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_N = \beta$ com

$$|z_i - z_{i-1}| < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Sejam $I_1, I_2, \dots, I_p$ os subintervalos $[z_{i-1}, z_i]$ nos quais existem pontos de $\text{ext}(f - \Phi(a))$, ordenados de forma que

$$(i < j, x \in I_i, y \in I_j) \Rightarrow x \leq y.$$

Em cada I_j , $f - \Phi(a)$ não troca de sinal. Fazamos a reunião dos I_j sucessivos nos quais $f - \Phi(a)$ tem o mesmo sinal obtendo $S_0, S_1, \dots, S_m$.

Como por hipótese $f - \Phi(a)$ não é alternante em $\dim L_a + 1$ pontos temos

$$m < \dim L_a$$

1º Caso : $m = 0$

Como L_a é subespaço de Haar (condição local de Haar), existe pelo lema 2.12 $\varphi \in L_a$, tal que $\varphi(x) \neq 0 \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$, e tem o mesmo sinal que o de $f - \Phi(a)$ sobre S_0 . Então :

$$(f(x) - \Phi(a)(x)) \varphi(x) > 0, \quad \forall x \in \text{ext}(f - \Phi(a))$$

e pela proposição 3.5, $\Phi(a) \notin \Pi_A(f)$

2º Caso : $m = \dim L_a - (2r+1), \quad r \geq 0$

Como os S_i são disjuntos existem pontos $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ tais que

$$y_1 \in S_{i-1} \text{ e } y_2 \in S_i \Rightarrow y_1 < x_i < y_2, \\ i=1, 2, \dots, m,$$

Sejam ainda $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+2r+1}$
tais que

$$x_m < x_{m+1} < \dots < x_{m+2r} < x_{m+2r+1}$$

tais que $x_{m+2r} \notin S_m$ e $x_{m+2r+1} \in S_m$.

Como L_a é subespaço de Haar existe $\varphi \in L_a$ tal que:

$$\varphi(x_i) = 0, \quad i=1, 2, \dots, m+2r$$

$$\varphi(x_{m+2r+1}) = \operatorname{sgn} [f(x_{m+2r+1}) - \Phi(a)(x_{m+2r+1})]$$

Então φ não pode ter outros zeros que não os especificados e portanto:

$$(f(x) - \Phi(a)(x)) \varphi(x) > 0 \quad \forall x \in \operatorname{ext}(f - \Phi(a))$$

isto é $\Phi(a) \notin \Pi_A(f)$.

3º Caso : $m = \dim L_a - (2r+2)$, $r \geq 0$.

Sejam x_i , $i=1, 2, \dots, m+2r+1$ como no caso 1 e seja $x_0 \in S_0$.

Como L_a é subespaço de Haar existe $\varphi \in L_a$ tal que:

$$\varphi(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m+2r.$$

$$\varphi(x_{m+2r+1}) = \operatorname{sgn} [f(x_{m+2r+1}) - \Phi(a)(x_{m+2r+1})]$$

$$\varphi(x_0) = \operatorname{sgn} [f(x_0) - \Phi(a)(x_0)]$$

Então φ não pode ter outros zeros que não os especificados e portanto

$$(f(x_i) - \Phi(a)(x)) \varphi(x) > 0, \quad \forall x \in \operatorname{ext}(f - \Phi(a)).$$

donde $\Phi(a) \notin \Pi_A(f)$.

q.e.d.

3.12 Proposição (generalização da prop. 3.11)

Sejam $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$, $\Phi: \mathcal{P} \rightarrow C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$, $a \in \mathring{\mathcal{P}}$.
Exista $\Phi'(a)$, satisfaca Φ em a as condições local e global de Haar e seja $L_a = \Phi'(a)(\mathbb{R}^n)$.

Sejam $X \subset [\alpha, \beta]$, fechado, $\Phi_X: \mathcal{P} \rightarrow C(X, \mathbb{R})$ definido por $\Phi_X(b) = \Phi(b)|_X$, $\forall b \in \mathcal{P}$.

Sejam $A = \Phi_X(\mathcal{P})$ e $f \in C(X, \mathbb{R}) \setminus A$.

Então $\Phi_X(a) \in \Pi_A(f)$ se e só se $f - \Phi_X(a)$ é alternante em $\dim L_a + 1$ pontos de X .

3.13 Exercício

Demostre a proposição 3.12.

3.14 Exercício

Seja X compacto, separado, $P, Q \subset C(X, \mathbb{R})$ subespaços de dimensão finita. Seja Q tal que

$$q \in Q, q \neq 0 \Rightarrow X_q \text{ é denso em } X.$$

Sejam

$$\mathcal{P} = \{a \in \mathbb{R}^{n+m} : q_a \neq 0 \text{ e } \frac{p_a}{q_a} \text{ é unif. contínua em } X_{q_a}\}$$

$\Phi(a)$ = prolongamento por continuidade de $\frac{p_a}{q_a}$ definida em X_{q_a} a todo X .

Mostre que :

- i) $\Phi(\mathcal{P}) = R_{PQ}(X)$
- ii) Se $a \in \mathcal{P}$, $q_a(x) > 0$ então $a \in \mathcal{P}^0$ e Φ satisfaz em a a condição local (global) de Haar se e só se $P + \frac{p_a}{q_a} Q$ é subespaço de Haar.
- iii) $\dim L_a = \dim \left(P + \frac{p_a}{q_a} Q \right)$.

3.15 Exercício

Sejam $P, Q \subset C([a, b], \mathbb{R})$ onde $a < b$, os subespaços cujos elementos são respectivamente polinômios de grau $< n$ e de grau $< m$. Sejam $p_0 \in P$, $q_0 \in Q$, primos entre si e tais que grau $p_0 = n - \nu$ e grau $q_0 = m - \mu$. Então

$$\dim \left(P + \frac{p_0}{q_0} Q \right) = n + m - \min(\nu, \mu) - 1$$

$$\text{Se } p_0 = 0, \dim \left(P + \frac{p_0}{q_0} Q \right) = \dim P = n$$

§4. Unicidade e Continuidade4.1 Proposição (Haar - Kolmogorov)

Seja X compacto, separado e $ACC(X, \mathbb{R})$ sub-espaco de dimensao n . Entao A e' U-subespaco se e so se A e' sub-espaco de Haar.

Prova

i) Suponhamos que A nao e' sub-espaco de Haar e mostremos que nao e' U-sub-espaco.

Seja $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ uma base de A . Como A nao e' sub-espaco de Haar, existem pontos distintos de X , $x_1, x_2, \dots, x_n$ tais que

$$\det [\varphi_i(x_j)] = \det [\varphi_i(x_j)]^t = 0.$$

O sistema $\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(x_j) = 0$, $j=1, 2, \dots, n$ admite solucao nao nula.

Existe entao $\varphi_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$ tal que

$$\varphi_0(x_j) = 0, \quad j=1, 2, \dots, n \quad \text{e} \quad \|\varphi_0\| = 1.$$

O sistema $\sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i(x_i) = 0$, $j=1, 2, \dots, n$ admite solucao nao nula tal que

$$\sum_{i=1}^n |\beta_i| = 1.$$

Então existe $L \in C(X, \mathbb{R})'$ definido por:

$$Lf = \sum_{i=1}^n \beta_i f(x_i)$$

e tal que $L\varphi = 0$, $\forall \varphi \in A$ e $\|L\| \leq 1$.

Pelo lema de Urisohn existe $h \in C(X, \mathbb{R})$ tal que

$$h(x_i) = \operatorname{sgn} \beta_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad \text{e} \quad \|h\| = 1.$$

Seja $f \in C(X, \mathbb{R})$, $f = h(1 - |\varphi_0|)$.

Proveremos que $\varphi_0, -\varphi_0 \in \Pi_A(f)$.

Por um lado:

$$\begin{aligned} Lf &= \sum_{i=1}^n \beta_i f(x_i) = \sum_{i=1}^n \beta_i h(x_i) (1 - |\varphi_0(x_i)|) = \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_i \operatorname{sgn} \beta_i = \sum_{i=1}^n |\beta_i| = 1 \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} |f(x) \pm \varphi_0(x)| &\leq |f(x)| + |\varphi_0(x)| = \\ &= |h(x)| |1 - |\varphi_0(x)|| + |\varphi_0(x)| \leq 1 - |\varphi_0(x)| + |\varphi_0(x)| \end{aligned}$$

$$\therefore |f(x) \pm \varphi_0(x)| \leq 1$$

Portanto

$$1 = Lf \leq \|f \pm \varphi_0\| \leq 1.$$

Pelo corolário 3.17 do capítulo I resulta

$$\varphi_0, -\varphi_0 \in \Pi_A(f)$$

donde A não é U -subespaço.

ii) Suponhamos agora que A satisfaz a condição de Haar e mostremos que A é U -subespaço.

Seja $f \in C(X, \mathbb{R}) \setminus A$. Então $\varphi_0 \in \Pi_A(f)$

implica $\text{card ext}(f - \varphi_0) \geq n+1$.

De fato se fosse $\text{card ext}(f - \varphi_0) \leq n$, existiria, pelo fato de ser A sub-espaço de Haar, $\varphi \in A$ tal que

$$\varphi(x) = f(x) - \varphi_0(x), \quad \forall x \in \text{ext}(f - \varphi_0)$$

e teríamos:

$$(f(x) - \varphi_0(x)) \varphi(x) = |f(x) - \varphi_0(x)|^2 = \|f - \varphi_0\|^2 > 0$$

$$\forall x \in \text{ext}(f - \varphi_0).$$

Mas note caro, pela proposição 3.5 seria $\varphi_0 \notin \Pi_A(f)$ o que é contradição.

Portanto $\text{card ext}(f - \varphi_0) \geq n+1$.

Sejam $\varphi', \varphi'' \in \Pi_A(f)$. Pela convexidade de $\Pi_A(f)$ temos

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi'') \in \Pi_A(f).$$

$$|f(x) - \bar{\varphi}(x)| = \|f - \bar{\varphi}\| = d_A(f), \quad \forall x \in \text{ext}(f - \bar{\varphi})$$

$$|f(x) - \varphi'(x)| \leq \|f - \varphi'\| = d_A(f), \quad \forall x \in \text{ext}(f - \bar{\varphi})$$

$$|f(x) - \varphi''(x)| \leq \|f - \varphi''\| = d_A(f), \quad \forall x \in \text{ext}(f - \bar{\varphi}).$$

Então $\bar{\varphi}(x)$ está sobre a circunferência de centro $f(x)$ e raio $d_A(f)$ ao passo que $\varphi'(x)$ e $\varphi''(x)$ situam-se no disco de mesmo centro e raio, para $\forall x \in \text{ext}(f - \bar{\varphi})$.

Como $\bar{\varphi}(x) = \frac{1}{2}(\varphi'(x) + \varphi''(x))$ resulta

$$\varphi'(x) = \varphi''(x) = \bar{\varphi}(x), \quad \forall x \in \text{ext}(f - \bar{\varphi}).$$

Como $\text{card ext}(f - \bar{\varphi}) \geq n+1$ e A é subespaço de Haar resulta $\varphi' = \varphi''$.
q.e.d.

4.2 Proposição

Seja $P \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\Phi: P \rightarrow C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ de classe C^1 .
 Se Φ satisfaz para $\forall a \in P$ a condição local e global de Haar então $A = \Phi(P)$ é U-subconjunto.

Prova

Sejam $f \in C(X, \mathbb{R}) \setminus A$ e $\Phi(a), \Phi(b) \in \pi_A(f)$.

$$L_a = \Phi'(a)(\mathbb{R}^n), \quad L_b = \Phi'(b)(\mathbb{R}^n).$$

$$n_a = \dim L_a, \quad n_b = \dim L_b.$$

Suponhamos que $n_a \leq n_b$ e sejam $x_1 < x_2 < \dots < x_{n_a+1}$ pontos de $[\alpha, \beta]$ onde $f - \Phi(a)$ é alternante.

Suponhamos sem perda de generalidade que $\Phi(b)(x_i) - \Phi(a)(x_i) \leq 0$.

Como $|f(x_i) - \Phi(b)(x_i)| \leq |f(x_i) - \Phi(a)(x_i)| = d_A(f)$ temos:

$$(-1)^i [\Phi(b)(x_i) - \Phi(a)(x_i)] \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, n_a+1.$$

Se valer a igualdade para $i=1, 2, \dots, n_a+1$ então $\Phi(b) - \Phi(a)$ admite n_a+1 zeros e pela condição global de Haar em $\underline{a}$, $\Phi(b) - \Phi(a) = 0$ e temos a tese.

Caso contrário existe i_0 tal que:

$$(-1)^{i_0} [\Phi(b)(x_{i_0}) - \Phi(a)(x_{i_0})] > 0$$

Pela condição local de Hoar em $\underline{b}$,
 existe $\varphi \in L_b$ tal que $\varphi(x_i) = (-1)^i$, para
 $i = 1, 2, \dots, n_a + 1$, $i \neq i_0$.

Seja $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi = \Phi'(b)c$.

$$\Phi(b+tc) \leq \Phi(b) + t \Phi'(b)c + \omega(t)$$

onde $\frac{\omega(t)}{t} \rightarrow 0$, qdo $t \rightarrow 0$.

$$\Phi(b+tc) - \Phi(a) = \Phi(b) - \Phi(a) + t [\Phi'(b)c + \frac{\omega(t)}{t}]$$

Para $i = 1, 2, \dots, n_a + 1$, $i \neq i_0$ teremos:

$$\begin{aligned} (-1)^i [\Phi(b+tc)(x_i) - \Phi(a)(x_i)] &= (-1)^i [\Phi(b)(x_i) - \Phi(a)(x_i)] + \\ &+ t \left[1 + (-1)^i \frac{\omega(t)}{t} \right] \varphi(x_i) \end{aligned}$$

Como $(-1)^i [\Phi(b)(x_i) - \Phi(a)(x_i)] \geq 0$ e

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq n_a + 1 \\ i \neq i_0}} \left[1 + (-1)^i \frac{\omega(t)}{t} \right] > 0 \quad \text{para } t$$

suficientemente pequeno, resulta:

$$(-1)^i [\Phi(b+tc)(x_i) - \Phi(a)(x_i)] > 0 \quad \text{para}$$

$i=1, 2, \dots, n_a+1$, $i \neq i_0$, para t suficientemente pequeno.

Como $(-1)^{i_0} [\Phi(b)(x_{i_0}) - \Phi(a)(x_{i_0})] > 0$
temos também:

$$(-1)^{i_0} [\Phi(b+tc)(x_{i_0}) - \Phi(a)(x_{i_0})] > 0$$

para t suficientemente pequeno.

Então $\Phi(b+tc) - \Phi(a)$ admite n_a+1 zeros distintos e pela condição global de Haar $\Phi(b+tc) = \Phi(a)$. Fazendo $t \rightarrow 0$ resulta $\Phi(b) = \Phi(a)$.

q.e.d.

4.3 Definição

Seja E espaço normado, $A \subset E$ não vazio. Dizemos que A é aproximadamente compacto se:

$x \in E$, $y_n \in A$, $\|x - y_n\| \rightarrow d_A(x)$ implica que existe subsequência (y_{n_k}) tal que $y_{n_k} \rightarrow y \in A$.

4.4 Observação

Como a convergência em norma é um modo de convergência, decorre da proposição 1.4 que $y \in \Pi_A(x)$ e que todo subconjunto aproximadamente compacto é um E -subconjunto

4.5 Proposição

Seja $A \subseteq E$ aproximadamente compacto e $x \in E$ tal que $\Pi_A(x) = \{y\}$. Então se $x_n \rightarrow x$ e $y_n \in \Pi_A(x_n)$, segue-se que $y_n \rightarrow y$.

Prova

i) Temos que $\|x - y_n\| \rightarrow d_A(x)$.

De fato:

$$d_A(x) \leq \|x - y_n\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - y_n\| = \|x - x_n\| + d_A(x_n)$$

Passando ao limite obtemos: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d_A(x)$

ii) Suponhamos (por absurdo) que $y_n \not\rightarrow y$.

Então existe $\varepsilon > 0$ e uma subsequência (y_{n_k}) tais que $\|y_{n_k} - y\| \geq \varepsilon$, $\forall k$.

Como A é aproximadamente compacto e $\|x - y_{n_k}\| \rightarrow d_A(x)$, existe subsequência

$(y_{n_{k_j}})$ tal que $y_{n_{k_j}} \rightarrow \bar{y} \in A$

Pela observação 4.4. $\bar{y} \in \Pi_A(x)$ isto é $\bar{y} = y$.

Mas $\|y_{n_{k_j}} - y\| \geq \varepsilon$, $\forall j$ contradizendo

$y_{n_{k_j}} \rightarrow y$. Logo $y_n \rightarrow y$ (q.e.d.).

4.6 Corolário

Se E é normado, $A \subset E$ é aproximadamente compacto e A é U -subconjunto então $\pi_A: E \rightarrow A$ é contínuo.

4.7 Definição

Seja $P \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $\Phi: P \rightarrow C(X, \mathbb{R})$ de classe C^1 . Dizemos que $a \in P$ é um ponto normal se $\dim L_a = \max_{b \in P} (\dim L_b)$ onde $L_a = \Phi'(a)(\mathbb{R}^n)$.

4.8 Lema

Seja $P \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $\Phi: P \rightarrow C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ de classe C^1 e satisfaça Φ em a a condição local de Haar. Seja $\dim L_a = n_a$.
Dados $x_1 < x_2 < \dots < x_{n_a}$ em $[\alpha, \beta]$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$ existe δ satisfazendo:

"Se $|c_i - \Phi(a)(x_i)| \leq \delta$, $i = 1, 2, \dots, n_a$, então existe e é único $\bar{a} \in P$ tal que

$$\|\bar{a} - a\| \leq \varepsilon$$

$$\bar{a}_i = a_i, \quad n_a + 1 \leq i \leq n$$

$$\Phi(\bar{a})(x_i) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_a.$$

Prova

Seja $F: \Omega \times \mathbb{R}^{n_a} \rightarrow \mathbb{R}^{n_a}$ onde

$$\Omega = \{(b_1, b_2, \dots, b_{n_a}) \in \mathbb{R}^{n_a} : (b_1, b_2, \dots, b_{n_a}, a_{n_a+1}, \dots, a_n) \in P\}$$

$$F^i(b_1, b_2, \dots, b_{n_a}, c_1, c_2, \dots, c_{n_a}) = \Phi(b_1, b_2, \dots, b_{n_a}, a_{n_a+1}, \dots, a_n)(x_i) - c_i$$

Aplicando-se o Teorema das funções implícitas para o ponto $(a_1, a_2, \dots, a_{m_a}, \Phi(a)(x_1), \Phi(a)(x_2), \dots, \Phi(a)(x_{m_a}))$ obtemos o lema.

4.9 Exercício

Detalhe a prova do lema 4.8.

4.10 Lema

Seja $P \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $\Phi: P \rightarrow C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ de classe C^1 e satisfaça Φ a condição local e global de Haar em todos os pontos de P .

Sejam $a \in P$, ponto normal, $\Phi(a)$ aproximante ótimo de $f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R}) \setminus A$ em $A = \Phi(P)$ e $b_k \in P$, $k=1, 2, \dots$ tais que $\|f - \Phi(b_k)\| \rightarrow \|f - \Phi(a)\|$.

Então existe uma subsequência (b_{k_j}) e uma sequência (b'_j) de elementos de P tais que:

$$1) \quad \Phi(b_{k_j}) = \Phi(b'_j)$$

$$2) \quad b'_j \rightarrow a.$$

Prova:

i) Como $\|f - \Phi(b_k)\| \rightarrow \|f - \Phi(a)\|$, existe $M > 0$ tal que $\|\Phi(b_k)\| \leq M$.

Seja $\dim L_a = m_a$ e $x_1 < x_2 < \dots < x_{m_a+1}$ pontos de $[\alpha, \beta]$, onde $f - \Phi(a)$ é alternante.

Como $|\Phi(b_k)(x_i)| \leq M$, $i=1, 2, \dots, m_a+1$, existe sub-sequência (b_{k_j}) tal que:

$$\Phi(b_{k_j})(x_i) \rightarrow c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_a + 1.$$

Como $\|f - \Phi(b_{k_j})\| \rightarrow \|f - \Phi(a)\|$ quando $j \rightarrow \infty$,
dado $m \in \mathbb{N}$ existe j_0 tal que:

$$\begin{aligned} \sigma_i(f(x_i) - \Phi(b_{k_j})(x_i)) &\leq \|f - \Phi(a)\| + \frac{1}{m} = \\ &= \sigma_i(f(x_i) - \Phi(a)(x_i)) + \frac{1}{m}, \quad \forall j \geq j_0 \end{aligned}$$

onde $\sigma_i = \operatorname{sgn}(f(x_i) - \Phi(a)(x_i))$.

Fazendo $j \rightarrow \infty$, obtemos:

$$\sigma_i(f(x_i) - c_i) \leq \sigma_i(f(x_i) - \Phi(a)(x_i)) + \frac{1}{m}$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ e simplificando temos:

$$(4.10.1) \quad \sigma_i(c_i - \Phi(a)(x_i)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_a + 1.$$

ii) Mostremos que $c_i = \Phi(a)(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_a + 1$.

Suponhamos (por absurdo) que não fosse verdade. Para fixar ideias suponhamos que:

$$(4.10.2) \quad \sigma_{n_a+1}(c_{n_a+1} - \Phi(a)(x_{n_a+1})) = d > 0.$$

Sejam ε_0 e δ como no Lema 4.8 e satisfazendo ainda

$$(4.10.3) \quad \|a' - a\| \leq \varepsilon_0 \Rightarrow \|\Phi(a') - \Phi(a)\| \leq \frac{d}{2}$$

$$(4.10.4) \quad \delta \leq d.$$

Pelo lema 4.8 existe $\bar{a} \in \mathcal{P}$ tal que:

$$(4.10.5) \quad \Phi(\bar{a})(x_i) = \Phi(a)(x_i) - \sigma_i \frac{\delta}{2}, \quad i=1, 2, \dots, n_a$$

$$(4.10.6) \quad \|\bar{a} - a\| \leq \varepsilon_0$$

De (4.10.5) vem

$$(4.10.7) \quad \sigma_i (\Phi(a)(x_i) - \Phi(\bar{a})(x_i)) = \frac{\delta}{2}, \quad i=1, 2, \dots, n_a$$

Como $\Phi(b_{k_j})(x_i) \rightarrow c_i$, $i=1, 2, \dots, n_a+1$, existe j_0 tal que $|\Phi(b_{k_{j_0}})(x_i) - c_i| \leq \frac{\delta}{4}$, $i=1, 2, \dots, n_a+1$.
Chamando $b_{k_{j_0}} = \bar{b}$ teremos:

$$(4.10.8) \quad \sigma_i (\Phi(\bar{b})(x_i) - c_i) \geq -\frac{\delta}{4}, \quad i=1, 2, \dots, n_a+1.$$

De (4.10.3) e (4.10.6) temos $\|\Phi(\bar{a}) - \Phi(a)\| \leq \frac{\delta}{2}$ donde

$$(4.10.9) \quad \sigma_{n_a+1} (\Phi(a)(x_{n_a+1}) - \Phi(\bar{a})(x_{n_a+1})) \geq -\frac{\delta}{2}.$$

De (4.10.8) temos, em particular

$$(4.10.10) \quad \sigma_{n_a+1} (\Phi(\bar{b})(x_{n_a+1}) - c_{n_a+1}) \geq -\frac{\delta}{4}$$

Somando-se (4.10.1), (4.10.7) e (4.10.8) para cada $i=1, 2, \dots, n_a$, obtemos:

$$(4.10.11) \quad \sigma_i (\Phi(\bar{b})(x_i) - \Phi(\bar{a})(x_i)) \geq \frac{\delta}{4}, \quad i=1, 2, \dots, n_a.$$

Tomando-se (4.10.2), (4.10.9) e (4.10.10) obtemos.

$$(4.10.12) \quad \sigma_{m_a+1}(\Phi(b)(x_{m_a+1}) - \Phi(a)(x_{m_a+1})) \geq \frac{2d-\delta}{4} \geq \frac{\delta}{4}$$

Por (4.10.11) e (4.10.12) vemos que $\Phi(b) - \Phi(a)$ não se anula nos pontos $x_1, x_2, \dots, x_{m_a+1}$ e tem nestes pontos sinais alternados e portanto admite m_a zeros.

Como Φ satisfaz em a a condição global de Haar e $\Phi(b) - \Phi(a) \neq 0$, temos uma contradição. Portanto:

$$(4.10.13) \quad \Phi(b_{k_j})(x_i) \rightarrow c_i = \Phi(a)(x_i), \quad i=1, 2, \dots, m_a+1.$$

iii) Sejam $\epsilon > 0$ e δ como no lema 4.8.

Por (4.10.13) existe j_0 tal que para $\forall j \geq j_0$

$$|\Phi(b_{k_j})(x_i) - \Phi(a)(x_i)| \leq \delta$$

Pelo lema 4.8 existem $b'_j \in P$ tais que

$$(4.10.14) \quad \Phi(b'_j)(x_i) = \Phi(b_{k_j})(x_i), \quad i=1, 2, \dots, m_a$$

$$(4.10.15) \quad \|b'_j - a\| \leq \epsilon$$

Pela condição global de Haar, (4.10.14) implica que $\Phi(b'_j) = \Phi(b_{k_j})$ pois que $\Phi(b'_j) - \Phi(b_{k_j})$ admite m_a zeros e $\dim L_{b_{k_j}} \leq \dim L_a = m_a$ por ser a ponto normal.

fica $b'_j \rightarrow a$.

A (4.10.15) signi-

(q.e.d.)

4.11 Proposição

Seja $P \subset \mathbb{R}^n$, aberto, $\Phi: P \rightarrow C([a, b], \mathbb{R})$ de classe C^1 . Sejam $A = \Phi(P)$ e $f \in C([a, b], \mathbb{R}) \setminus A$. Satisfaz Φ a condição local e global de Haar em todos os pontos de P e seja $a \in P$ ponto normal. Seja $\Phi(a) \in \Pi_A(f)$. Então existe $\gamma > 0$ tal que:

$$\|f - \Phi(b)\| \geq \|f - \Phi(a)\| + \gamma \|\Phi(a) - \Phi(b)\|, \quad \forall b \in P.$$

Prova

i) Se $f \in A$ temos a tese com $\gamma = 1$.

Seja então $f \in C([a, b], \mathbb{R}) \setminus A$.

Se $\Phi(b) = \Phi(a)$ então qualquer γ satisfaz.

Seja então $\Phi(b) \neq \Phi(a)$.

Seja $\dim L_a = n_a$ e $x_1 < x_2 < \dots < x_{n_a+1}$ pontos de $[a, b]$ onde $f - \Phi(a)$ é alternante.

Seja $\sigma_i = \operatorname{sgn}(f(x_i) - \Phi(a)(x_i))$.

Se $v \in L_a$, $v \neq 0$ então existe $k \in \{1, 2, \dots, n_a+1\}$ tal que $\sigma_k v(x_k) > 0$.

De fato, pelo lema 2.4 existem $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n_a+1$, de sinais alternados tais que

$$\sum_{i=1}^{n_a+1} \lambda_i v(x_i) = 0, \quad \forall v \in L_a.$$

Então
$$\sum_{i=1}^{n_a+1} |\lambda_i| \sigma_i v(x_i) = 0$$

Se fosse $\sigma_i v(x_i) \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, n_a+1$, teríamos

$v(x_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n_0 + 1$ e como L_a é subespaço de H^1_{loc} de dimensão n_a , resultaria $v = 0$ contra a hipótese que $v \neq 0$.

Seja $F: L_a \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(v) = \max_{1 \leq i \leq n_0 + 1} \sigma_i v(x_i)$

F é contínua e $F(v) > 0$, $\forall v \neq 0$.

Então:

$$\min_{\|v\|=1} F(v) = \alpha > 0.$$

ii) Mostremos que existem $\delta > 0$, $\gamma_1 > 0$ tais que

$$\|f - \Phi(b)\| \geq \|f - \Phi(a)\| + \gamma_1 \|\Phi(a) - \Phi(b)\|$$

para $\forall b \in \mathcal{P}$ tal que $\|a - b\| < \delta$.

$$\begin{aligned} \|f - \Phi(b)\| &\geq \max_i \sigma_i (f(x_i) - \Phi(b)(x_i)) = \\ &= \max_i \{ \sigma_i [f(x_i) - \Phi(a)(x_i)] + \sigma_i [\Phi(a)(x_i) - \Phi(b)(x_i)] \} = \\ &= \|f - \Phi(a)\| + \max_i \sigma_i [f(x_i) - \Phi(b)(x_i)]. \end{aligned}$$

Para δ suficientemente pequeno $\{b: \|a - b\| < \delta\} \subset \mathcal{P}$ e como Φ é de classe C^1 , existe K tal que

$$\|\Phi(a) - \Phi(b)\| \leq K \|a - b\|$$

Então :

$$\|f - \Phi(b)\| \geq \|f - \Phi(a)\| +$$

$$+ \frac{1}{K} \max_i \sigma_i \frac{\Phi(a)(x_i) - \Phi(b)(x_i)}{\|a-b\|} \cdot \|\Phi(a) - \Phi(b)\|$$

$$\Phi(a) - \Phi(b) = \Phi'(a)(a-b) + \omega(a-b)$$

Como $\frac{\omega(t)}{\|t\|} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$, se δ for

suficientemente pequeno teremos $\frac{\|\omega(a-b)\|}{\|a-b\|} < \frac{\alpha}{2}$.

$$\max_i \sigma_i \frac{\Phi(a)(x_i) - \Phi(b)(x_i)}{\|a-b\|} =$$

$$= \max_i \left[\sigma_i \left[\Phi'(a) \left(\frac{a-b}{\|a-b\|} \right) \right](x_i) + \sigma_i \left[\frac{\omega(a-b)}{\|a-b\|} \right](x_i) \right] \geq$$

$$\geq \max_i \sigma_i \left[\Phi'(a) \left(\frac{a-b}{\|a-b\|} \right) \right](x_i) - \frac{\|\omega(a-b)\|}{\|a-b\|} =$$

$$= F\left(\frac{a-b}{\|a-b\|}\right) - \frac{\|\omega(a-b)\|}{\|a-b\|} \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

Portanto fazendo $\gamma_1 = \frac{\alpha}{2K}$ temos:

$$\|f - \Phi(b)\| \geq \|f - \Phi(a)\| + \gamma_1 \|\Phi(a) - \Phi(b)\|.$$

iii) Mostremos que existe γ_2 tal que:

$$\|f - \Phi(b)\| \geq \|f - \Phi(a)\| + \gamma_2 \|\Phi(a) - \Phi(b)\|$$

para $\forall b \in P$ tal que $\|a - b\| \geq \delta$.

Suponhamos (por absurdo) que fosse falso. Então existiria uma sequência (b_k) , $b_k \in P$ tal

$$\|f - \Phi(b_k)\| = \|f - \Phi(a)\| + \varepsilon_k \|\Phi(a) - \Phi(b_k)\|, \quad \varepsilon_k \rightarrow 0$$

$$\text{e } \|a - b_k\| \geq \delta.$$

Quando $k \rightarrow \infty$, teremos $\|f - \Phi(b_k)\| \rightarrow \|f - \Phi(a)\|$. Pelo lema 4.10 existe uma subsequência (b_{k_j}) e uma sequência (b'_j) de elementos de P tais que:

$$\Phi(b'_j) = \Phi(b_{k_j}) \quad \text{e } b'_j \rightarrow a.$$

Existe j_0 tal que $\|b'_j - a\| < \delta$ para $\forall j \geq j_0$.

$$\begin{aligned} \|f - \Phi(a)\| + \varepsilon_{k_j} \|\Phi(a) - \Phi(b_{k_j})\| &= \|f - \Phi(b_{k_j})\| = \\ &= \|f - \Phi(b'_j)\| \geq \|f - \Phi(a)\| + \gamma_2 \|\Phi(a) - \Phi(b'_j)\|. \end{aligned}$$

Portanto $\varepsilon_{k_j} \geq \gamma_2 > 0$, $\forall j \geq j_0$ o que contradiz $\varepsilon_{k_j} \rightarrow 0$.

iv) Tomando $\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_2)$ temos a tese. (q.e.d.).

4.12 Proposição

Seja $P \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $\Phi: P \rightarrow C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ de classe C^1 . Satisfaga Φ a condição local e global de Haar em todos os pontos de P .
 Seja $a \in P$, normal e $\varphi_f = \Phi(a)$ aproximante ótimo de $f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R}) \setminus A$ em $A = \Phi(P)$.
 Então:

- i) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $g \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ e $\|f - g\| < \varepsilon$ implica $\pi_A(g) \neq \emptyset$.
- ii) Existe $M > 0$ tal que para todo $g \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ para o qual $\pi_A(g) \neq \emptyset$ vale

$$\|\varphi_f - \varphi_g\| \leq M \|f - g\|, \quad \forall \varphi_g \in \pi_A(g).$$

Prova

- i) Sejam ε_0, δ como no lema 4.8 e seja ε_0 tal que $\|a - b\| \leq \varepsilon \Rightarrow b \in P$.

$\Phi(\{b : \|a - b\| \leq \varepsilon\})$ é compacto pois que

$\{b : \|a - b\| \leq \varepsilon\}$ é compacto e Φ é contínua.

$B = \{\varphi \in A : \|\Phi(a) - \varphi\| \leq \delta\}$ é compacto pois

que é fechado e pelo lema 4.8 resulta

$$B \subset \Phi(\{b : \|a - b\| \leq \varepsilon\}).$$

Seja agora (φ_k) , $\varphi_k \in A$, tal que:

$$\|g - \varphi_k\| = d_A(g) + \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k \rightarrow 0.$$

Pela proposição 4.11, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \gamma \|\Phi(a) - \varphi_k\| &\leq \|f - \varphi_k\| - \|f - \Phi(a)\| \leq \\ &\leq \|f - g\| + \|g - \varphi_k\| - \|f - \Phi(a)\| = \\ &= \|f - g\| + d_A(g) + \varepsilon_k - d_A(f) \leq \\ &\leq \|f - g\| + |d_A(f) - d_A(g)| + \varepsilon_k \end{aligned}$$

Pela continuidade de d_A existem k_0 e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\|f - g\| < \varepsilon \quad \text{e} \quad k \geq k_0 \quad \text{implicam} \quad \|\Phi(a) - \varphi_k\| \leq \delta.$$

Então $\varphi_k \in B \subset A$ e como B é compacto existe sub-sequência (φ_{k_j}) tal que

$$\varphi_{k_j} \rightarrow \varphi \in A. \quad \text{Então} \quad \|g - \varphi\| = d_A(g) \quad \text{isto é}$$

$$\varphi \in \pi_A(g).$$

ii) Pela proposição 4.11

$$\begin{aligned}
 \delta \| \varphi_f - \varphi_g \| &\leq \| f - \varphi_g \| - \| f - \varphi_f \| \leq \\
 &\leq \| f - g \| + \| g - \varphi_g \| - \| f - \varphi_f \| \leq \\
 &\leq \| f - g \| + \| g - \varphi_f \| - \| f - \varphi_f \| \leq \\
 &\leq \| f - g \| + \| g - f \| + \| f - \varphi_f \| - \| f - \varphi_f \| = \\
 &= 2 \| f - g \|
 \end{aligned}$$

Logo $\| \varphi_f - \varphi_g \| \leq \frac{2}{\delta} \| f - g \|$.

q.e.d.

4.13 Exercício

Complete a demonstração da parte i) da proposição 4.12 mostrando que do lema 4.8 decorre $B \subset \Phi(\{b: \|a-b\| \leq \varepsilon\})$.

4.14 Exercício

Sejam $P, Q \subset C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ subespaços de dimensão n e m respectivamente.

Sejam $f, g \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ e $\varphi_f, \varphi_g \in \mathbb{R}_{PQ^{++}}([\alpha, \beta]) = A$ tais que $\varphi_f \in \pi_A(f)$, $\varphi_g \in \pi_A(g)$ e $P + \varphi_f Q$ é subespaço de Haar de dimensão $n+m-1$.
Então

$$\| \varphi_f - \varphi_g \| \leq M \| f - g \|$$

onde M não depende de f ou φ_g .

4.15 Proposição (De La Vallée Poussin)

Seja $P \subset \mathbb{R}^n$, $\Phi: P \rightarrow C([a, \beta], \mathbb{R})$, $A = \Phi(P)$
 $f \in C([a, \beta], \mathbb{R}) \setminus A$.

Satisfaz Φ em $a \in P$ a condição global de Haar. Sejam $x_i \in [a, \beta]$ tais que

$$x_i < x_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, \dim L_a.$$

Se:

$$i) \quad f(x_i) - \Phi(a)(x_i) \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, \dim L_a + 1$$

$$ii) \quad \operatorname{sgn}(f(x_i) - \Phi(a)(x_i)) = -\operatorname{sgn}(f(x_{i+1}) - \Phi(a)(x_{i+1})) \\ i = 1, 2, \dots, \dim L_a$$

então:

$$\min_{1 \leq i \leq \dim L_a + 1} |f(x_i) - \Phi(a)(x_i)| \leq d_A(f)$$

Prova

Aplicaremos a proposição 3.1 com $S = [a, \beta]$, $\Phi_0 = \Phi(a)$, $S_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_{\dim L_a + 1}\}$. A primeira hipótese da prop. 3.1 está satisfeita. Também a segunda pois caso contrário existiria b tal que

$$(f(x_i) - \Phi(a)(x_i))(\Phi(b)(x_i) - \Phi(a)(x_i)) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, \dim L_a$$

e portanto $\Phi(b) - \Phi(a)$ admitiria $\dim L_a$ zeros donde $\Phi(b) = \Phi(a)$ (contradição!).

Aplicando a prop. 3.1 resulta a tese. c.q.e.d.

Capítulo III

ALGORITMOS

§1. Algoritmo de Remez

1.1 Hipóteses e Notações

Faremos as seguintes hipóteses.
 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^m$ é aberto, $\Phi: \mathcal{P} \rightarrow C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$, $\alpha < \beta$,
 é de classe C^1 e satisfaz a condição
 local e global de Haar em todo ponto de $\mathcal{P}$,
 $f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R}) \setminus A$ onde $A = \Phi(\mathcal{P})$,
 $\Phi(\bar{a}) = \Pi_A(f)$ onde $\bar{a} \in \mathcal{P}$ é ponto normal
 e $\dim L_{\bar{a}} = m \leq n$.

Sem perda de generalidade vamos admitir que $\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}(\bar{a})$, $i=1, 2, \dots, m$ é uma base de $L_{\bar{a}}$.

Usaremos ainda as notações:

$$\mathcal{D} = \{ y \in [\alpha, \beta]^{m+1} : y_1 < y_2 < \dots < y_{m+1} \}$$

$$\mathcal{C} = \{ y \in \mathcal{D} : f - \Phi(\bar{a}) \text{ é alternante em } y \}$$

$$\mathcal{C}^+ = \{ y \in \mathcal{C} : f(y_1) - \Phi(\bar{a})(y_1) = \| f - \Phi(\bar{a}) \| \}$$

$$\mathcal{C}^- = \{ y \in \mathcal{C} : f(y_1) - \Phi(\bar{a})(y_1) = - \| f - \Phi(\bar{a}) \| \}$$

$$D_{\delta}^+ = \{ y \in D : \text{dist}(y, C^+) \leq \delta \}$$

$$D_{\delta}^- = \{ y \in D : \text{dist}(y, C^-) \leq \delta \}$$

$$D_{\delta} = D_{\delta}^+ \cup D_{\delta}^- = \{ y \in D : \text{dist}(y, C) \leq \delta \}$$

1.2 Algoritmo de Remez

[1] Inicialize

$$k=0, \quad S^0 = \{ y_1^0, y_2^0, \dots, y_{m+1}^0 \}, \quad a^0 \in \mathcal{P}$$

onde $\alpha \leq y_1^0 < y_2^0 < \dots < y_{m+1}^0 \leq \beta$ e

$$\text{sgn}[f(y_i^0) - \Phi(a^0)(y_i^0)] = -\text{sgn}[f(y_{i+1}^0) - \Phi(a^0)(y_{i+1}^0)]$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

[2] Obtenha $a^{k+1} \in \mathcal{P}$, $h^{k+1} \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{cases} f(y_i^k) - \Phi(a^{k+1})(y_i^k) = (-1)^i h^{k+1}, & i = 1, 2, \dots, m+1. \\ a_j^{k+1} = a_j^0, & j = m+1, \dots, n \end{cases}$$

[3] Escolha $S^{k+1} = \{ y_1^{k+1}, y_2^{k+1}, \dots, y_{m+1}^{k+1} \}$
tal que

$$\alpha \leq y_1^{k+1} < y_2^{k+1} < \dots < y_{m+1}^{k+1} \quad e$$

satisfazendo ainda

$$\min_{1 \leq i \leq m+1} |f(y_i^{k+1}) - \Phi(a^{k+1})(y_i^{k+1})| \geq |h^{k+1}|$$

$$\max_{1 \leq i \leq m+1} |f(y_i^{k+1}) - \Phi(a^{k+1})(y_i^{k+1})| = \|f - \Phi(a^{k+1})\|$$

$$\operatorname{sgn}[f(y_i^{k+1}) - \Phi(a^{k+1})(y_i^{k+1})] = -\operatorname{sgn}[f(y_{i+1}^{k+1}) - \Phi(a^{k+1})(y_{i+1}^{k+1})]$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$[4] \quad k \leftarrow k+1$$

Se $k < k_{\text{MAX}}$ ou

$$\text{se } \|f - \Phi(a^k)\| = \min_{1 \leq i \leq m+1} |f(y_i^k) - \Phi(a^k)(y_i^k)| > \text{tolerância}$$

vá para [2].

[5] FIM.

1.3 Observação

No restante deste parágrafo vamos mostrar que se a inicialização do Algoritmo de Remez for "suficientemente boa", o algoritmo privado da regra de parada em [4] pode ser executado indefinidamente (Proposição 1.9) e gera uma sequência (a^k)

tal que $\Phi(a^k) \rightarrow \Phi(\bar{a})$ (Proposição 1.10).

Antes provaremos alguns lemas.

1.4 Lema

C^+ e C^- são compactos e disjuntos.

Existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < \delta \leq \delta_1$ então D_δ^+ , D_δ^- são fechados em $\mathbb{R}^{m+1}$ e disjuntos.

Prova

i) Pela definição de C^+ e C^- estes conjuntos são disjuntos.

Verifiquemos que C^- é compacto. Para C^+ a mesma coisa é análoga.

C^- é limitado. Mostremos que C^- é fechado em $\mathbb{R}^{m+1}$.

Como $f - \Phi(\bar{a})$ é uniformemente contínua em $[\alpha, \beta]$, existe $\rho > 0$ tal que se $x', x'' \in [\alpha, \beta]$ e $|x' - x''| < \rho$ então

$$| \{ f(x') - \Phi(\bar{a})(x') \} - \{ f(x'') - \Phi(\bar{a})(x'') \} | < \| f - \Phi(\bar{a}) \|$$

Como para $\forall y \in C^-$ vale

$$| \{ f(y_{i+1}) - \Phi(\bar{a})(y_{i+1}) \} - \{ f(y_i) - \Phi(\bar{a})(y_i) \} | = 2 \| f - \Phi(\bar{a}) \|$$

resulta $y_{i+1} \geq y_i + \rho$.

Seja agora (y^k) , $y^k \in C^-$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^{m+1}$ e $y^k \rightarrow \bar{y}$.
 Mostremos que $\bar{y} \in C^-$.

Fazendo $k \rightarrow \infty$ em $y_{i+1}^k \geq y_i^k + \rho$ em
 $\alpha \leq y_i^k \leq \beta$ e em

$$f(y_i^k) - \Phi(\bar{a})(y_i^k) = (-1)^k \|f - \Phi(\bar{a})\| \quad \text{obtemos}$$

$$\bar{y}_{i+1} \geq \bar{y}_i + \rho, \quad \alpha \leq \bar{y}_i \leq \beta \quad \text{e}$$

$$f(\bar{y}_i) - \Phi(\bar{a})(\bar{y}_i) = (-1)^k \|f - \Phi(\bar{a})\|, \quad i=1, 2, \dots, m+1$$

Portanto $\bar{y} \in C^-$, isto é C^- é fechado em $\mathbb{R}^{m+1}$
 donde C^- é compacto.

ii) Como C^+ e C^- são compactos disjuntos,
 D_δ^+ e D_δ^- são disjuntos para δ suficientemente pequeno.

Como $y \rightarrow \text{dist}(y, C^-)$ é contínua, o conjunto

$$B_\delta = \{y \in [\alpha, \beta]^{m+1} : \text{dist}(y, C^-) \leq \delta\}$$

é fechado em $\mathbb{R}^{m+1}$.

Seja $y \in B_\delta$. Como C^- é compacto existe $z \in C^-$ tal que $\|y - z\|_\infty \leq \delta$. Seja $\delta < \frac{\rho}{3}$ e suficientemente pequeno para que D_δ^+ e D_δ^- sejam disjuntos.

Teremos $|y_i - z_i| < \frac{\rho}{3} \quad i = 1, 2, \dots, m+1$ e

$|z_{i+1} - z_i| \geq \rho$ donde $y_1 < y_2 < \dots < y_{m+1}$.

Então $y \in D$ e portanto $B_\delta = \bar{D}_\delta$.

Logo $\bar{D}_\delta$ é fechado em $\mathbb{R}^{m+1}$.

Verificação analoga para D_δ^+ . (q.e.d.)

1.5 Lema'

Seja δ_1 como no lema 1.4.

Sejam $H_k : [\alpha, \beta]^{m+1} \times \mathcal{P}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, m+1$ definidas por

$$H_k(y, a^1, a^2, \dots, a^m) = \det \left[\frac{\partial \Phi(a^i)}{\partial a_j} (z_i) \right], \quad 1 \leq j \leq m.$$

onde

$$z_i = \begin{cases} y_i & , i = 1, 2, \dots, k-1 \\ y_{i+1} & , i = k, k+1, \dots, m \end{cases}$$

Então existem $\varepsilon_3 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\alpha > 0$ onde $\delta_2 \leq \delta_1$, tais que H_k não muda de sinal sobre

$$D_{\delta_2} \times \{a : \|a - \bar{a}\|_\infty \leq \varepsilon_3\}^m$$

o sinal é o mesmo para $k = 1, 2, \dots, m+1$ e vale ainda $|H_k(y, a^1, a^2, \dots, a^m)| \geq \alpha > 0$ para $\forall k$.

Prova

H_k é contínua.

Como $L_{\bar{a}}$ é subespaço de Haar, pelo lema 2.3 do Capítulo II, H_k não se anula sobre o compacto

$$C \times \{\bar{a}\}^m$$

e aí têm o mesmo sinal para $\forall k$.

Então existe $\alpha > 0$ tal que $|H_k| \geq 2\alpha$ sobre $C \times \{\bar{a}\}^m$, $k=1, 2, \dots, m+1$.

Pela continuidade dos H_k e compacidade de $C \times \{\bar{a}\}^m$ existem $\delta_2 \leq \delta_1$ e $\epsilon_3 > 0$ para os quais vale a tese.

(q.e.d.)

1.6 Lema

Sejam ϵ_3 e δ_2 como no lema 1.5.

- i) Existem $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_4, \delta_0$ onde $\epsilon_1 \leq \epsilon_3$, $\delta_0 \leq \delta_2$ tais que se $y \in D_{\delta_0}$ e $|b_i - \bar{a}_{m+i}| \leq \epsilon_0$, $i=1, 2, \dots, n-m$, então o sistema

$$(1.6.1) \begin{cases} f(y_i) - \Phi(a)(y_i) = (-1)^i h, & i=1, 2, \dots, m+1 \\ a_{m+i} = b_i, & i=1, 2, \dots, n-m \end{cases}$$

admite solução única $a(y, b)$, $h(y, b)$ tal que

$$\|a(y, b) - \bar{a}\|_{\infty} \leq \varepsilon_1, \quad | \|f - \Phi(\bar{a})\| - |h(y, b)| | \leq \varepsilon_4.$$

Além disso $a(y, b)$, $h(y, b)$ dependem continuamente de y e b .

ii) Nas condições da parte i), seja ainda $\hat{a} \in \mathcal{P}$ tal que

$$\|\hat{a} - \bar{a}\| \leq \varepsilon_1, \quad \hat{a}_{m+i} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-m$$

$$\text{e } \operatorname{sgn}[f(y_i) - \Phi(\hat{a})(y_i)] = -\operatorname{sgn}[f(y_{i+1}) - \Phi(\hat{a})(y_{i+1})] \\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Então existem $\theta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m+1$ tais que

$$|h(y, b)| = \sum_{i=1}^{m+1} \theta_i |f(y_i) - \Phi(\hat{a})(y_i)|$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 1 - \theta$$

onde $0 < \theta < 1$ e θ não depende dos particulares $a, \hat{a}, y, h$.

Prova

i) Seja $F: \mathbb{R} \times \mathcal{P} \times [\alpha, \beta]^{m+1} \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ definida por:

$$F^i(h, a, y, b) = (-1)^i h - f(y_i) + \Phi(a)(y_i)$$

$$i = 1, 2, \dots, m+1$$

$$F^i(h, a, y, b) = a_{i-1} - b_{i-m-1}$$

$$i = m+2, \dots, n+1$$

O sistema (1.6.1) pode ser escrito como

$$F(h, a, y, b) = 0$$

Seja $z \in C$ e para fixar ideias suponhamos que $z \in C^-$.

F é contínua e

$$F(\|f - \Phi(\bar{a})\|, \bar{a}, z, (\bar{a}_{m+1}, \bar{a}_{m+2}, \dots, \bar{a}_n)) = 0$$

No ponto $(\|f - \Phi(\bar{a})\|, \bar{a}, z; (\bar{a}_{m+1}, \dots, \bar{a}_n))$ a matriz jacobiana de F relativamente a (h, a) é

$$J = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

onde a matriz A é:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{\partial \Phi(\bar{a})}{\partial a_1}(z_1) & \frac{\partial \Phi(\bar{a})}{\partial a_2}(z_1) & \cdots & \frac{\partial \Phi(\bar{a})}{\partial a_m}(z_1) \\ +1 & \frac{\partial \Phi(\bar{a})}{\partial a_1}(z_2) & \frac{\partial \Phi(\bar{a})}{\partial a_2}(z_2) & \cdots & \frac{\partial \Phi(\bar{a})}{\partial a_m}(z_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^i & \frac{\partial \Phi(\bar{a})}{\partial a_1}(z_{m+1}) & \frac{\partial \Phi(\bar{a})}{\partial a_2}(z_{m+1}) & \cdots & \frac{\partial \Phi(\bar{a})}{\partial a_m}(z_{m+1}) \end{bmatrix}$$

Como $L_{\bar{a}}$ é subespaço de Haar com base $\frac{\partial \Phi(\bar{a})}{\partial a_j}$, $j=1,2,\dots,m$, temos:

$$\det J = \det A \neq 0.$$

Pelo teorema das funções implícitas existem $\varepsilon_1, \varepsilon_3$, ε_4 e $\delta_0 \leq \delta_2$, ε_0 tais que se $y \in D_{\delta_0}$ e $|b_i - \bar{a}_{m+i}| \leq \varepsilon_0$ então existem únicos $a(y,b)$, $h(y,b)$ satisfazendo

$$\|a(y,b) - \bar{a}\| \leq \varepsilon_1, \quad |\|f - \Phi(\bar{a})\| - h(y,b)| \leq \varepsilon_4.$$

Além disso a e h são funções contínuas de (y,b) .

Se ε_0 e δ_0 são suficientemente pequenos $h(y,b)$ tem o mesmo sinal que $\|f - \Phi(\bar{a})\|$ (positivo) e podemos escrever

$$|\|f - \Phi(\bar{a})\| - |h(y,b)|| \leq \varepsilon_4.$$

No caso $z \in C^+$, substituímos
 $(\|f - \Phi(\bar{a})\|, z, \bar{a}, (\bar{a}_{m+1}, \dots, \bar{a}_n))$ por
 $(-\|f - \Phi(\bar{a})\|, z, \bar{a}, (\bar{a}_{m+1}, \dots, \bar{a}_n))$.

É fácil verificarmos que valores de $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \delta_0$ existem satisfazendo os dois casos. (q.e.d.)

ii) Seja (h, a) solução de (1.6.1).
 Somando-se $-\Phi(\hat{a})(y_i)$ a ambos os membros de

$$(-1)^i h + \Phi(a)(y_i) = f(y_i)$$

obtemos:

$$(-1)^i h + \Phi(a)(y_i) - \Phi(\hat{a})(y_i) = f(y_i) - \Phi(\hat{a})(y_i).$$

Pelo teorema da média e lembrando que $a_{m+i} = \hat{a}_{m+i} = b_i$, $i=1, 2, \dots, n-m$, temos:

$$(1.6.2) \quad (-1)^i h + \sum_{j=1}^{m+1} \left[\frac{\partial \Phi(\tilde{a}^i)}{\partial a_j}(y_i) \right] (a_j - \hat{a}_j) = f(y_i) - \Phi(\hat{a})(y_i)$$

onde $\tilde{a}^i \in [a, \hat{a}]$, $i=1, 2, \dots, m+1$

Como $\tilde{a}^i \in [a, \hat{a}]$ resulta $\|\tilde{a}^i - \bar{a}\| \leq \epsilon_1$.

Se o determinante do sistema (1.6.2) for diferente de zero, teremos pela regra

de Cramer :

$$\det \begin{bmatrix} f(y_1) - \Phi(\hat{a})(y_1) & \frac{\partial \Phi(\tilde{a}^1)}{\partial a_1}(y_1) & \cdots & \frac{\partial \Phi(\tilde{a}^1)}{\partial a_m}(y_1) \\ f(y_2) - \Phi(\hat{a})(y_2) & \frac{\partial \Phi(\tilde{a}^2)}{\partial a_1}(y_2) & \cdots & \frac{\partial \Phi(\tilde{a}^2)}{\partial a_m}(y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(y_{m+1}) - \Phi(\hat{a})(y_{m+1}) & \frac{\partial \Phi(\tilde{a}^{m+1})}{\partial a_1}(y_{m+1}) & \cdots & \frac{\partial \Phi(\tilde{a}^{m+1})}{\partial a_m}(y_{m+1}) \end{bmatrix}$$

$h =$

$$\det \begin{bmatrix} -1 & \frac{\partial \Phi(\tilde{a}^1)}{\partial a_1}(y_1) & \cdots & \frac{\partial \Phi(\tilde{a}^1)}{\partial a_m}(y_1) \\ +1 & \frac{\partial \Phi(\tilde{a}^2)}{\partial a_1}(y_2) & \cdots & \frac{\partial \Phi(\tilde{a}^2)}{\partial a_m}(y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{m+1} & \frac{\partial \Phi(\tilde{a}^{m+1})}{\partial a_1}(y_{m+1}) & \cdots & \frac{\partial \Phi(\tilde{a}^{m+1})}{\partial a_m}(y_{m+1}) \end{bmatrix}$$

Como $y \in D_{\delta_0} \subset D_{\delta_2}$ temos pelo lema 1.5 que: $|H_k(y, \tilde{a}^1, \tilde{a}^2, \dots, \tilde{a}^{k-1}, \tilde{a}^{k+1}, \dots, \tilde{a}^{m+1})| \geq \alpha > 0$

$k = 1, 2, \dots, m+1.$

Então o determinante no denominador é diferente de zero pois vale:

$$\sum_{k=1}^{m+1} (-1)^k (-1)^{k-1} H_k(y, \tilde{a}^1, \tilde{a}^2, \dots, \tilde{a}^{k-1}, \tilde{a}^{k+1}, \dots, \tilde{a}^{m+1}) =$$

$$= - \sum_{k=1}^{m+1} H_k(y, \tilde{a}^1, \tilde{a}^2, \dots, \tilde{a}^{k-1}, \tilde{a}^{k+1}, \dots, \tilde{a}^{m+1})$$

e $\text{sgn } H_k$ é constante para $k=1, 2, \dots, m+1$.

Teremos então:

$$h = \frac{\sum_{k=1}^{m+1} [f(y_k) - \Phi(\hat{a})(y_k)] (-1)^{k-1} H_k}{-\sum_{k=1}^{m+1} H_k}$$

Como os sinais de $f(y_k) - \Phi(\hat{a})(y_k)$ alternam resulta:

$$|h| = \sum_{i=1}^{m+1} \theta_i |f(y_i) - \Phi(\hat{a})(y_i)|$$

onde

$$\theta_i = \frac{H_i(y, \tilde{a}^1, \tilde{a}^2, \dots, \tilde{a}^{i-1}, \tilde{a}^{i+1}, \dots, \tilde{a}^{m+1})}{\sum_{k=1}^{m+1} |H_k(y, \tilde{a}^1, \tilde{a}^2, \dots, \tilde{a}^{k-1}, \tilde{a}^{k+1}, \dots, \tilde{a}^{m+1})|}$$

Então

$$\sum_{i=1}^{m+1} \theta_i = 1$$

$$1 \geq \frac{|H_i|}{\sum |H_k|} \geq \frac{\kappa}{\max_{\substack{y \in D\delta_0 \\ \|a^i - \bar{a}\| \leq \varepsilon_1}} \sum_{k=1}^{m+1} |H_k(y, \tilde{a}^1, \tilde{a}^2, \dots, \tilde{a}^m)|} =$$

$$= 1 - \theta > 0$$

$$\therefore \theta_i \geq 1 - \theta$$

(q.e.d.)

1.7 Lema

Existe $\varepsilon_5 > 0$ tal que se $a \in \mathcal{O}$, $y \in D$

$$\operatorname{sgn} [f(y_i) - \Phi(a)(y_i)] = -\operatorname{sgn} [f(y_{i+1}) - \Phi(a)(y_{i+1})]$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{e } \|f - \Phi(a)\| - \min_{1 \leq i \leq m+1} |f(y_i) - \Phi(a)(y_i)| \leq \varepsilon_5$$

então $y \in D_{\delta_0}$.

Prova

Suponhamos (por absurdo) que não fosse verdade.

Existem, então, seqüências (a^j) , (y^j) onde $a^j \in \mathcal{O}$, $y^j \in D$, tais que:

$$(1.7.1) \quad \operatorname{sgn} [f(y_i^j) - \Phi(a^j)(y_i^j)] = -\operatorname{sgn} [f(y_{i+1}^j) - \Phi(a^j)(y_{i+1}^j)]$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$(1.7.2) \quad \|f - \Phi(a^j)\| - \min_i |f(y_i^j) - \Phi(a^j)(y_i^j)| \rightarrow 0$$

$$\text{e } y^j \notin D_{\delta_0}.$$

$$\text{Como } \|f - \Phi(a^j)\| \geq \|f - \Phi(\bar{a})\| \geq$$

$$\geq \min_i |f(y_i^j) - \Phi(a^j)(y_i^j)|$$

$$\text{resulta } \|f - \Phi(a^j)\| \rightarrow \|f - \Phi(\bar{a})\|.$$

Pela proposição 4.11 do Capítulo II temos:

$$\|\Phi(a^j) - \Phi(\bar{a})\| \leq \frac{\|f - \Phi(a^j)\| - \|f - \Phi(\bar{a})\|}{\gamma} \rightarrow 0$$

Pela compacidade de $\bar{D}$, tomando-se uma sub-sequência se necessário, teremos $y^j \rightarrow \bar{y} \in \bar{D}$. Como $\text{dist}(y^j, C) > \delta_0$ teremos, $\text{dist}(\bar{y}, C) \geq \delta_0$ donde $\bar{y} \notin C$.
De:

$$\begin{aligned} & |\Phi(\bar{a})(\bar{y}_i) - \Phi(a^j)(y_i^j)| \leq \\ & \leq |\Phi(\bar{a})(\bar{y}_i) - \Phi(\bar{a})(y_i^j)| + |\Phi(\bar{a})(y_i^j) - \Phi(a^j)(y_i^j)| \end{aligned}$$

$$\text{nem } \Phi(a^j)(y_i^j) \rightarrow \Phi(\bar{a})(\bar{y}_i)$$

Portanto de (1.7.2) resulta:

$$\|f - \Phi(\bar{a})\| = \min_i |f(\bar{y}_i) - \Phi(\bar{a})(\bar{y}_i)|$$

$i = 1, 2, \dots, m+1$

Passando (1.7.1) ao limite obtemos:

$$\text{sgn}[f(\bar{y}_i) - \Phi(\bar{a})(\bar{y}_i)] = -\text{sgn}[f(\bar{y}_{i+1}) - \Phi(\bar{a})(\bar{y}_{i+1})]$$

$i = 1, 2, \dots, m.$

Portanto $\bar{y} \in C$ e temos uma contradição.

Logo a tese é verdadeira.

(q.e.d.).

1.8 Lema

Seja $\varepsilon_5 > 0$.

Existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que se $y \in D_{\delta_0}$,
 $|b_i - \bar{a}_{m+i}| \leq \varepsilon_0$, $i = 1, 2, \dots, m-m$, e
 $\|f - \Phi(\bar{a})\| - |h(y, b)| \leq \varepsilon_2$ então:

$$\|f - \Phi(a(y, b))\| - |h(y, b)| \leq \varepsilon_5.$$

Prova

Suponhamos (por absurdo) que não fosse verdade.

Existiriam seqüências $(y^j), (b^j)$ onde
 $y^j \in D_{\delta_0}$, $|b_i^j - \bar{a}_{m+i}| \leq \varepsilon_0$, tais que:

$$\|f - \Phi(\bar{a})\| - |h(y^j, b^j)| \rightarrow 0$$

$$\text{e } \|f - \Phi(a(y^j, b^j))\| - |h(y^j, b^j)| \geq \varepsilon_5.$$

Por compacidade, podemos escrever, passando a subseqüências se for necessário, que:
 $y^j \rightarrow \bar{y}$, $b^j \rightarrow \bar{b}$.
 Teremos:

$$\|f - \Phi(\bar{a})\| = |h(\bar{y}, \bar{b})|$$

$$\text{e } \|f - \Phi(a(\bar{y}, \bar{b}))\| - |h(\bar{y}, \bar{b})| \geq \varepsilon_5$$

Mas o valor absoluto de $f - \Phi(a(\bar{y}, \bar{b}))$
 nos pontos $\bar{y}_i$, $i = 1, 2, \dots, m+1$ vale:

$\|f - \Phi(\bar{a})\| = |h(\bar{y}, \bar{b})|$ e nesses pontos
 $f - \Phi(a(\bar{y}, \bar{b}))$ tem sinais alternados.
 Logo $f - \Phi(a(\bar{y}, \bar{b}))$ é alternante donde
 $\Phi(\bar{a}) = \Phi(a(\bar{y}, \bar{b}))$.

Então $\|f - \Phi(a(\bar{y}, \bar{b}))\| = \|f - \Phi(\bar{a})\| = |h(\bar{y}, \bar{b})|$
 o que contradiz $\|f - \Phi(a(\bar{y}, \bar{b}))\| - |h(\bar{y}, \bar{b})| \geq \varepsilon$.
 Logo a tese é verdadeira.
 (q.e.d.).

1.9 Proposição

Sejam $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ como nos
 lemas precedentes. Se:

$$|a_i^0 - \bar{a}_{m+i}| \leq \varepsilon_0, \quad i = 1, 2, \dots, n-m$$

$$\|a^0 - \bar{a}\| \leq \varepsilon_1, \quad y^0 \in D_{f_0}$$

$$\|f - \Phi(\bar{a})\| - \min_{1 \leq i \leq m+1} |f(y_i^0) - \Phi(a^0)(y_i^0)| \leq \varepsilon_2$$

então o algoritmo 1.2 (de Remez)
 sem a regra de parada pode ser
 executado indefinidamente produzindo
 seqüências (a^k) , (h^k) , (y^k) tais que:

$$\|a^k - \bar{a}\| \leq \varepsilon_1, \quad y^k \in D_{f_0}$$

$$\|f - \Phi(\bar{a})\| - \min_{1 \leq i \leq m+1} |f(y_i^k) - \Phi(a^k)(y_i^k)| \leq \varepsilon_2.$$

Prova (por indução).

i) Mostremos que a^1, h^1, y^1 podem ser calculados satisfazendo

$$\|a^1 - \bar{a}\| \leq \varepsilon_1, \quad y^1 \in D\delta_0$$

$$\text{e } \|f - \Phi(\bar{a})\| - \min_i |f(y_i^1) - \Phi(a^1)(y_i^1)| \leq \varepsilon_2$$

Pelo lema 1.6 existem a^1, h^1 satisfazendo (1.6.1) tais que $\|a^1 - \bar{a}\| \leq \varepsilon_1$.

Aplicando a parte (ii) do lema 1.6 fazendo $y = y^0, \hat{a} = a^0, h = h^1$ obtemos:

$$\begin{aligned} \|f - \Phi(\bar{a})\| - |h^1| &= \|f - \Phi(\bar{a})\| - \sum_{i=1}^{m+1} \theta_i |f(y_i^0) - \Phi(a^0)(y_i^0)| \\ &\leq \|f - \Phi(\bar{a})\| - \min_i |f(y_i^0) - \Phi(a^0)(y_i^0)| \leq \varepsilon_2 \end{aligned}$$

Pelo lema 1.8 vem:

$$\|f - \Phi(a^1)\| - |h^1| \leq \varepsilon_5$$

O passo [3] do algoritmo 1.2 pode sempre ser executado o que é de fácil verificação. Seja $y^1 \in D$ obtido no passo [3]. Temos:

$$\begin{aligned} \|f - \Phi(a^1)\| &= \min_i |f(y_i^1) - \Phi(a^1)(y_i^1)| \leq \\ &\leq \|f - \Phi(a^1)\| - |h^1| \leq \varepsilon_5 \end{aligned}$$

Pelo lema 1.7 resulta $y^1 \in D\gamma_0$.

Finalmente:

$$\begin{aligned} \|f - \Phi(\bar{a})\| &= \min_i |f(y_i^1) - \Phi(a^1)(y_i^1)| \leq \\ &\leq \|f - \Phi(\bar{a})\| - |h^1| \leq \varepsilon_2. \end{aligned}$$

ii) Supondo agora que a^j, h^j, y^j puderam ser calculados satisfazendo

$$\|a^j - \bar{a}\| \leq \varepsilon_1, \quad y^j \in D\gamma_0 \quad \text{e}$$

$$\|f - \Phi(\bar{a})\| = \min_i |f(y_i^j) - \Phi(a^j)(y_i^j)| \leq \varepsilon_2$$

para $j = 1, 2, \dots, k$, podemos mostrar que podemos obter $a^{k+1}, h^{k+1}, y^{k+1}$ satisfazendo as mesmas condições, de forma exatamente análoga como na parte i).

(q.e.d.).

1.10 Proposição

Seja $|a_i^0 - \bar{a}_{m+i}| \leq \varepsilon_0$, $i = 1, 2, \dots, m-m$,

$$\|a^0 - \bar{a}\| \leq \varepsilon_1 \quad \text{e} \quad \|f - \Phi(\bar{a})\| = \min_{1 \leq i \leq m+1} |f(y_i^0) - \Phi(a^0)(y_i^0)| \leq \varepsilon_2$$

Seja (a^k) a sequência obtida pela aplicação do algoritmo 1.2 de Remez. Então:

$$\|\Phi(a^k) - \Phi(\bar{a})\| \leq K\theta^k, \quad 0 < \theta < 1.$$

Prova

$$\begin{aligned}
 |h^k| - |h^{k-1}| &= \sum_{i=1}^{m+1} \theta_i \left(|f(y_i^{k-1}) - \Phi(a^{k-1})(y_i^{k-1})| - |h^{k-1}| \right) \geq \\
 &\geq (1-\theta) \sum_{i=1}^{m+1} \left(|f(y_i^{k-1}) - \Phi(a^{k-1})(y_i^{k-1})| - |h^{k-1}| \right) \geq \\
 &\geq (1-\theta) \left(\max_i |f(y_i^{k-1}) - \Phi(a^{k-1})(y_i^{k-1})| - |h^{k-1}| \right) = \\
 &= (1-\theta) \left(\|f - \Phi(a^{k-1})\| - |h^{k-1}| \right) \geq \\
 &\geq (1-\theta) \left(\|f - \Phi(\bar{a})\| - |h^{k-1}| \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|f - \Phi(\bar{a})\| - |h^k| &= \\
 &= \left(\|f - \Phi(\bar{a})\| - |h^{k-1}| \right) - \left(|h^k| - |h^{k-1}| \right) \leq \\
 &\leq \left(\|f - \Phi(\bar{a})\| - |h^{k-1}| \right) - (1-\theta) \left(\|f - \Phi(\bar{a})\| - |h^{k-1}| \right) = \\
 &= \theta \left(\|f - \Phi(\bar{a})\| - |h^{k-1}| \right).
 \end{aligned}$$

$$\|f - \Phi(\bar{a})\| - |h^k| \leq \theta^{k-1} (\|f - \Phi(\bar{a})\| - |h^1|)$$

$$\begin{aligned}
 \|f - \Phi(a^k)\| - \|f - \Phi(\bar{a})\| &\leq \|f - \Phi(a^k)\| - |h^k| \leq \\
 &\leq \frac{|h^{k+1}| - |h^k|}{1-\theta} \leq \frac{\|f - \Phi(\bar{a})\| - |h^k|}{1-\theta} \leq
 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\theta^{k-1}}{1-\theta} (\|f - \Phi(\bar{a})\| - |h^1|).$$

Pela proposição 4.11 do Capítulo II :

$$\|f - \Phi(a^k)\| \geq \|f - \Phi(\bar{a})\| + \gamma \|\Phi(a^k) - \Phi(\bar{a})\|$$

$$\|\Phi(a^k) - \Phi(\bar{a})\| \leq \frac{\|f - \Phi(a^k)\| - \|f - \Phi(\bar{a})\|}{\gamma} \leq$$

$$\leq \frac{\|f - \Phi(\bar{a})\| - |h^1|}{\theta(1-\theta)\gamma} \theta^k = K \theta^k$$

(q.e.d.).

§2. Interpolação por funções racionais

2.1 Para aplicação do Algoritmo de Remez necessitamos um bom aproximante inicial.

No caso em que $f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R}) \setminus A$ e $A = R_m^n[\alpha, \beta]$ ou $A = R_m^{n+1}[\alpha, \beta]$ a técnica de interpolação de f por funções racionais relativamente a pontos

$$x_0, x_1, \dots, x_m \in [\alpha, \beta]$$

pode fornecer com simplicidade um bom aproximante inicial.

2.2 Definição

Seja $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$.

Dados $x_0, x_1 \in [\alpha, \beta]$ tais que $f(x_0) \neq f(x_1)$ definimos a diferença recíproca primeira $\rho_1(x_0, x_1)$, relativa aos pontos x_0, x_1 por

$$\rho_1(x_0, x_1) = \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

Convencionaremos que $\rho_0(x) = f(x)$
 $\forall x \in [\alpha, \beta]$ e que $\rho_{-1} = 0$

Supondo-se definidas as diferenças
recíprocas $\rho_k(x_0, x_1, \dots, x_k)$, $k=2, 3, \dots, n-1$
onde $x_0, x_1, \dots, x_k \in [\alpha, \beta]$ vamos
definir diferença recíproca de ordem n .

Dados $x_0, x_1, \dots, x_m \in [\alpha, \beta]$ tais que
existem $\rho_{m-1}(x_0, x_1, \dots, x_{m-2}, x_{m-1})$,
 $\rho_{m-1}(x_0, x_1, \dots, x_{m-2}, x_m)$, $\rho_{m-2}(x_0, x_1, \dots, x_{m-2})$
e tais que

$$\rho_{m-1}(x_0, x_1, \dots, x_{m-2}, x_{m-1}) \neq \rho_{m-1}(x_0, x_1, \dots, x_{m-2}, x_m)$$

definimos:

$$\rho_m(x_0, x_1, \dots, x_m) =$$

$$\frac{x_m - x_{m-1}}{\rho_{m-1}(x_0, x_1, \dots, x_{m-2}, x_m) - \rho_{m-1}(x_0, x_1, \dots, x_{m-2}, x_{m-1})} +$$

$$+ \rho_{m-2}(x_0, x_1, \dots, x_{m-2})$$

2.3 • Observações

i) Quando não houver perigo de confusão omitiremos o índice n em ρ ou a menção explícita dos argumentos.

ii) Suporemos nos desenvolvimentos subsequentes deste parágrafo que existam as diferenças recíprocas utilizadas.

2.4 Fórmula de Thiele

$$\begin{aligned}
 f(x) = & \rho(x_0) + \frac{x - x_0}{\rho(x_0, x_1) + \frac{x - x_1}{\rho(x_0, x_1, x_2) - \rho(x_0) + \\
 & + \frac{x - x_2}{\rho(x_0, x_1, x_2, x_3) - \rho(x_0, x_1) + \dots} \\
 & \dots + \frac{x - x_{m-1}}{\rho(x_0, x_1, \dots, x_m) - \rho(x_0, x_1, \dots, x_{m-2})} + T_m(x)
 \end{aligned}$$

onde :

$$T_m(x) = \frac{x - x_m}{\rho(x_0, x_1, \dots, x_m, x) - \rho(x_0, x_1, \dots, x_{m-1})}$$

Prova (por indução).

Provemos para $n = 1$.

$$\begin{aligned}
 \rho(x_0, x_1, x) &= \frac{x - x_1}{\rho(x_0, x) - \rho(x_0, x_1)} + \rho(x_0) = \\
 &= \frac{x - x_1}{\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} - \rho(x_0, x_1)} + \rho(x_0)
 \end{aligned}$$

Teremos então :

$$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} - \rho(x_0, x_1) = \frac{x - x_1}{\rho(x_0, x_1, x) - \rho(x_0)} = T_1(x)$$

donde

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{\rho(x_0, x_1) + T_1(x)}$$

Suponhamos provado para $m = 1, 2, \dots, k-1$
e provemos para k . De:

$$\begin{aligned} \rho(x_0, x_1, \dots, x_k, x) &= \\ &= \frac{x - x_k}{\rho(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) - \rho(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k)} + \rho(x_0, x_1, \dots, x_k) \end{aligned}$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \rho(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) &= \rho(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) + \\ &+ \frac{x - x_k}{\rho(x_0, x_1, \dots, x_k, x) - \rho(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})} = \\ &= \rho(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) + T_k(x). \end{aligned}$$

Substituindo em

$$T_{k-1}(x) = \frac{x - x_{k-1}}{\rho(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) - \rho(x_0, x_1, \dots, x_{k-2})}$$

obtemos:

$$T_{k-1}(x) = \frac{x - x_{k-1}}{\rho(x_0, x_1, \dots, x_k) - \rho(x_0, x_1, \dots, x_{k-2})} + T_k(x).$$

Como pela hipótese de indução a fórmula de Thiele vale para $k-1$, resulta válida para k .

(q.e.d.).

2.5 Proposição

Seja $f_m: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\begin{aligned} f_m(x) = & \rho(x_0) + \frac{x - x_0}{\rho(x_0, x_1)} + \frac{x - x_1}{\rho(x_0, x_1, x_2) - \rho(x_0)} + \dots \\ & \dots + \frac{x - x_{m-1}}{\rho(x_0, x_1, \dots, x_m) - \rho(x_0, x_1, \dots, x_{m-2})} \end{aligned}$$

Então $f_m(x_j) = f(x_j)$ $j = 0, 1, \dots, m$.

Prova (por indução)

Para $m=1$.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \rho(x_0) + \frac{x - x_0}{\rho_1(x_0, x_1)} = f(x_0) + \frac{x - x_0}{\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}} = \\ &= f(x_0) + [f(x_1) - f(x_0)] \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \end{aligned}$$

Portanto $I_1(x_0) = f(x_0)$ e $I_1(x_1) = f(x_1)$.

Suponhamos verdadeira a proposição para $k = 1, 2, \dots, m-1$ e provemos para m .

Substituindo x_j , $j = 0, 1, \dots, m-1$ na expressão de $I_m(x)$ obtemos:

$$I_m(x_j) = f(x_j) \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

Pela hipótese de indução, $I_m(x_j) = f(x_j)$
 $j = 0, 1, \dots, m-1$.

Resta mostrar que $I_m(x_m) = f(x_m)$.

Pela fórmula de Thiele temos:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{\rho(x_0, x_1) + \dots}$$

$$\dots + \frac{x - x_{m-2}}{\rho(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) - \rho(x_0, x_1, \dots, x_{m-3}) + T_{m-1}(x)}$$

$$\text{onde } T_{m-1}(x) = \frac{x - x_{m-1}}{\rho(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x) - \rho(x_0, x_1, \dots, x_{m-2})}$$

Fazendo $x = x_m$ obtemos $f(x_m) = I_m(x_m)$.

(q.e.d.)

2.6 Observação

A expressão para $I_n(x)$ na prop. 3.5 é chamada fórmula de interpolação de Thiele.

2.7. Proposição

Seja :

$$I_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2 + \dots} \dots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}}$$

Então $I_k = \frac{P_k}{q_k}$, $k = 0, 1, \dots, n$
 onde :

$$\begin{cases} p_0 = b_0 \\ q_0 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} p_1 = b_1 p_0 + a_1 \\ q_1 = b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_k = b_k p_{k-1} + a_k p_{k-2} \\ q_k = b_k q_{k-1} + a_k q_{k-2} \end{cases}, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

Prova (por indução)

Os casos $n=0$ e $n=1$ podem ser verificados diretamente.

Suponhamos validas as formulas para $n = k-1$. isto é'

$$p_{k-1} = b_{k-1} p_{k-2} + a_{k-1} p_{k-3}$$

$$q_{k-1} = b_{k-1} q_{k-2} + a_{k-1} q_{k-3}$$

$$\text{e } r_{k-1} = \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}.$$

Obtemos r_k substituindo b_{k-1} por $b_{k-1} + \frac{a_k}{a_k}$
Termos:

$$r_k = \frac{\left(b_{k-1} + \frac{a_k}{b_k}\right) p_{k-2} + a_{k-1} p_{k-3}}{\left(b_{k-1} + \frac{a_k}{b_k}\right) q_{k-2} + a_{k-1} q_{k-3}} =$$

$$= \frac{b_{k-1} p_{k-2} + a_{k-1} p_{k-3} + \frac{a_k}{b_k} p_{k-2}}{b_{k-1} q_{k-2} + a_{k-1} q_{k-3} + \frac{a_k}{b_k} q_{k-2}} =$$

$$= \frac{p_{k-1} + \frac{a_k}{b_k} p_{k-2}}{q_{k-1} + \frac{a_k}{b_k} q_{k-2}} = \frac{b_k p_{k-1} + a_k p_{k-2}}{b_k q_{k-1} + a_k q_{k-2}} = \frac{p_k}{q_k}$$

(q.e.d.)

2.8 Proposição

Nº caso da fórmula de interpolação de
Thiele temos:

$$\begin{cases} p_{2k} = p_{2k} x^k + (\text{polinômio de grau } < k) \\ q_{2k} = x^k + (\quad " \quad " \quad " \quad ") \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{2k+1} = x^{k+1} + (\text{polinômio de grau } \leq k) \\ q_{2k+1} = p_{2k+1} x^{k+1} + (\quad " \quad " \quad " \quad ") \end{cases}$$

Prova (Por indução)

Como

$$p_0 = p_0 \quad p_1 = x - x_0 + p_1 \cdot f(x_0)$$

$$q_0 = 1 \quad q_1 = p_1$$

a proposição é válida para $n=0$.Supondo-se válida para $n=k$ provemos para $k+1$.

$$p_{2k+2} = (p_{2k+2} - p_{2k}) p_{2k+1} + (x - x_{2k+1}) p_{2k} =$$

$$= (p_{2k+2} - p_{2k}) (x^{k+1} + \dots) + (x - x_{2k+1}) (p_{2k} x^k + \dots) =$$

$$= p_{2k+2} x^{k+1} + \dots$$

$$q_{2k+2} = (p_{2k+2} - p_{2k}) q_{2k+1} + (x - x_{2k+1}) q_{2k} =$$

$$= (p_{2k+2} - p_{2k}) (p_{2k+1} x^k + \dots) + (x - x_{2k+1}) (x^k + \dots) =$$

$$= x^{k+1} + \dots$$

$$p_{2k+3} = (p_{2k+3} - p_{2k+1}) p_{2k+2} + (x - x_{2k+2}) p_{2k+1} =$$

$$= (p_{2k+3} - p_{2k+1}) (p_{2k+2} x^{k+1} + \dots) + (x - x_{2k+2}) (x^{k+1} + \dots) =$$

$$= x^{k+2} + \dots$$

$$q_{2k+3} = (p_{2k+3} - p_{2k+1}) q_{2k+2} + (x - x_{2k+2}) q_{2k+1}$$

$$\begin{aligned}
 q_{2k+3} &= (\rho_{2k+3} - \rho_{2k+1}) (x^{k+1} + \dots) + (x - x_{2k+2}) (\rho_{2k+1} x^k + \dots) \\
 &= \rho_{2k+3} x^{k+1} + \dots
 \end{aligned}$$

(q.e.d.),

2.9 Proposição

$\rho(x_0, x_1, \dots, x_k)$ é função simétrica de seus argumentos.

Prova

Pela proposição 2.8 temos:

$$r_{2k}(x) = \frac{\rho_{2k} x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \dots + a_k}{x^k + b_1 x^{k-1} + b_2 x^{k-2} + \dots + b_k}$$

Pela proposição 2.5 temos:

$$r_{2k}(x_j) = f(x_j) = y_j \quad j=0, 1, \dots, 2k.$$

isto é:

$$\begin{aligned}
 \rho_{2k} x_j^k + a_1 x_j^{k-1} + \dots + a_k - b_1 y_j x_j^{k-1} - \dots - b_k y_j &= y_j x_j^k \\
 j=0, 1, \dots, 2k
 \end{aligned}$$

Calculando ρ_{2k} pela regra de Cramer temos:

$$\rho_{2k} = \frac{\det N}{\det D}$$

Permutar os índices $\{0, 1, 2, \dots, 2k\}$ corresponde a permutar as linhas de N e as

linhas de D o que não altera o quociente dos determinantes.

Provamos analogamente para β_{2k+1} (q.e.d.).

2.10 Definição

Seja $r = \frac{p}{q}$ onde p e q são polinômios primos entre si. Definimos ordem(r) por:

$$\text{ordem}(r) = \begin{cases} 2 \text{ grau}(q) & \text{se } \text{grau}(p) \leq \text{grau}(q) \\ 2 \text{ grau}(p) - 1 & \text{se } \text{grau}(p) > \text{grau}(q) \end{cases}$$

2.11 Exemplo

$$\text{ordem de } \frac{x}{x+1} \quad \text{é} \quad 2$$

$$\text{ordem de } \frac{x^3+1}{x+1} \quad \text{é} \quad 5$$

2.12 Proposição

Se r_1 e r_2 são duas funções racionais de ordem $\leq k$ que coincidem em $k+1$ pontos distintos, então $r_1 = r_2$.

Prova

Sejam $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ onde p_i, q_i

são primos entre si, $i=1, 2$.

Se $r = \frac{p}{q}$ com p e q polinômios primos entre si e se $\text{ordem } r \leq k$, resulta da definição de ordem que

$$\left(\text{grau } p \leq \frac{k}{2} \quad \text{e} \quad \text{grau } q \leq \frac{k}{2} \right)$$

ou

$$\left(\text{grau } p \leq \frac{k+1}{2} \quad \text{e} \quad \text{grau } q \leq \frac{k-1}{2} \right)$$

Como $\text{grau } p_1 q_2 = \text{grau } p_1 + \text{grau } q_2$

e $\text{grau } p_2 q_1 = \text{grau } p_2 + \text{grau } q_1$

teremos em qualquer caso:

$$\text{grau } p_1 p_2 \leq k \quad \text{e} \quad \text{grau } p_2 q_1 \leq k$$

$$\text{De } \frac{p_1(x_j)}{q_1(x_j)} = \frac{p_2(x_j)}{q_2(x_j)}, \quad j=0, 1, \dots, k$$

$$\text{vem } p_1(x_j) q_2(x_j) = p_2(x_j) q_1(x_j), \quad j=0, 1, \dots, k.$$

Portanto $p_1 q_2$ e $p_2 q_1$ são dois polinômios de grau $\leq k$ que coincidem em $k+1$ pontos distintos.

Logo $P_1 q_2 = P_2 q_1$ e portanto $r_1 = r_2$.

(q.e.d.)

2.13 Proposição.

Seja r_k a função racional interpoladora obtida da fórmula de interpolação de Thiele levada até a diferença recíproca de ordem k . Então

$$\text{ordem } r_k \leq k$$

Prova

Pela proposição 2.9:

$$r_{2k} = \frac{p_{2k} x^{k'} + \dots}{x^k + \dots} = \frac{p_{2k}}{q_{2k}}$$

Como grau $p_{2k} \leq$ grau q_{2k} temos:

$$\text{ordem } r_{2k} \leq 2 \text{ grau } q_{2k} = 2k$$

$$r_{2k+1} = \frac{x^{k+1} + \dots}{p_{2k+1} x^k + \dots} = \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$$

Como grau $p_{2k+1} >$ grau q_{2k+1} temos:

$$\text{ordem } r_{2k+1} \leq 2 \text{ grau } p_{2k+1} - 1 = 2(k+1) - 1 = 2k+1$$

(q.e.d.).

2.14 Proposição

Se f é uma função racional de ordem k as diferenças recíprocas de ordem k são constantes.

Prova

Seja f de ordem $2k$ e sejam ρ_{2k} e ρ'_{2k} as diferenças recíprocas de ordem $2k$ calculadas a partir de dois conjuntos de $2k+1$ argumentos. Provemos que $\rho_{2k} = \rho'_{2k}$.

Sejam r_{2k} e r'_{2k} as funções racionais interpoladoras obtidas pela aplicação da fórmula de interpolação de Thiele aos dois conjuntos de argumentos.

Como $\text{ordem } f = 2k$ e pela proposição 2.13 $\text{ordem } r_{2k} \leq 2k$ e como f e r_{2k} coincidem em $2k+1$ pontos distintos, resulta pela proposição 2.12 que $f = r_{2k}$.

Analogamente $f = r'_{2k}$.
Portanto

$$r_{2k}(x) = \frac{\rho_{2k} x^k + \dots}{x^k + \dots} = \frac{\rho'_{2k} x^k + \dots}{x^k + \dots} = r'_{2k}(x)$$

$$\forall x \in [\alpha, \beta]. \quad \text{Então } \rho_{2k} = \rho'_{2k}.$$

Provamos analogamente quando $\text{ordem } f = 2k+1$ (q.e.d.).

2.15 Tabela de Diferenças recíprocas

Como as diferenças recíprocas são funções simétricas podemos escrever:

$$\begin{aligned} \rho(x_0, x_1, \dots, x_k) &= \rho(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_0, x_k) = \\ &= \frac{x_k - x_0}{\rho(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k) - \rho(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_0)} + \rho(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = \\ &= \frac{x_k - x_0}{\rho(x_1, x_2, \dots, x_k) - \rho(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})} + \rho(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}). \end{aligned}$$

Costuma-se dispor as diferenças recíprocas em forma tabular da seguinte maneira:

x	$f(x)$	ρ_1	ρ_2	ρ_3
x_0	$f(x_0)$			
		$\rho(x_0, x_1)$		
x_1	$f(x_1)$		$\rho(x_0, x_1, x_2)$	
		$\rho(x_1, x_2)$		$\rho(x_0, x_1, x_2, x_3)$
x_2	$f(x_2)$		$\rho(x_1, x_2, x_3)$	
		$\rho(x_2, x_3)$		$\rho(x_1, x_2, x_3, x_4)$
x_3	$f(x_3)$		$\rho(x_2, x_3, x_4)$	
		$\rho(x_3, x_4)$		
x_4	$f(x_4)$			

2.16 Exercício

Seja (x_i, y_i) , $i=0, 1, \dots, n$, $n \geq k$
 uma tabela cujas diferenças recíprocas
 de ordem k são constantes. Existe então
 uma função racional, única, passando
 por todos os pontos (x_i, y_i) .

2.17 Exemplo

x	f	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4
0	1				
		-2			
1	$\frac{1}{2}$		-1		
		$-\frac{10}{3}$		0	
2	$\frac{1}{5}$		$-\frac{1}{10}$		0
		$-\frac{50}{5}$		40	
3	$\frac{1}{10}$		$-\frac{1}{25}$		0
		$-\frac{170}{7}$		140	
4	$\frac{1}{17}$		$-\frac{1}{46}$		0
		$-\frac{442}{9}$		324	
5	$\frac{1}{26}$		$-\frac{1}{73}$		
		$-\frac{962}{11}$			
6	$\frac{1}{37}$				

Aplicando-se a fórmula de interpolação
 de Thiele a primeira diagonal obtemos:

$$f(x) = 1 + \frac{x-0}{-2} + \frac{x-1}{-2} + \frac{x-2}{2} + \frac{x-3}{1}$$

Reduzindo temos $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

que é de ordem 4.

Aplicando-se à segunda diagonal temos:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x-1}{-\frac{10}{3}} + \frac{x-2}{-\frac{6}{10}} + \frac{x-3}{\frac{130}{3}} + \frac{x-4}{\frac{1}{10}}$$

Reduzindo temos novamente $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

REFERÊNCIAS

1. BARRAR, R.B. - H.L. LOEB
On the continuity of the non-linear
Weierstrass operator
Pacific Journal of Mathematics
vol 32, n° 3, 593-601, (1970).
2. BARRAR, R.B. - H.L. LOEB
On the Remez Algorithm for non-linear
Families
Numerische Mathematik 15, 382-391 (1970)
3. BLATTER, G.
Best uniform approximation in the linear
space of continuous real valued functions on
a compact interval by elements of a
finite-dimensional linear subspace.
Textos de métodos Matemáticos n° 5
Inst. de Matemática, UFRJ, (1974)
4. BLATTER, G.
Notas de Aula sobre Aproximação Ótima
redigidas por Ivan de Q. Barros.
Curso de pos-graduação ministrado
pelo Dr. G. Blatter no IMEUSP no
2º semestre (1974). - Não publicado.

5. CHENEY, E.W.

Approximation by Generalized Rational Functions

Artigo em "Approximation of Functions"
editado por H.L. Garabedian.
Elsevier Publishing Co. (1964)

6. COLLATZ, L.

Funktionalanalysis und numerische Mathematik

Springer-Verlag (1964)

7. HÖNIG, C.S.

Análise Funcional e Aplicações

Publicações do Instituto de Matemática
e Estatística da Univ. de S. Paulo - (1970)

8. MEINARDUS, G.

Approximation of Functions: Theory and Numerical Methods

Springer Tracts in Natural Philosophy
(1967)

9. NEWMAN, D.J. - H.S. SHAPIRO

Approximation by generalized rational functions

Artigo em "On Approximation Theory"
editado por P.L. Butzer - J. Korevaar
Birkhäuser Verlag (1963)

10. MILNE , W.E .

Numerical Calculus

Princeton University Press (1949)

11. RICE , J.R.

The Approximation of Functions

Addison-Wesley Publ. Co -

1^o vol (1964)

2^o vol (1969)

12. SINGER , I.

Best Approximation in Normed Linear
Spaces by Elements of Linear Subspaces.

Springer-Verlag (1970) .